

权威 实用 经典



2018年

考研数学

高分复习全书 (数学三) 习题详解

曹显兵 刘喜波 / 编著

赠

 中国人民大学出版社

# 2018年 考研数学

高分复习全书（数学三）  
习题详解

曹显兵 刘喜波/编 著

中国人民大学出版社

• 北京 •

# 目 录

|                  |    |
|------------------|----|
| 第一部分 微积分         | 1  |
| 第一章 函数、极限与连续     | 1  |
| 习题精选一            | 1  |
| 第二章 导数与微分        | 5  |
| 习题精选二            | 5  |
| 第三章 微分中值定理与导数的应用 | 11 |
| 习题精选三            | 11 |
| 第四章 一元函数积分学      | 16 |
| 习题精选四            | 16 |
| 第五章 多元函数微分学      | 20 |
| 习题精选五            | 20 |
| 第六章 二重积分         | 25 |
| 习题精选六            | 25 |
| 第七章 无穷级数         | 30 |
| 习题精选七            | 30 |
| 第八章 常微分方程与差分方程   | 35 |
| 习题精选八            | 35 |
| 第二部分 线性代数        | 43 |
| 第一章 行列式          | 43 |
| 习题精选一            | 43 |
| 第二章 矩阵           | 46 |

|                              |     |
|------------------------------|-----|
| 习题精选二 .....                  | 46  |
| <b>第三章 向量</b> .....          | 53  |
| 习题精选三 .....                  | 53  |
| <b>第四章 线性方程组</b> .....       | 57  |
| 习题精选四 .....                  | 57  |
| <b>第五章 特征值与特征向量</b> .....    | 64  |
| 习题精选五 .....                  | 64  |
| <b>第六章 二次型</b> .....         | 72  |
| 习题精选六 .....                  | 72  |
| <b>第三部分 概率论与数理统计</b> .....   | 77  |
| <b>第一章 随机事件与概率</b> .....     | 77  |
| 习题精选一 .....                  | 77  |
| <b>第二章 随机变量及其分布</b> .....    | 82  |
| 习题精选二 .....                  | 82  |
| <b>第三章 多维随机变量及其分布</b> .....  | 86  |
| 习题精选三 .....                  | 86  |
| <b>第四章 随机变量的数字特征</b> .....   | 93  |
| 习题精选四 .....                  | 93  |
| <b>第五章 大数定律和中心极限定理</b> ..... | 98  |
| 习题精选五 .....                  | 98  |
| <b>第六章 数理统计的基本概念</b> .....   | 101 |
| 习题精选六 .....                  | 101 |
| <b>第七章 参数估计</b> .....        | 103 |
| 习题精选七 .....                  | 103 |

# 第一部分 微积分

## 第一章 函数、极限与连续

### 习题精选一

#### 一、填空题

1.  $(ab)^{\frac{3}{2}}$ .

【分析】 此题为未定式“ $1^\infty$ ”型.

【详解】  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{3}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x} (\frac{a^x + b^x}{2} - 1)} = e^{\frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + b^x - 2}{x}} = e^{\frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} (a^x \ln a + b^x \ln b)} = e^{\frac{3}{2} (\ln a + \ln b)} = (ab)^{\frac{3}{2}}.$

2.  $-\frac{3}{2}$ .

【详解】  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}ax^2}{-\frac{1}{2}x^2} = -\frac{2}{3}a.$

由题意知  $-\frac{2}{3}a = 1$ , 所以  $a = -\frac{3}{2}$ .

3.  $10\ln 3$ .

【详解】 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} (3^x - 1) = 0$ , 所以  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \left( 1 + \frac{f(x)}{\sin 2x} \right) = 0$ , 从而有  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sin 2x} = 0$ .

由  $\ln \left( 1 + \frac{f(x)}{\sin 2x} \right) \sim \frac{f(x)}{\sin 2x}$ ,  $3^x - 1 = e^{x \ln 3} - 1 \sim x \ln 3$ , 得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{\sin 2x}}{x \ln 3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x^2 \ln 3} = 5,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 10 \ln 3.$$

故

4.  $\frac{1}{2}$ .

【分析】 作变量替换  $u = xt$ , 然后求极限.

【详解】 令  $u = xt$ , 则

$$\int_{\frac{x}{2}}^x \frac{e^{xt} - 1}{t} dt = \int_{\frac{x^2}{2}}^{x^2} \frac{e^u - 1}{u} du,$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x^2} \int_{\frac{x}{2}}^x \frac{e^t - 1}{t} dt &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \int_{\frac{x}{2}}^x \frac{e^u - 1}{u} du = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x} \left( 2x \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} - x \frac{e^{x^2/2} - 1}{x^2/2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{x^2/2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2/2} (e^{x^2/2} - 1)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{x^2/2} - 1)}{x^2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

$$5. \alpha = 1, \quad \beta = \frac{1}{2}.$$

**【详解】** 由  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x + \sin^2 x} - (\alpha + \beta \sin x)}{\sin^2 x}$  存在知

$$\lim_{x \rightarrow 0} [\sqrt{1 + \sin x + \sin^2 x} - (\alpha + \beta \sin x)] = 0,$$

可得  $\alpha = 1$ .

用泰勒公式有

$$\begin{aligned}&\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x + \sin^2 x} - (\alpha + \beta \sin x)}{\sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{2}(\sin x + \sin^2 x) - \frac{1}{8}(\sin x + \sin^2 x)^2 - (1 + \beta \sin x) + o(\sin^2 x)}{\sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{2} - \beta\right) \sin x + \frac{3}{8} \sin^2 x}{\sin^2 x}\end{aligned}$$

存在, 从而有  $\beta = \frac{1}{2}$ .

故  $\alpha = 1, \quad \beta = \frac{1}{2}$ .

## 二、选择题

1. (B)

**【分析】** 利用无穷小量阶的比较.

$$\text{【详解】} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin^2 x) \cos x}{3x^2 + 4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{3x^2 + 4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x^2 + 4x^3} = \frac{1}{3}.$$

所以  $f(x)$  是  $g(x)$  的同阶但非等价无穷小. 答案应选(B).

2. (C)

$$\text{【详解】} \quad F(x) = \int_0^x (x^2 - t^2) f(t) dt = x^2 \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t^2 f(t) dt,$$

$$F'(x) = 2x \int_0^x f(t) dt + x^2 f(x) - x^2 f(x) = 2x \int_0^x f(t) dt.$$

因为  $F'(x)$  与  $x^k$  是同阶无穷小, 所以  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{x^k}$  存在且不为零.

用洛必达法则有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \int_0^x f(t) dt}{x^{k-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x)}{(k-1)x^{k-2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f'(x)}{(k-1)(k-2)x^{k-3}}$$

$$= 2f'(0) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(k-1)(k-2)x^{k-3}}$$

存在且不为零,从而  $k-3=0$ , 即  $k=3$ .

3. (A)

【详解】 函数  $f(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上的间断点是  $x=0, \pm \frac{\pi}{2}, 1$ , 而

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^{\frac{1}{x}} + e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}} - e)} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(e^{\frac{1}{x}} + e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}} - e)} = -1,$$

故  $x=0$  是  $f(x)$  的第一类间断点.

但  $\lim_{x \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}} \frac{(e^{\frac{1}{x}} + e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}} - e)} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(e^{\frac{1}{x}} + e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}} - e)} = \infty,$  故答案应选(A).

4. (C)

【详解】 由  $f(x), g(x)$  可导知,  $f(x), g(x)$  连续. 于是有:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$ . 又  $f(x_0) < g(x_0)$ , 所以有  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ . 故选(C).

【评注】 本题也可用排除法. 取  $f(x) = x, g(x) = x+1$ , 则  $f(x) < g(x), x \in (-\infty, +\infty)$ . 但(A), (B), (D) 不成立, 故选(C).

5. (C)

【详解】 由  $f(x)$  在  $x=0$  连续, 则  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ , 即  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = 2$ , 因而  $g(0) = 0, g'(0) = 2$ . 故应选(C).

### 三、解答题

1. 【详解】 用洛必达法则有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) + \ln(1-x)}{1 - \cos x + \sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{\sin x + 2\sin x \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{-2}{(1+x)(1-x)(1+2\cos x)} = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

2. 【详解】 由泰勒公式有  $\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2),$

$$\sqrt[3]{1+2\sin^2 x} = 1 + \frac{2}{3}\sin^2 x + o(x^2),$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{1+2\sin^2 x}}{\tan^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{1}{2}x^2\right) - \left(1 + \frac{2}{3}\sin^2 x\right) + o(x^2)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}\sin^2 x}{x^2} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

3. 【详解】

$$\lim_{x \rightarrow 0} (3e^{\frac{x}{x-1}} - 2)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3e^{\frac{x}{x-1}} - 2)}{x}},$$

而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3e^{\frac{x}{x-1}} - 3)}{x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{x}{x-1}} - 1}{(x-1)^2} = -3,$$

故

$$\lim_{x \rightarrow 0} (3e^{\frac{x}{x-1}} - 2)^{\frac{1}{x}} = e^{-3}.$$

4.【详解】 由洛必达法则有

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \cos(x-1)}{1 - \sin \frac{\pi}{2}x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{-\sin(x-1)}{\cos(x-1)}}{-\left(\cos \frac{\pi}{2}x\right) \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\sec^2(x-1)}{\frac{\pi}{2} \left(\sin \frac{\pi}{2}x\right) \frac{\pi}{2}} = \frac{-1}{\frac{\pi^2}{4}} = -\frac{4}{\pi^2}.$$

5.【分析】 作代换  $t = \frac{1}{x}$ , 转化“ $\infty - \infty$ ”型为“ $\frac{0}{0}$ ”型.

【详解】 令  $t = \frac{1}{x}$ , 用洛必达法则有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x - x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right] &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \ln(1+t) \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{1 - \frac{1}{1+t}}{2t} \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2(1+t)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

6.【详解】 由泰勒公式有  $\ln(1+ax) = ax - \frac{a^2x^2}{2} + o(x^2)$ , 从而得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{a}{x} - \left( \frac{1}{x^2} - a^2 \right) \ln(1+ax) \right] &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{a}{x} - \left( \frac{1}{x^2} - a^2 \right) \left( ax - \frac{a^2x^2}{2} + o(x^2) \right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{a}{x} - \frac{a}{x} + a^3x + \frac{a^2}{2} - \frac{a^4x^2}{2} \right] = \frac{a^2}{2}. \end{aligned}$$

【评注】 本题可通分直接利用洛必达法则, 但较烦琐且易出错.

$$\begin{aligned} 7.【详解】 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi \sqrt{n^2+1}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1} \sin(n\pi - \pi \sqrt{n^2+1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1} \sin \pi \frac{-1}{n + \sqrt{n^2+1}} = 0. \end{aligned}$$

8.【分析】 应注意极限  $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}$  不存在情形的处理(要考虑左、右极限).

$$\begin{aligned} 【详解】 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{2e^{-\frac{4}{x}} + e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}} + 1} + \frac{\sin x}{x} \right) = 1. \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} - \frac{\sin x}{x} \right) = 2 - 1 = 1, \end{aligned}$$

所以 原式 = 1.

9.【详解】 当  $x < 0$  时,  $e^{tx} \rightarrow 0$ , 故  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x+e^{tx}}{1+e^{tx}} = x$ . 当  $x = 0$  时,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x+e^{tx}}{1+e^{tx}} = \frac{1}{2}$ . 当

$x > 0$  时,  $e^{tx} \rightarrow +\infty$ , 故  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x+e^{tx}}{1+e^{tx}} = 1$ . 所以

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x+e^{tx}}{1+e^{tx}} = \begin{cases} x & x < 0; \\ \frac{1}{2} & x = 0; \\ 1 & x > 0. \end{cases}$$

**【评注】** 含参量的极限一定要考虑参数的取值范围.

**10.【详解】**  $f(x)$  的间断点为  $x = -k\pi - \frac{\pi}{2} (k = 0, 1, 2, \dots), x = 0, x = 1$ .

因为  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\sin 1$ , 故  $x = 0$  为跳跃间断点.

因为  $x \rightarrow 1$  时,  $f(x)$  的左、右极限均不存在, 故  $x = 1$  为第二类间断点.

因为  $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{x(\pi + 2x)}{2\cos x} = -\frac{\pi}{2}$ , 故  $x = -\frac{\pi}{2}$  为可去间断点.

因为  $\lim_{\substack{x \rightarrow k\pi - \frac{\pi}{2} \\ k=1, 2, \dots}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow k\pi - \frac{\pi}{2} \\ k=1, 2, \dots}} \frac{x(\pi + 2x)}{2\cos x} = \infty$ , 故  $x = -k\pi - \frac{\pi}{2} (k = 1, 2, \dots)$  为第二类间断点.

**11.【详解】** 由于  $2x - 1 < [2x] \leq 2x$  成立, 故当  $x \neq 0$  时, 有

$$\frac{2x-1}{x} < \frac{[2x]}{x} \leq \frac{2x}{x}, \quad \text{即} \quad 2 - \frac{1}{x} < \frac{[2x]}{x} \leq 2, \quad \text{或} \quad \frac{2x-1}{x} > \frac{[2x]}{x} \geq \frac{2x}{x},$$

$$\text{即} \quad 2 - \frac{1}{x} > \frac{[2x]}{x} \geq 2.$$

$$\text{由夹逼原理,} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[2x]}{x} = 2.$$

$$\text{因为} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[2x]}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{x} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{0}{x} = 0.$$

所以  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  不存在.

## 第二章 导数与微分

### 习题精选二

#### 一、填空题

1.  $-\frac{101!}{100}$ .

**【详解】** 由于  $f(1) = 0$ , 则  $f(x) = f(x) - f(1)$ .

由导数的定义有

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} [(x+2)(x-3)(x+4)\cdots(x+100)]$$

$$= 3 \cdot (-2) \cdot 5 \cdot (-4) \cdots (-98) \cdot 101 = -\frac{101!}{100}.$$

$$2. \frac{f'(0)}{2}.$$

【详解】 用导数的定义.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cos x)}{\tan^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2 \sin^2 \frac{x}{2})}{\tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2 \sin^2 \frac{x}{2}) \cos^2 x}{\sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{f(2 \sin^2 \frac{x}{2}) - f(0)}{2 \sin^2 \frac{x}{2} - 0} \cdot \frac{\cos^2 x \cdot 2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 x} \right] = \frac{f'(0)}{2}. \end{aligned}$$

$$3. \frac{1}{(x+1)^2} \ln \frac{2x-1}{x+1}.$$

【详解】 令  $u = \frac{2x-1}{x+1}$ , 则  $u'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$ .

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot u'(x) = \ln u^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{3}{(x+1)^2} = \left( \ln \frac{2x-1}{x+1} \right) \frac{1}{(x+1)^2}.$$

4. e.

【详解】  $\lim_{x \rightarrow 0} [1 + f(x)]^{\frac{1}{\ln(1+x)}} = \lim_{x \rightarrow 0} [1 + f(x)]^{\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{f(x)-f(0)}{\ln(1+x)-\ln 1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \cdot \frac{x}{\ln(1+x)-\ln 1} \right]$   
 $= e^{f'(0) \frac{1}{\ln(1+x)} \Big|_{x=0}} = e.$

5.  $3\sqrt{3}$ .

【详解】  $g''(y) = (g'(y))' = \left( \frac{1}{f'(x)} \right)'_y = -\frac{f''(x)}{f'^2(x)} \cdot \frac{dx}{dy} = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} \cdot \frac{1}{f'(x)}.$

当  $y = 2$  时,  $x = 1, f'(1) = -\frac{1}{\sqrt{3}}, f''(1) = 1,$

故  $g''(2) = -\frac{1}{\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = 3\sqrt{3}.$

## 二、选择题

1. (A)

【详解】 函数可能的不可导点为  $x = \pm \pi$ .

因为  $y'_-(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{(\pi^2 - x^2) \sin^2 x}{x - \pi} = 0,$

$$y'_+(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{(\pi^2 - x^2) \sin^2 x}{x - \pi} = 0,$$

所以  $y$  在  $\pi$  处可导.

又  $y'_-(-\pi) = \lim_{x \rightarrow -\pi^-} \frac{(\pi^2 - x^2) \sin^2 x}{x + \pi} = 0,$

$$y'_+(-\pi) = \lim_{x \rightarrow -\pi^+} \frac{(\pi^2 - x^2) \sin^2 x}{x + \pi} = 0,$$

所以  $y$  在  $-\pi$  处可导.

故  $y$  无不可导点.

**【评注】** 本题可利用如下结论: 设  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \exists$ , 则  $g(x) |x - x_0|$  在  $x_0$  处可导的充分必要条件为  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ .

2. (C)

**【详解】** 由于  $-f(x) = f(-x)$ , 所以  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上为奇函数, 故曲线  $y = f(x)$  关于  $(0, 0)$  中心对称. 又当  $x \in (0, +\infty)$  时  $f'(x) > 0, f''(x) > 0$ , 故当  $x \in (-\infty, 0)$  时  $f'(x) > 0, f''(x) < 0$ .

3. (C)

**【详解】** 由于  $f(x)$  为奇函数, 故  $f(0) = 0$ .

对  $f(x)$  在以  $0, x$  为端点的区间上用拉格朗日中值定理有

$$|f(x)| = |f(x) - f(0)| = |f'(\xi)| |x - 0| \leq M \cdot 1,$$

故对  $\forall x \in [-1, 1], |f(x)| \leq M$ .

4. (C)

**【详解】** 根据泰勒公式有

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5), \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5),$$

则 
$$\tan x - \sin x = \frac{x^3}{2} + \frac{1}{8}x^5 + o(x^5),$$

而 
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + \dots,$$

由题知  $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{f(x)} = 1$ , 即当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x)$  与  $\tan x - \sin x$  为等价无穷小量, 所以

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = 0, \quad \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{1}{2},$$

故  $f'''(0) = 3$ , 而  $f^{(4)}(0)$  任意.

5. (D)

**【详解】** 由于

$$F(x) = \int_0^x (x^2 - t^2) f'(t) dt = x^2 \int_0^x f'(t) dt - \int_0^x t^2 f'(t) dt,$$

所以

$$F'(x) = 2x \int_0^x f'(t) dt + x^2 f'(x) - x^2 f'(x) = 2x \int_0^x f'(t) dt,$$

由题意知  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{x^2} = 1$ , 即

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \int_0^x f'(t) dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \int_0^x f'(t) dt}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 2f'(0),$$

故  $f'(0) = \frac{1}{2}$ .

### 三、解答题

1.【详解】(1) 当  $x \neq 0$  时,  $f(x)$  显然连续.

当  $x = 0$  时,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a = f(0),$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x(1 + \sqrt{1+x})} = \frac{1}{2}.$$

故当  $a = \frac{1}{2}$  时,  $f(x)$  处处连续.

(2) 当  $x \neq 0$  时,  $f(x)$  显然可导. 当  $x = 0$  时,

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = b,$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} - \frac{1}{2}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \sqrt{1-x}}{4x \sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{2}x}{4x} = \frac{1}{8}.$$

所以当  $b = \frac{1}{8}$  时,  $f(x)$  处处可导.

2.【详解】方程两边对自变量  $x$  求导, 得

$$2 - e^{-(x+y)^2} (1 + y') = xy' + y \quad ①$$

令  $x = 0$ , 由原方程得

$$0 - \int_1^{y(0)} e^{-t^2} dt = 0.$$

又  $e^{-t^2} \neq 0$ , 所以有  $y(0) = 1$ , 代入 ① 式, 得

$$2 - e^{-[0+y(0)]^2} [1 + y'(0)] = 0 + y(0).$$

即  $2 - \frac{1 + y'(0)}{e} = 1$ , 解得  $y'(0) = e - 1$ .

3.【详解】当  $x \neq a$  时,  $g'(x) = \frac{f'(x)(x-a) - f(x)}{(x-a)^2}.$

当  $x = a$  时,  $g'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x)}{x-a} - f'(a)}{x - a}$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f'(a)(x-a)}{(x-a)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a)}{2(x-a)} = \frac{1}{2} f''(a).$$

故

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{f'(x)(x-a) - f(x)}{(x-a)^2}, & x \neq a, \\ \frac{1}{2} f''(a), & x = a. \end{cases}$$

又由于

$$\lim_{x \rightarrow a} g'(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)(x-a) - f(x)}{(x-a)^2} = \frac{1}{2} f''(a) = g'(a).$$

所以,  $g'(x)$  在  $x=a$  处连续.

4.【详解】 由于  $f(x+1) = 2f(x)$ , 则

$$f(x+2) = 2f(x+1) = 2^2 f(x).$$

一般式为

$$f(x+n) = 2f(x+n-1) = \cdots = 2^n f(x),$$

则

$$f(n) = 2^n f(0) = 2^n,$$

$$\text{所以 } f'(n) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+n) - f(n)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^n f(x) - 2^n f(0)}{x} = 2^n f'(0).$$

5.【证明】 当  $0 < |x-a| < \delta$  时,  $|f(x)| \geq |g(x)|$ .

又  $f(a) = g(a) = 0$ , 则  $|f(x) - f(a)| \geq |g(x) - g(a)|$ ,

于是

$$\frac{|f(x) - f(a)|}{|x-a|} \geq \frac{|g(x) - g(a)|}{|x-a|}.$$

令  $x \rightarrow a$ , 则有

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x) - f(a)|}{|x-a|} \geq \lim_{x \rightarrow a} \frac{|g(x) - g(a)|}{|x-a|},$$

即

$$|f'(a)| \geq |g'(a)|.$$

6.【详解】 由莱布尼茨公式有

$$f^{(n-1)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k [(x-a)^n]^{(n-1-k)} \varphi^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \frac{n!}{(k+1)!} (x-a)^{k+1} \varphi^{(k)}(x),$$

显然

$$f^{(n-1)}(a) = 0.$$

所以

$$\begin{aligned} f^{(n)}(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} n! \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \frac{1}{(k+1)!} (x-a)^k \varphi^{(k)}(x) = n! \varphi(a). \end{aligned}$$

7.【详解】 由泰勒公式有

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(\xi(x))}{2} (x-0)^2 = \frac{f''(\xi(x))}{2} x^2,$$

其中  $\xi(x)$  介于  $0, x$  之间, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \xi(x) = 0$ ,

同时  $f(u) = \frac{1}{2} f''(\xi(u)) u^2$ , 其中  $\xi(u)$  介于  $0, u$  之间, 而  $u = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ ,

故

$$\lim_{x \rightarrow 0} u = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - f(x)}{f'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-f'(x)}{f''(x)} = 0,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \xi(u) = 0,$$

故

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f(u)}{u f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} x f''(\xi(u)) u^2}{\frac{1}{2} u f''(\xi(x)) x^2} = \frac{f''(0)}{f''(0)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{f(x)}{f'(x)}}{x} = 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x f'(x)} = 1 - \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(\xi(x)) x}{f'(x)} \\ &= 1 - \frac{1}{2} f''(0) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f'(x)} = 1 - \frac{1}{2} f''(0) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f''(x)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**8.【详解】** 一般有如下结论:  $f(x)$  为定义在  $\mathbf{R}$  上一个连续的周期函数, 周期为  $p$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{p} \int_0^p f(t) dt.$$

事实上, 对  $\forall x > 0, \exists n$  及  $x' \in [0, p)$ , 使  $x = np + x'$ , 由周期函数积分性质有

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt &= \frac{1}{np + x'} \int_0^{np+x'} f(t) dt \\ &= \frac{1}{np + x'} \left[ \int_0^{np} f(t) dt + \int_{np}^{np+x'} f(t) dt \right] \\ &= \frac{n}{np + x'} \int_0^p f(t) dt + \frac{1}{np + x'} \int_0^{x'} f(t) dt. \end{aligned}$$

因

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{np + x'} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{p + \frac{x'}{n}} = \frac{1}{p},$$

$$\left| \frac{\int_0^{x'} f(t) dt}{np + x'} \right| \leq \frac{\int_0^{x'} |f(t)| dt}{np + x'} \leq \frac{\int_0^p |f(t)| dt}{np + x'} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

$$\begin{aligned} \text{所以} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{np + x'} \int_0^p f(t) dt + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{np + x'} \int_0^{x'} f(t) dt \\ &= \frac{1}{p} \int_0^p f(t) dt + 0 = \frac{1}{p} \int_0^p f(t) dt. \end{aligned}$$

由于  $|\sin t|$  的周期为  $\pi$  且连续, 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x |\sin t| dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\sin t| dt = \frac{2}{\pi}.$$

**9.【证明】** 因为  $f(x)g(x) = 1$ , 则

$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 0, \quad (1)$$

即

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{g'(x)}{g(x)}. \quad (2)$$

式①两边求导得

$$f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x) = 0,$$

$$f''(x) + 2 \frac{f'(x)g'(x)}{g(x)} + \frac{f(x)g''(x)}{g(x)} = 0,$$

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} + \frac{2f'(x)g'(x)}{f'(x)g(x)} + \frac{f(x)g''(x)}{f'(x)g(x)} = 0,$$

由①得

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} + \frac{2g'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g''(x)}{g'(x)f(x)} = 0,$$

则

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} + \frac{2g'(x)}{g(x)} = \frac{g''(x)}{g'(x)},$$

又由②得

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} - \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{g''(x)}{g'(x)} - \frac{g'(x)}{g(x)}.$$

**10.【证明】** 由于

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}},$$

两边对  $x$  求导有

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2 x}{dy^2} \cdot \frac{dy}{dx}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = -\frac{\frac{d^2 x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3},$$

故 
$$\frac{d^2 x}{dy^2} = -\left(\frac{dx}{dy}\right)^3 \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = -\left[\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right]^3 \frac{d^2 y}{dx^2},$$

又 
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\left(\frac{dy}{dx}\right)^3,$$

所以 
$$\frac{d^2 x}{dy^2} = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3} \left[-\left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right] = 1.$$

## 第三章 微分中值定理与导数的应用

### 习题精选三

#### 一、填空题

1.  $(-\infty, -1), (0, 1).$

【详解】 由已知得  $y' = 2x - \frac{2}{x} < 0$ .

当  $x < 0$  时, 解得上述不等式的解集为  $(-\infty, -1)$ ;

当  $x > 0$  时, 解得上述不等式的解集为  $(0, 1)$ .

所以函数  $y = x^2 - \ln x^2$  的单调减区间为  $(-\infty, -1)$  和  $(0, 1)$ .

2.  $a = 4, b = 5.$

【详解】  $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b,$

由题设知

$$f'(-1) = 3 - 2a + b = 0, \quad \text{①}$$

$$f(-1) = -1 + a - b = -2, \quad \text{②}$$

联立 ①, ② 解得  $a = 4, b = 5.$

3.  $-\frac{1}{\ln 2}.$

**【详解】** 由  $f'(x) = 2^x(1 + x \ln 2) = 0$ , 得驻点为  $x = -\frac{1}{\ln 2}$ , 而

$$f''(x) = 2^x[2 \ln 2 + x (\ln 2)^2], \quad f''\left(-\frac{1}{\ln 2}\right) > 0.$$

所以函数  $y = x \cdot 2^x$  在  $x = -\frac{1}{\ln 2}$  时取得极小值.

4.  $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}.$

**【详解】**  $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2x+1} = \frac{1}{2}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = -\frac{1}{4},$

所以斜渐近线方程为  $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}.$

5.  $y = \frac{x}{e}.$

**【解析】** 设过原点与曲线  $y = \ln x$  相切的切线的切点为  $(x_0, y_0)$ , 则切线的斜率为  $k = \frac{1}{x_0}$ , 故切线方程为

$$y - y_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0),$$

因为切线过原点, 则

$$-y_0 = \frac{1}{x_0}(-x_0),$$

解得  $y_0 = 1$ , 从而切点为  $(e, 1)$ , 而切线的斜率为  $k = \frac{1}{e}.$

所以该切线方程为  $y = \frac{x}{e}.$

## 二、选择题

1. (D)

**【详解】** 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}} = \infty$ , 所以  $x = 0$  为垂直渐近线;

又  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}} = 1$ , 所以  $y = 1$  为水平渐近线.

2. (A)

**【详解】** 由于  $f(x_0) > 0, f'(x_0) = 0$ , 故有

$$f''(x_0) - 2f'(x_0) + 4f(x_0) = f''(x_0) + 4f(x_0) = 0,$$

所以有  $f''(x_0) < 0$ , 即  $f(x)$  在  $x_0$  点处取得极大值.

3. (A)

**【详解】** 由  $f''(x) + f'(x)g(x) + f(x)x = e^x - 1, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 0$ , 解得  $f''(0) = 0.$

$f''(x) + f'(x)g(x) + f(x)x = e^x - 1$  两边对  $x$  求导有

$$f'''(x) + f''(x)g(x) + f'(x)g'(x) + f'(x)x + f(x) = e^x, \quad \textcircled{1}$$

从而有  $f'''(0) = 0$ , ① 两边对  $x$  求得

$f^{(4)}(x) + f'''(x)g(x) + f''(x)g'(x) + f'(x)g''(x) + f(x)g'''(x) + f''(x)x + 2f'(x) = e^x$ ,  
 可得  $f^{(4)}(0) = 1 > 0$ ,  $f(0) = 1$  为  $f(x)$  的极小值.

4. (A)

【详解】 令  $x - t = u$ , 则  $t = x - u$ , 故

$$F(x) = \int_0^x (x-u)f(u)du = x \int_0^x f(u)du - \int_0^x uf(u)du.$$

由于  $f'(x) > 0$ , 所以  $f(x)$  单调递增, 即对任意的  $x \in (0, +\infty)$ ,  $f(x) > f(0) = 0$ .

从而有  $F'(x) = \int_0^x f(u)du > 0$ , 所以  $F(x)$  在  $(0, +\infty)$  内单调递增;

$F''(x) = f(x) > 0$ ,  $F(x)$  在  $(0, +\infty)$  内是凹弧.

5. (D)

【详解】 对  $f'^2(x)$  与  $f^2(x)$  运用柯西中值定理可知, 至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\frac{f'^2(b) - f'^2(a)}{f^2(b) - f^2(a)} = \frac{2f'(\xi)f''(\xi)}{2f(\xi)f'(\xi)} = \frac{f''(\xi)}{f(\xi)},$$

要使  $f''(\xi) + f(\xi) = 0$ , 即  $\frac{f''(\xi)}{f(\xi)} = -1$ , 从而有

$$\frac{f'^2(b) - f'^2(a)}{f^2(b) - f^2(a)} = -1,$$

整理得到

$$f'^2(a) - f'^2(b) = f^2(b) - f^2(a).$$

### 三、解答题

1. 【证明】 因为  $f(x)$  不恒为常数且  $f(a) = f(b)$ , 故至少存在一点  $c \in (a, b)$ , 使得

$$f(c) \neq f(a) = f(b).$$

若  $f(c) > f(a)$ , 则在  $[a, c]$  上  $f(x)$  满足拉格朗日中值定理条件, 因此至少存在一点  $\xi \in (a, c) \subset (a, b)$ , 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} > 0.$$

若  $f(c) < f(a) = f(b)$ , 则在  $[c, b]$  上应用拉格朗日中值定理可知, 至少存在一点  $\xi \in (c, b) \subset (a, b)$ , 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c} > 0.$$

综上所述命题得证.

【评注】 本题也可用反证法进行证明, 即假设对  $\forall x \in (a, b)$ , 有  $f'(x) \leq 0$ , 于是  $f(x)$  单调不增, 因此有  $f(a) \geq f(x) \geq f(b)$ , 而  $f(a) = f(b)$ , 故有  $f(a) = f(x) = f(b)$ , 即  $f(x)$  为常数. 这与题设矛盾.

2. 【证明】 作辅助函数  $F(x) = f(x) - x$ .

由题设  $0 < f(x) < 1$ , 得  $F(0) = f(0) > 0$ , 而  $F(1) = f(1) - 1 < 0$ , 根据连续函数介值定理知在  $(0, 1)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使得  $F(\xi) = 0$ , 即  $f(\xi) - \xi = 0$ .

下面用反证法证唯一性.