

现代数学译丛

力学和物理学中的 变分不等方程

〔法〕G. 迪沃 J L 利翁斯 著

王耀东 译

科学出版社

1987

内 容 简 介

本书通过力学和物理学中大量的所谓单侧问题,得出各种类型的变分不等方程,并用直接方法建立解的存在性、唯一性。本书对所用的力学、物理学和泛函分析工具均作了相当完备的介绍。书中列举了大量尚未解决的问题。

读者对象为大学有关专业的学生、研究生、教师以及科学技术工作者。

G. Duvaut, J. L. Lions
LES INÉQUATIONS EN MÉCANIQUE ET EN PHYSIQUE
Dunod, 1972

现代数学译丛 力学和物理学中的变分不等方程

【法】G. 迪沃 J. L. 利翁斯 著

王耀东 译

责任编辑 吕 虹 张鸿林

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1987 年 4 月第 一 版	开本: 850 × 1168 1/32
1987 年 4 月第一次印刷	印张: 13 5/8
印数: 0001—4,730	字数: 348,000

统一书号: 13031 · 3478

本社书号: 4555 · 13—1

定价: 3.85 元

目 录

第一章 半渗透介质和温度控制问题	1
1. 连续介质力学的回顾	1
1.1 应力张量	1
1.2 守恒定律	2
1.3 应变张量	8
1.4 特性定律	11
2. 半渗透壁和温度控制问题	11
2.1 方程的建立	11
2.2 半渗透壁	14
2.3 温度控制	18
3. 温度控制和半渗透壁问题的变分提法	24
3.1 记号	24
3.2 变分不等方程	27
3.3 例. 和第 2 节中问题的等价性	27
3.4 若干补充	35
3.5 稳定情形	35
4. 若干泛函分析工具	38
4.1 Sobolev 空间	38
4.2 应用: 凸集 K	44
4.3 向量值函数空间	45
5. 第 3 节中发展变分不等方程的求解	47
5.1 问题的最终提法	47
5.2 主要结果的陈述	49
5.3 条件的验证	50
5.4 其它逼近方式	52
5.5 定理 5.1 (和 5.2) 中唯一性的证明	53
5.6 定理 5.1 和 5.2 的证明	53

6. 解的正性和可比较性	61
6.1 解的正性	61
6.2 解的比较 (I)	63
6.3 解的比较 (II)	65
7. 稳定问题	66
7.1 严格强制情形	66
7.2 用 $t \rightarrow \infty$ 时发展方程的解逼近稳定状态	69
7.3 非严格强制情形	71
8. 评述	79
第二章 热量控制问题	81
1. 热量控制	81
1.1 瞬时控制	81
1.2 延迟控制	83
2. 控制问题的变分提法	84
2.1 记号	84
2.2 变分不等方程	84
2.3 例	85
2.4 指南	89
3. 瞬时控制问题的求解	89
3.1 主要结果的陈述	89
3.2 定理 3.1 (和 3.2) 中唯一性的证明	91
3.3 定理 3.1 和 3.2 的证明	92
4. 薄壁瞬时控制问题解的一个性质	101
5. 关于延迟控制的特殊结果	103
5.1 一个结果的陈述	103
5.2 定理 5.1 中存在性的证明	104
5.3 定理 5.1 中唯一性的证明	108
6. 评述	109
第三章 弹性和粘弹性中的古典问题和摩擦问题	110
1. 引言	110
2. 古典线性弹性	110

2.1	特性定律	110
2.2	线性弹性的古典问题	112
2.3	发展问题的变分提法	115
3.	静态问题	117
3.1	古典提法	117
3.2	变分提法	117
3.3	Korn 不等式及其推论	119
3.4	结果	127
3.5	对偶提法	128
4.	动态问题	133
4.1	主要结果的陈述	133
4.2	定理 4.1 的证明	136
4.3	其它边条件	140
5.	带摩擦或单侧约束的线性弹性	144
5.1	摩擦的首批定律. 动态情形	144
5.2	Coulomb 定律. 静态情形	148
5.3	对偶变分提法	155
5.4	其它边条件和尚未解决的问题	159
5.5	动态情形	166
6.	线性粘-弹性. 短记忆材料	176
6.1	特性定律和推广	176
6.2	动态情形. 问题的提法	178
6.3	动态情形的存在性和唯一性定理	179
6.4	拟静态问题. 变分提法	182
6.5	Γ_U 有正测度情形的存在性和唯一性定理	183
6.6	$\Gamma_U = \emptyset$ 情形的研究	187
6.7	无摩擦问题中拟静态的验证	192
6.8	作为带粘性情形极限的无粘性情形	196
6.9	粘性问题的解释为抛物型组	199
7.	线性粘-弹性. 长记忆材料	200
7.1	特性定律和推广	200
7.2	带摩擦的动态问题	201

7.3	动态情形的存在性和唯一性定理	202
7.4	拟静态情形	207
7.5	在无摩擦情形 Laplace 变换的运用	212
7.6	作为带记忆情形极限的弹性情形	214
8.	评述	215
第四章	平板理论中的单侧现象	216
1.	引言	216
2.	板的一般理论	216
2.1	定义和记号	216
2.2	力的分析	217
2.3	线性化理论	220
3.	待考虑的问题	228
3.1	古典问题	228
3.2	单侧问题	229
4.	稳定单侧问题	230
4.1	记号	230
4.2	(稳定)问题	231
4.3	问题 4.1 的求解, 解存在的必要条件	234
4.4	问题 4.1 的求解, 充分条件	236
4.5	问题 4.1 和 4.3 中的唯一性问题	238
4.6	问题 4.1' 的求解	239
4.7	问题 4.2 的求解	240
5.	发展单侧问题	243
5.1	问题的提出	243
5.2	发展单侧问题的求解	245
6.	评述	247
第五章	塑性引论	249
1.	引言	249
2.	弹性完全塑性 (Prandtl-Reuss 定律) 和弹-粘-塑性情形	249
2.1	Prandtl-Reuss 特性定律	249
2.2	弹-粘-塑性特性定律	254

2.3 涉及的问题	257
3. 动态和拟静态弹-粘-塑性问题的研究	258
3.1 问题的变分提法	258
3.2 结果的陈述	261
3.3 定理中的唯一性的证明	262
3.4 动态情形存在性的证明	263
3.5 拟静态情形存在性的证明	266
4. 弹性-完全塑性问题的研究	267
4.1 问题的提出	267
4.2 结果的陈述	269
4.3 唯一性结果的证明	270
4.4 定理 4.1 和 4.2 的证明	271
4.5 定理 4.3 和 4.4 的证明	273
5. 刚-粘-塑性和刚性-完全塑性问题的研究	275
5.1 刚-粘-塑性问题	275
5.2 刚性-完全塑性问题	277
6. Hencky 定律。弹-塑性扭转问题	280
6.1 特性定律	280
6.2 待解决的问题	280
6.3 关于应力的变分提法	280
6.4 位移场的研究	281
6.5 满足 Von Mises 准则的各向同性材料	285
6.6 柱形杆的扭转	287
7. 闭锁材料 (Locking material)	292
7.1 特性定律	292
7.2 待考虑的问题	294
7.3 问题的二重变分提法	294
7.4 位移场解的存在性和唯一性	297
7.5 相关的应力场	297
8. 评述	297
第六章 Bingham 刚性粘-塑性流体	299
1. 引言和待考虑的问题	299

1.1	刚性粘-塑性流体的特性定律,不可压缩性	299
1.2	散逸函数	300
1.3	待考虑的问题和方程一览	302
2.	容器内部的流动.问题的变分不等方程形式的提法...	306
2.1	基本记号	306
2.2	变分不等方程	306
3.	刻画一个容器中的 Bingham 流体特征的变分不等方程的求解	309
3.1	泛函分析工具	309
3.2	变分不等方程的泛函提法	312
3.3	定理 3.2 的证明	314
3.4	定理 3.1 的证明	321
4.	二维情形的正则性定理	325
5.	作为 Bingham 流体极限的 Newton 流体	328
5.1	结果的陈述	328
5.2	定理 5.1 的证明	328
6.	稳定问题	333
6.1	结果的陈述	333
6.2	证明	335
7.	外部问题	336
7.1	问题在变分不等方程形式下的提法	336
7.2	结果	338
8.	在一柱形管中的层状流	340
8.1	方程的回顾	340
8.2	变分提法	340
8.3	解的性质	342
9.	带乘子的不等方程的解释	345
10.	评述	349
第七章	Maxwell 方程. 天线问题	350
1.	引言	350
2.	电磁定律	350

2.1	物理量	351
2.2	电荷守恒	351
2.3	Faraday 定律	353
2.4	摘要, Maxwell 方程	354
2.5	特性定律	354
3.	待考虑的物理问题	356
3.1	带超导边界的稳定介质	356
3.2	带超导边界的可极化介质	356
3.3	双极天线	357
3.4	裂缝天线, 电磁波被超导体的绕射	358
3.5	摘要, 问题的统一提法	359
4.	稳定介质的研究, 第一个存在唯一性定理	361
4.1	对于问题的“弱”提法的泛函分析工具	361
4.2	算子 $\mathcal{A}$ 问题的“弱”提法	365
4.3	弱解的存在唯一性	368
4.4	解对于介电常数和磁导率的连续依赖性	371
5.	稳定介质“强”解的存在性	376
5.1	$D(\mathcal{A})$ 中的强解	376
5.2	物理问题的解	377
6.	稳定介质, Sobolev 空间中的强解	380
6.1	嵌入定理	380
6.2	B 属于一个 Sobolev 空间	386
6.3	D 属于一个 Sobolev 空间	386
7.	裂缝天线, 非齐次问题	387
7.1	问题的提出	387
7.2	结果的陈述	387
7.3	定理 7.1 的证明	389
8.	可极化介质	390
8.1	和 Maxwell 算子相关的变分不等方程的存在唯一性结果	390
8.2	变分不等方程的解释, 可极化介质问题的求解	392
8.3	定理 8.1 的证明	393

9. 稳定介质作为可极化介质的极限	399
9.1 结果的陈述	399
9.2 定理 9.1 的证明	399
10. 各种补充	401
11. 评述	402
参考文献	404

第一章 半渗透介质和温度控制问题

1. 连续介质力学的回顾

我们不打算在这里叙述连续介质的完整理论,对这部分内容读者可参阅 P. Germain[1],[2], G. Mandel[1], W. Noll 和 C. Truesdell[1], Sedov[1] 等著作。

但是我们认为有必要回顾所需要的一些基本原理和结果,并规定一些记号。这些内容是应力张量、守恒定律、应变张量和特性定律。

1.1 应力张量

设有一占据 R^3 的一开区域 Ω 的连续介质, R^3 中有一标准正交系 $Ox_1x_2x_3$ 。该介质在外力的作用下处于平衡状态,外力一般由分布在 Ω 内的体积力和分布在 Ω 的边界上的表面力构成。

这些力在连续介质中产生一应力场,它可描述为:设 M 是 Ω 的一点,而 $\mathcal{V}$ 是过点 M 的一连续可微的二维流形,它至少在 M 的一邻域内把连续介质分成两个区域 Ω_1 和 Ω_2 。设 $\mathbf{n}$ 是 $\mathcal{V}$ 在点 M 指向 Ω_2 的单位法向量。在实际中一般很好满足的假设¹⁾下,人们建立了下列关系: Ω_2 对 Ω_1 的作用等价于 $\mathcal{V}$ 上的一个力密度 $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}$ 依赖于点 M 和法向量 $\mathbf{n}$, 满足

$$(1.1) \quad F_i = \sigma_{ij}n_j, \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3$$

其中系数 σ_{ij} 依赖于点 M 。

1) 这些假设相当于假定忽略一个可能的 $\mathcal{V}$ 上的力偶密度。取消这一简化假设,就导出所谓的定向介质理论,其中应力张量不再是对称的。关于这一课题,可参考: P. Casal[1], G. Duvaut[1],[2], A. E. Green 和 R. S. Rivlin[1], R. Hayart[1], R. D. Mindlin 和 H. F. Tiersten[1], A. C. Eringen 和 Suhubi[1], R. A. Toupin[1],[2]。

F_i 和 n_j 是向量 $\mathbf{F}$ 和 $\mathbf{n}$ 的分量。在方程 (1.1) 中, 我们利用了关于重复指标求和的约定 (除相反的声明本书将一直这样约定), 即 (1.1) 表示

$$F_i = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j$$

当在 $\mathbf{R}^3$ 中作基变换时, 量 F_i 和 n_j 作为向量的分量而变换。因此 σ_{ij} 是二阶张量的分量, 称之为应力张量。□

这个张量的引入允许提出边界条件。事实上, 设 Γ 是 Ω 的边界, 且它是光滑的, $\mathbf{n}$ 是 Γ 的单位外法线。若 $\mathbf{F}$ 是在 Γ 的点作用在 Ω 上的外力的面密度, 则在 Γ 的每一点我们有关系,

$$F_i = \sigma_{ij} n_j$$

因为外部介质起着 Ω_2 的作用。

1.2 守恒定律

连续介质的经典力学的公理或基本原理是质量、动量和能量守恒定律。

i) 质量守恒。设 $\mathbf{v}(M, t)$ 是在时间 t 相对于坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 运动的一连续介质的速度向量场。用 $\mathcal{S}$ 表示 $\mathbf{R}^3$ 中包含在连续介质占据的区域内的任一区域; 这个区域含有一定体积的物质, 即一定数目的质点; 我们把 $\mathcal{S}$ 看作 $\mathbf{R}^3$ 中一区域, 它在每一时刻包含这些质点, 此即蕴含 $\mathcal{S}$ 是一个变动区域, 它跟流体同时位移。质量守恒定律阐明: 在其运动中所观察的任一区域 $\mathcal{S}$ 中所包含的物质的质量不随时间改变。由此推出

$$(1.2) \quad \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{S}} \rho dx = 0, \quad \forall \mathcal{S}$$

其中:

$\rho = \rho(M, t)$ 是在点 M 于时刻 t 的密度, dx 是体积元 $dx_1 dx_2 dx_3$ 。

若速度场在 $\mathcal{S}$ 内连续, 则积分方程 (1.2) 等价于逐点方程

$$(1.3) \quad \partial \rho / \partial t + \text{Div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

其中 $\text{Div}(\rho \mathbf{v})$ 自然表示向量场 $\rho \mathbf{v}$ 的散度, 即

$$\partial(\rho v_i)/\partial x_i$$

ii) 动量守恒. 这个称之为动力学基本原理的守恒律可表述为: 存在一 (galileo) 坐标系和一时钟 t , 使得对所有物质系统和在每一时刻, 作用在系统上的外力的转矩等于动量的转矩对时间的导数.

取 i) 中引入的体积 $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}$ 中的物质组成一个系统, 对它我们能够应用上述的原理. 我们假设坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 和所考虑的时钟 t 是 galileo 的.

用化简到 O 的元素写出两个转矩的等式 (见本节末尾的注 1.1),

$$(1.4) \quad \int_{\mathcal{S}} f_i dx + \int_{\partial \mathcal{S}} \sigma_{ij} n_j dS = d/dt \int_{\mathcal{S}} \rho v_i dx, \quad \forall \mathcal{S}$$

$$(1.5) \quad \int_{\mathcal{S}} \varepsilon_{ijk} x_j f_k dx + \int_{\partial \mathcal{S}} \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl} n_l dS \\ = d/dt \int_{\mathcal{S}} \varepsilon_{ijk} x_j \rho v_k dx, \quad \forall \mathcal{S}$$

我们来说明记号和式中各项的意义.

分量为 $f_i (i = 1, 2, 3)$ 的向量 $\mathbf{f}$ 表示外力 (例如重力) 的体分布. 因而 $\int_{\mathcal{S}} f_i dx$ 是体积力的合力的第 i 个分量.

系统 $\mathcal{S}$ 在其边界 $\partial \mathcal{S}$ 上承受一个 (按照 1.1 节) 面密度为 $\sigma_{ij} n_i$ 的力. 因之 $\int_{\partial \mathcal{S}} \sigma_{ij} n_i dS$ 表示作用在系统 $\mathcal{S}$ 上的表面力的合力的第 j 个分量. $\partial \mathcal{S}$ 上的面积元记为 dS .

$d/dt \int_{\mathcal{S}} \rho v_i dx$ 表示动量的合向量对时间的导数的第 i 个分量.

ε_{ijk} 是三阶完全反对称 (对于正交规范基的协变) 张量的分量, 这里 $\varepsilon_{123} = +1$ (见本节末的注 1.2).

方程 (1.5) 的前两项是作用在 $\mathcal{S}$ 上的体积力和表面力对 O

的合力矩的第 i 个分量

(1.5) 的右端是对 O 的动量矩的第 i 个分量对时间的导数。

变换(1.4)中的面积分为体积分, 利用质量守恒律并假定积分号下的诸量充分正则, 可以看出, (1.4) 等价于

$$(1.6) \quad \sigma_{ij,j} + f_i = \rho \gamma_i, \quad i = 1, 2, 3$$

其中令

$$(1.7) \quad \gamma_i = \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j$$

$$(1.8) \quad X_{,i} = \partial X / \partial x_i$$

γ_i 是位于坐标为 (x_i) 的质点在时刻 t 的加速度的第 i 分量。注意, γ_i 的表达式和方程 (1.6) 包含一个关于速度分量的非线性项。

方程(1.6)称为运动方程。

如果我们考虑静力问题 ($\mathbf{v} \equiv 0$), 则方程 (1.6) 的右端恒等于零, 称之为平衡方程; 关于应力张量的分量 σ_{ij} , 方程是线性的。

变换曲面积为体积分并利用质量守恒定律和运动方程, 方程(1.5)可以简化为

$$(1.9) \quad \int_{\mathcal{V}} \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} dx = 0, \quad \forall \mathcal{V}$$

这等价于

$$\varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} = 0$$

即

$$(1.10) \quad \sigma_{kj} = \sigma_{jk}$$

因而应力张量是对称的。□

以下两个注实际是回顾转矩和分量为 ε_{ijk} 的张量。

注 1.1 设有

a) 自由向量 $\mathbf{R}$, 称为转矩的合向量,

b) 在每一点 P 定义的向量场 $\mathbf{M}(P)$:

$$(1.11) \quad \mathbf{M}(Q) = \mathbf{M}(P) + \mathbf{Q} \mathbf{P} \wedge \mathbf{R}$$

则 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{M}(P)$ 的集合称为转矩, $\mathbf{R}$ 称为转矩的合向量, $\mathbf{M}(P)$ 称

为转矩在 P 的合力矩。起点为 A 的两个向量 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{M}(A)$ 称为转矩的化简到 A 的元素。可见，一个转矩由化简到一个点的元素完全确定。□

注 1.2 上节定义的 ε_{ijk} 对于计算是方便的，这是由于它们满足下列关系

$$(1.12) \quad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr} = \text{Det} \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix}$$

$$(1.13) \quad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}$$

$$(1.14) \quad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pik} = 2\delta_{ip}$$

$$(1.15) \quad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$$

量 δ_{ip} 是 Krönecker 张量的分量，即

$$\delta_{ip} = 0, \quad i \neq p$$

$$\delta_{ip} = 1, \quad i = p$$

关系 (1.12) 利用 ε_{ijk} 的反对称性化到情形 $(i, j, k) = (p, q, r) = (1, 2, 3)$ 来证明。关系 (1.13), (1.14) 和 (1.15) 可由 (1.12) 出发逐步证明。

ε_{ijk} 出现在两个向量的向量积的第 i 个分量、向量场的旋量以及 3×3 矩阵的行列式的展开式中，实际上，容易验证

$$(1.16) \quad (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})_i = \varepsilon_{ijk}a_jb_k$$

其中 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 是分量分别为 (a_i) 和 (b_i) 的向量，而

$$(1.17) \quad (\text{Rot} \nabla)_i = \varepsilon_{ijk}\nabla_{kj}$$

其中 ∇ 是分量为 (∇_k) 的向量场。

又

$$(1.18) \quad \varepsilon_{ijk}\text{Det} M = \varepsilon_{pqr}M_{ip}M_{jq}M_{kr}$$

$$(1.19) \quad \text{Det} M = \frac{1}{6} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr}M_{ip}M_{jq}M_{kr}$$

其中 M 是元素为 (M_{ij}) 的 3×3 矩阵。

当 M 是一正向 (即 $\text{Det} M = +1$) 正交规范基的变换矩阵时，

(1.18) 说明 ϵ_{ijk} 是对这样的基变换的三阶张量的元素。

最后在 $\text{Det} M \neq 0$ 时, 设 M^{-1} 是矩阵 M 的逆矩阵, M^{-1} 的元素给定为

$$(1.20) \quad (M^{-1})_{ij} = (2\text{Det} M)^{-1} \epsilon_{ipq} \epsilon_{irs} M_{pr} M_{qs}$$

由这几种关系易得经典公式:

$$\text{Det}(A \cdot B) = (\text{Det} A) \cdot (\text{Det} B)$$

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

$$\text{Rot Rot} \mathbf{v} = \text{grad div} \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v}, \text{ 等等. } \square$$

iii) 能量守恒。这定律亦称为热力学第一定律。它是说, 一个系统的总能量(内能+动能)对时间的导数等于外部作用力的功率加单位时间流入系统的能量。

把上述定律应用到前面引入的物质系统, 我们有

$$(1.21) \quad \begin{aligned} d/dt \int_{\mathcal{S}} \rho \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + e \right) dx &= \int_{\mathcal{S}} f_i v_i dx + \int_{\partial \mathcal{S}} \sigma_{ij} n_j v_i dS \\ &+ \int_{\mathcal{S}} \rho w dx - \int_{\partial \mathcal{S}} q_i n_i dS \end{aligned}$$

e 表示连续介质的内能密度, 因此 $\int_{\mathcal{S}} \rho \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + e \right) dx$ 表示所考虑系统的总能量。

$\int_{\mathcal{S}} f_i v_i dx$ 和 $\int_{\partial \mathcal{S}} \sigma_{ij} n_j v_i dS$ 分别为体积力和表面力的功率。

w 表示单位质量和单位时间内流入的能量, 因而 $\int_{\mathcal{S}} \rho w dx$ 表示单位时间内流入系统 $\mathcal{S}$ 的能量。

分量为 q_i 的向量 $\mathbf{q}$ 是能量的转移向量, 而 $-\int_{\partial \mathcal{S}} q_i n_i dS$ 表示单位时间内从表面流入的能量。

利用方程 (1.3), (1.6), (1.10) 并把面积分变为体积分, 可以化简方程 (1.21)。我们有

$$(1.22) \quad \int_{\mathcal{S}} \rho (dc/dt) dx = \int_{\mathcal{S}} \sigma_{ij} v_{i,j} dx + \int_{\mathcal{S}} (\rho w - q_{i,i}) dx$$

引进分量为

$$(1.23) \quad D_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i})$$

的应变速度张量。

方程 (1.22) 既对任意 $\mathcal{S}$ 都成立, 它便等价于方程

$$(1.24) \quad \rho de/dt = \sigma_{ij} D_{ij} + \rho w - q_{i,i} \quad \square$$

摘要 诸守恒律为我们提供了三个方程或方程组

1) 连续性方程

$$(1.25) \quad \partial \rho / \partial t + \text{Div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

2) 运动方程

$$(1.26) \quad \rho \mathbf{v}_i = \sigma_{ij,j} + f_i$$

3) 能量方程

$$(1.27) \quad \rho de/dt = \sigma_{ij} D_{ij} + \rho w - q_{i,i}$$

分量为 σ_{ij} 的应力张量是对称的。 $\square$

注 1.3 从守恒律出发, 在连续性假设下, 我们导出了逐点方程 (1.25), (1.26), (1.27)。反之, 若在介质内部存在一速度或应力张量分量的不连续的线, 则人们证明了 (P. Germain[2]) 在这条线上, 偏微分方程 (1.25) — (1.27) 应当用不连续性关系代替。

只要把有关的导数按分布意义解释, 这些不连续性条件就可以被包含在关系 (1.25) — (1.27) 之中。 $\square$

注 1.4 方程 (1.25) — (1.27) 总共包含五个标量方程, 未知函数是十四个:

i) 应力张量(对称的)的六个分量 σ_{ij} ;

ii) 速度的三个分量;

iii) 密度 ρ , 内能 e , 能转移向量的分量 q_i 。

比较了这些数目, 从简单的数学观点看, 显然不能由这五个方程确定十四个未知函数!

另外, 从物理观点看, 必须注意, 所表述的守恒律应普遍适用于所有连续介质, 液体、固体或气体。如果由这些定律得到的方程 (1.25) — (1.27) 足以确定这些参量, 这意味着在所指出的条件之下, 不同的连续介质将有相同的特性。这当然是荒谬的。