现代数学译丛

力学和物理学中的变分不等方程

〔法〕G. 迪沃　J L 利翁斯 著

王耀东 译

科学出版社

1987

内 容 简 介

本书通过力学和物理学中大量的所谓单侧问题，得出各种类型的变分不等方程，并用直接方法建立解的存在性、唯一性. 本书对所用的力学、物理学和泛函分析工具均作了相当完备的介绍. 书中列举了大量尚未解决的问题.

读者对象为大学有关专业的学生、研究生、教师以及科学技术工作者.

G. Duvaut, J L. Lions
LES INÉQUATIONS EN MÉCANIQUE ET EN PHYSIQUE
Dunod, 1972

现代数学译丛
力学和物理学中的变分不等方程
[法] G 迪沃 J. L. 利翁斯 著
王耀东 译
责任编辑 吕 虹 张鸿林
科学出版社 出版
北京朝阳门内大街 137 号
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1987 年 4 月第 一 版 开本：850×1168 1/32
1987 年 4 月第一次印刷 印张：13 5/8
印数：0001—4,750 字数：348,000
统一书号：13031・3478
本社书号：4555・13—1
定价：3.85 元

目　　录

第一章 半渗透介质和温度控制问题

1. 连续介质力学的回顾

我们不打算在这里叙述连续介质的完整理论，对这部分内容读者可参阅 P. Germain[1],[2], G. Mandel[1], W. Noll 和 C. Truesdell[1], Sedov[1] 等著作.

但是我们认为有必要回顾所需要的一些基本原理和结果，并规定一些记号. 这些内容是应力张量、守恒定律、应变张量和特性定律.

1.1 应力张量

设有一占据 $\mathbf{R}^3$ 的一开区域 Ω 的连续介质，$\mathbf{R}^3$ 中有一标准正交系 $Ox_1x_2x_3$. 该介质在外力的作用下处于平衡状态，外力一般由分布在 Ω 内的体积力和分布在 Ω 的边界上的表面力构成.

这些力在连续介质中产生一应力场，它可描述为：设 M 是 Ω 的一点，而 $\mathscr{S}$ 是过点 M 的一连续可微的二维流形，它至少在 M 的一邻域内把连续介质分成两个区域 Ω_1 和 Ω_2. 设 $\mathbf{n}$ 是 $\mathscr{S}$ 在点 M 指向 Ω_2 的单位法向量. 在实际中一般很好满足的假设[1]下，人们建立了下列关系：Ω_2 对 Ω_1 的作用等价于 $\mathscr{S}$ 上的一个力密度 $\mathbf{F}$，$\mathbf{F}$ 依赖于点 M 和法向量 $\mathbf{n}$，满足

(1.1) $$F_i = \sigma_{ij}n_j, \quad i = 1,2,3; \; j = 1,2,3$$

其中系数 σ_{ij} 依赖于点 M.

1) 这些假设相当于假定忽略一个可能的 $\mathscr{S}$ 上的力偶密度. 取消这一简化假设，就导出所谓的定向介质理论，其中应力张量不再是对称的. 关于这一课题，可参考：P. Casal[1], G. Duvaut[1],[2], A. E. Green 和 R. S. Rivlin[1]. R. Hayart[1], R. D. Mindlin 和 H. F. Tiersten[1], A. C. Eringen 和 Suhubi[1], R. A. Toupin[1],[2].

F_i 和 n_j 是向量 $\mathbf{F}$ 和 $\mathbf{n}$ 的分量. 在方程(1.1)中,我们利用了关于重复指标求和的约定(除相反的声明本书将一直这样约定),即(1.1)表示

$$F_i = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} n_j$$

当在 $\mathbf{R}^3$ 中作基变换时, 量 F_i 和 n_j 作为向量的分量而变换. 因此 σ_{ij} 是二阶张量的分量,称之为应力张量. □

这个张量的引入允许提出边界条件. 事实上, 设 Γ 是 Ω 的边界, 且它是光滑的, $\mathbf{n}$ 是 Γ 的单位外法线. 若 $\mathbf{F}$ 是在 Γ 的点作用在 Ω 上的外力的面密度,则在 Γ 的每一点我们有关系,

$$F_i = \sigma_{ij} n_j$$

因为外部介质起着 Ω_2 的作用.

1.2 守恒定律

连续介质的经典力学的公理或基本原理是质量、动量和能量守恒定律.

i) 质量守恒. 设 $\mathbf{v}(M, t)$ 是在时间 t 相对于坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 运动的一连续介质的速度向量场. 用 $\mathscr{S}$ 表示 $\mathbf{R}^3$ 中包含在连续介质占据的区域内的任一区域;这个区域含有一定体积的物质,即一定数目的质点;我们把 $\mathscr{S}$ 看作 $\mathbf{R}^3$ 中一区域, 它在每一时刻包含这些质点, 此即蕴含 $\mathscr{S}$ 是一个变动区域,它跟流体同时位移. 质量守恒定律阐明: 在其运动中所观察的任一区域 $\mathscr{S}$ 中所包含的物质的质量不随时间改变. 由此推出

$$d/dt \iiint_{\mathscr{S}} \rho dx = 0, \ \forall \mathscr{S} \tag{1.2}$$

其中:

$\rho = \rho(M, t)$ 是在点 M 于时刻 t 的密度, dx 是体积元 $dx_1dx_2dx_3$.

若速度场在 $\mathscr{S}$ 内连续,则积分方程(1.2)等价于逐点方程

$$\partial\rho/\partial t + \mathrm{Div}(\rho\mathbf{v}) = 0 \tag{1.3}$$

其中 Div($\rho\mathbf{v}$) 自然表示向量场 $\rho\mathbf{v}$ 的散度，即

$$\partial(\rho v_i)/\partial x_i$$

ii) 动量守恒． 这个称之为动力学基本原理的守恒律可表述为：存在一（galileo）坐标系和一时钟 t，使得对所有物质系统和在每一时刻，作用在系统上的外力的转矩等于动量的转矩对时间的导数．

取 i) 中引入的体积 $\mathscr{S}$，$\mathscr{S}$ 中的物质组成一个系统，对它我们能够应用上述的原理． 我们假设坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 和所考虑的时钟 t 是 galileo 的．

用化简到 O 的元素写出两个转矩的等式（见本节末尾的注 1.1），

$$\int_{\mathscr{S}} f_i dx + \int_{\partial\mathscr{S}} \sigma_{ij} n_j dS = d/dt \int_{\mathscr{S}} \rho v_i dx, \quad \forall\mathscr{S} \tag{1.4}$$

$$\int_{\mathscr{S}} \varepsilon_{ijk} x_j f_k dx + \int_{\partial\mathscr{S}} \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl} n_l dS = d/dt \int_{\mathscr{S}} \varepsilon_{ijk} x_j \rho v_k dx, \quad \forall\mathscr{S} \tag{1.5}$$

我们来说明记号和式中各项的意义．

分量为 $f_i(i=1,2,3)$ 的向量 $\mathbf{f}$ 表示外力（例如重力）的体分布．因而 $\int_{\mathscr{S}} f_i dx$ 是体积力的合力的第 i 个分量．

系统 $\mathscr{S}$ 在其边界 $\partial\mathscr{S}$ 上承受一个（按照 1.1 节）面密度为 $\sigma_{il}n_l$ 的力．因之 $\int_{\partial\mathscr{S}} \sigma_{il} n_l dS$ 表示作用在系统 $\mathscr{S}$ 上的表面力的合力的第 i 个分量．$\partial\mathscr{S}$ 上的面积元记为 dS．

$d/dt \int_{\mathscr{S}} \rho v_i dx$ 表示动量的合向量对时间的导数的第 i 个分量．

ε_{ijk} 是三阶完全反对称（对于正交规范基的协变）张量的分量，这里 $\varepsilon_{123}=+1$（见本节末的注 1.2）．

方程 (1.5) 的前两项是作用在 $\mathscr{S}$ 上的体积力和表面力对 O

的合力矩的第 i 个分量

(1.5) 的右端是对 O 的动量矩的第 i 个分量对时间的导数.

变换(1.4)中的面积分为体积分，利用质量守恒律并假定积分号下的诸量充分正则,可以看出,(1.4)等价于

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho\gamma_i, \quad i = 1,2,3 \tag{1.6}$$

其中令

$$\gamma_i = \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j \tag{1.7}$$

$$X_{,j} = \partial X / \partial x_j \tag{1.8}$$

γ_i 是位于坐标为 (x_i) 的质点在时刻 t 的加速度的第 i 分量. 注意， γ_i 的表达式和方程 (1.6) 包含一个关于速度分量的非线性项.

方程(1.6)称为运动方程.

若我们考虑静力问题 ($\mathbf{v} \equiv 0$)， 则方程 (1.6) 的右端恒等于零，称之为平衡方程;关于应力张量的分量 σ_{ij}，方程是线性的.

变换曲面积分为体积分并利用质量守恒定律和运动方程，方程(1.5)可以简化为

$$\int_{\mathscr{S}} \varepsilon_{ijk}\sigma_{kj} dx = 0, \ \forall \mathscr{S} \tag{1.9}$$

这等价于

$$\varepsilon_{ijk}\sigma_{kj} = 0$$

即

$$\sigma_{kj} = \sigma_{jk} \tag{1.10}$$

因而应力张量是对称的. □

以下两个注实际是回顾转矩和分量为 ε_{ijk} 的张量.

注 1.1 设有

a) 自由向量 $\mathbf{R}$，称为转矩的合向量，

b) 在每一点 P 定义的向量场 $\mathbf{M}(P)$:

$$\mathbf{M}(Q) = \mathbf{M}(P) + \mathbf{QP} \wedge \mathbf{R} \tag{1.11}$$

则 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{M}(P)$ 的集合称为转矩，$\mathbf{R}$ 称为转矩的合向量，$\mathbf{M}(P)$ 称

为转矩在P的合力矩．起点为A的两个向量$\mathbf{R}$和$\mathbf{M}(A)$称为转矩的化简到A的元素．可见，一个转矩由化简到一个点的元素完全确定．□

注 1.2 上节定义的ε_{ijk}对于计算是方便的，这是由于它们满足下列关系

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr}=\mathrm{Det}\begin{vmatrix}\delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir}\\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr}\\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr}\end{vmatrix} \tag{1.12}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqk}=\delta_{ip}\delta_{jq}-\delta_{iq}\delta_{jp} \tag{1.13}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pjk}=2\delta_{ip} \tag{1.14}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}=6 \tag{1.15}$$

量δ_{ip}是 Krönecker 张量的分量，即

$$\delta_{ip}=0,\quad i\neq p$$
$$\delta_{ip}=1,\quad i=p$$

关系(1.12)利用ε_{ijk}的反对称性化到情形$(i,j,k)=(p,q,r)=(1,2,3)$来证明．关系(1.13)，(1.14)和(1.15)可由(1.12)出发逐步证明．

ε_{ijk}出现在两个向量的向量积的第i个分量、向量场的旋量以及3×3矩阵的行列式的展开式中，实际上，容易验证

$$(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})_i=\varepsilon_{ijk}a_jb_k \tag{1.16}$$

其中$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$是分量分别为(a_i)和(b_i)的向量，而

$$(\mathrm{Rot}\mathbf{v})_i=\varepsilon_{ijk}v_{k,j} \tag{1.17}$$

其中$\mathbf{v}$是分量为(v_k)的向量场．

又

$$\varepsilon_{ijk}\mathrm{Det}M=\varepsilon_{pqr}M_{ip}M_{jq}M_{kr} \tag{1.18}$$

$$\mathrm{Det}M=\frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr}M_{ip}M_{jq}M_{kr} \tag{1.19}$$

其中M是元素为(M_{ij})的3×3矩阵．

当M是一正向(即$\mathrm{Det}M=+1$)正交规范基的变换矩阵时，

(1.18) 说明 ε_{ijk} 是对这样的基变换的三阶张量的元素.

最后在 $\mathrm{Det}M \neq 0$ 时，设 M^{-1} 是矩阵 M 的逆矩阵，M^{-1} 的元素给定为

(1.20) $$(M^{-1})_{ij} = (2\mathrm{Det}M)^{-1}\varepsilon_{jpq}\varepsilon_{irs}M_{pr}M_{qs}$$

由这几种关系易得经典公式:

$$\mathrm{Det}(A \cdot B) = (\mathrm{Det}A) \cdot (\mathrm{Det}B)$$

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

$\mathrm{Rot}\ \mathrm{Rot}\mathbf{v} = \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\mathbf{v} - \Delta\mathbf{v}$，等等. □

iii) 能量守恒. 这定律亦称为热力学第一定律. 它是说，一个系统的总能量(内能＋动能)对时间的导数等于外部作用力的功率加单位时间流入系统的能量.

把上述定律应用到前面引入的物质系统，我们有

(1.21) $$d/dt\int_{\mathscr{S}}\rho\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + e\right)dx = \int_{\mathscr{S}} f_i v_i dx + \int_{\partial\mathscr{S}}\sigma_{ij}n_j v_i dS + \int_{\mathscr{S}}\rho w dx - \int_{\partial\mathscr{S}} q_i n_i dS$$

e 表示连续介质的内能密度，因此 $\int_{\mathscr{S}}\rho\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + e\right)dx$ 表示所考虑系统的总能量.

$\int_{\mathscr{S}} f_i v_i dx$ 和 $\int_{\partial\mathscr{S}}\sigma_{ij}n_j v_i dS$ 分别为体积力和表面力的功率.

w 表示单位质量和单位时间内流入的能量，因而 $\int_{\mathscr{S}}\rho w dx$ 表示单位时间内流入系统 $\mathscr{S}$ 的能量.

分量为 q_i 的向量 $\mathbf{q}$ 是能量的转移向量，而 $-\int_{\partial\mathscr{S}} q_i - n_i dS$ 表示单位时间内从表面流入的能量.

利用方程 (1.3), (1.6), (1.10) 并把面积分变为体积分，可以化简方程 (1.21). 我们有

(1.22) $$\int_{\mathscr{S}}\rho(de/dt)dx = \int_{\mathscr{S}}\sigma_{ij}v_{i,j}dx + \int_{\mathscr{S}}(\rho w - q_{i,i})dx$$

引进分量为

(1.23) $$D_{ij}=\frac{1}{2}(v_{i,j}+v_{j,i})$$

的应变速度张量。

方程 (1.22) 既对任意 $\mathscr{S}$ 都成立，它便等价于方程

(1.24) $$\rho de/dt=\sigma_{ij}D_{ij}+\rho w-q_{i,i}\quad\square$$

摘要　诸守恒律为我们提供了三个方程或方程组

1）连续性方程

(1.25) $$\partial\rho/\partial t+\mathrm{Div}(\rho\mathbf{v})=0$$

2）运动方程

(1.26) $$\rho\gamma_i=\sigma_{ij,j}+f_i$$

3）能量方程

(1.27) $$\rho de/dt=\sigma_{ij}D_{ij}+\rho w-q_{i,i}$$

分量为 σ_{ij} 的应力张量是对称的。□

注 1.3　从守恒律出发，在连续性假设下，我们导出了逐点方程(1.25)，(1.26)，(1.27)。反之，若在介质内部存在一速度或应力张量分量的不连续的线，则人们证明了（P. Germain[2]）在这条线上，偏微分方程(1.25)—(1.27)应当用不连续性关系代替。

只要把有关的导数按分布意义解释，这些不连续性条件就可以被包含在关系 (1.25)—(1.27) 之中。□

注 1.4　方程 (1.25)—(1.27) 总共包含五个标量方程，未知函数是十四个：

i）应力张量（对称的）的六个分量 σ_{ij}；

ii）速度的三个分量；

iii）密度 ρ，内能 e，能转移向量的分量 q_i。

比较了这些数目，从简单的数学观点看，显然不能由这五个方程确定十四个未知函数！

另外，从物理观点看，必须注意，所表述的守恒律应普遍适用于所有连续介质，液体、固体或气体。如果由这些定律得到的方程 (1.25)—(1.27) 足以确定这些参量，这意味着在所指出的条件之下，不同的连续介质将有相同的特性。这当然是荒谬的。