变分学与力学的变分原理

刘友生著

上海师院物理系

变分学 目录

第二章 逗留曲线场

第一节 基本概念

(一) S长度与S距离

(二) 从一光滑曲线(作为斜截线)产生的逗留曲线族

(1) 逗留曲线族的产生

(2) 关于逗留曲线族的包络线定理

(三) 从一点(作为中心)产生的中心逗留曲线族

(1) 逗留曲线族的产生

(2) 关于中心逗留曲线族的包络线定理

(3) 共轭点

(4) 雅可比条件

(四) 曲线场的概念

(1) 固有场

(2) 中心场

第二节 逗留曲线场

(一) 从一光滑曲线(作为斜截线)产生的逗留曲线固有场

(二) 从一点(作为中心)产生的逗留曲线中心场

第三节 斜截线场

第四节 泛函曲线族的特点

(一) 同一斜截线上的点到固定斜截线Γ(或固定点A)

的S距离相等

(二) 同一斜截线上的点到另一斜截线上的S距离相等。反之，对某一斜截线等S距离之点的轨迹为一斜截线。

(三) 泛函微分

(四) 泛函积分——希尔伯特不变积分

(五) 维尔斯特拉斯函数及其意义

第三章 固定端点变分问题之极小值与最小值条件

第一节 泛函的增量与变分 (端点固定)

(一) 泛函的增量与变分

(二) 泛函在一点的变分

第二节 泛函极小值的必要条件

(一) 泛函弱极小的必要条件

1) 勒让德条件

(2) 雅可比条件

3) 泛函弱极小的必要条件总结

(二) 泛函强极小的必要条件

第二篇 依赖于多个变数之泛函变分学

第一章 变分方法

第一节 基本概念

(一) n+1维空间中的点与曲线

(二) n+1维空间曲线的泛函

第二节 固定端点的变分问题（尤拉方程）

(一) 泛函的增量与变分

(二) 尤拉方程与逗留曲线

(三) 泛函在一点的变分

第三节 可变端点的变分问题（斜截方程）

(一) 泛函的变分

(二) 可变端点的变分问题

第二章 逗留曲线族

第一节 逗留曲线族

(一) 中心逗留曲线族与逗留曲线中心场

(二) 从一光滑曲面（作为斜截面）产生的逗留曲线族与逗留曲线固有场

(三) S长度与S距离

绪论

变分学是古老的数学分支之一，它主要研究泛函的极值问题，是泛函分析的重要组成部分。变分学始于17世纪末期，尤拉做了奠基性的工作。它的发展是与物理及工程问题的研究紧密相连的。著名的最速降线问题就是在1696年由伯努利提出的力学极值问题（这个问题经常作为例题来解答）。

泛函的定义——设$\{y(x)\}$为某一类函数集合，另有一变量S，对于该函数集合中之任一函数$y(x)$，变量S有一确定数值$S[y(x)]$与之对应，则称变量S为依赖于函数$y(x)$的泛函，记作$S=S[y(x)]$。它的定义域为函数集合$\{y(x)\}$。

每一函数$y(x)$代表一根曲线γ，故泛函又可记作$S=S(\gamma)$，定义域为曲线的集合$\{\gamma\}$。如果变量S是依赖于n个函数$y_1(x)$，$y_2(x)$，……$y_n(x)$的泛函，则记作$S=S[y_1(x),\cdots,y_n(x)]$，其定义域为$n$个函数的集合$\{y_1(x)\},\cdots,\{y_n(x)\}$。函数组$y_1(x)\cdots y_n(x)$代表$n+1$维$(x,y_1,\cdots,y_n)$空间中的一根曲线$\gamma$，故泛函又可记作$S=S(\gamma)$，定义域为$n+1$维空间的曲线集合$\{\gamma\}$。

泛函的"自变量"不是数，而是函数或曲线，因此泛函可理解为"函数的函数"或"曲线的函数"。通常的n元函数$W=W(y_1,\cdots,y_n)$

的自变量是n个数 $y_1,\cdots,y_n$，这一组数代表n维空间中的一个点，故通常的函数可理解为"点的函数"，它的定义域是n维空间中的一个区域。泛函 $S=S[y_1(x),\cdots,y_n(x)]$ 与通常的复合函数 $W=W(y_1(x),\cdots,y_n(x))$ 在符号表示法上相似，在意义上却完全不同。复合函数中的 $y_1=y_1(x),\cdots,y_n=y_n(x)$ 是确定的n个自变量为x的函数，它们本身是不改变的。它们作为桥梁，使变量W成为自变量x的函数，是"点的函数"。而泛函中的n个函数是"自变量"，它们本身是可改变的函数。泛函也并非x的函数，而是"函数的函数"或"曲线的函数"。

对于泛函的定义域如无特别的说明，则由泛函的表达式决定，即使其表达式有意义的一切函数的集合（或称可取函数类）为该泛函的定义域。例如：$y=y(x)$ 为经过 $A(x_0,y_0)$ 及 $B(x_1,y_1)$ 两点的曲线方程，以 $y'(x)$ 表示 $y=y(x)$ 的导函数，$L=L(x,y(x),y'(x))$ 为给定的复合函数，对函数L进行积分：

$$S=\int_{x_0}^{x_1} L(x,y(x),y'(x))\,dx,\quad y(x_0)=y_0,\quad y(x_1)=y_1$$

S对于通过A、B两点的不同的曲线（即不同的函数 $y=y(x)$）取不同的数值，因此S是 $y=y(x)$ 的泛函 $S=S[y(x)]$。

它的定义域是一切通过A、B两点的曲线并使上面积分有意义的一切函数的集合 $\{y(x)\}$。

通过A、B两点 $y(x)$ 有有限个第一类间断点的函数 $y=y(x)$，亦能使积分有意义即为可取函数。至于不通过A，B两点之曲线方程 $y=y(x)$ 以及处处不可导的函数，不是可取函数。

本课程是变分学的初步，只讲授基础知识，所涉及到的泛函为下列两种：

依赖于一个函数的泛函

$$S[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1} L(x,y(x),\dot{y}(x))\,dx$$

依赖于n个函数的泛函

$$S[y_1(x),y_2(x),\cdots y_n(x)]=\int_{x_0}^{x_1} L(x,y_1(x),\cdots,y_n(x),\dot{y}_1(x),\cdots,\dot{y}_n(x))\,dx$$

以上积分号下的函数L（应用于物理上时，称为拉格朗日函数）总被假设为具有二阶连续的偏导数。本课程讲授变分学的目的，主要是为学习力学的变分原理（分析力学）服务。

第一篇 依赖于一个函数之泛函变分学

第一章 变分方法

第一节 基本概念

(一) 泛函定义域中曲线间之n级距离

在数学分析里，讨论函数的变化时，总要提到自变量的增量，也就是两点间的距离。泛函的"自变量"是函数，讨论泛函的变化时，就涉及到函数的增量，也就是两个属于定义域中的曲线的距离概念。距离概念应体现两根曲线接近的程度，这不仅是两个函数的差值问题，而且与两根曲线形状差异有关，即涉及到各阶导函数的差异，因此作如下的定义：

定义一 具有n阶连续导数的两曲线 $y(x)$ 及 $y_1(x)$，它们在区间 $(a\le x\le b)$ 上的n级距离，就是下列各式在区间 $(a\le x\le b)$ 上的最大值：

$$|y(x)-y_1(x)|$$

$$|y'(x)-y_1'(x)|$$

$$\cdots\cdots$$

$$|y^{(n)}(x)-y_1^{(n)}(x)|$$

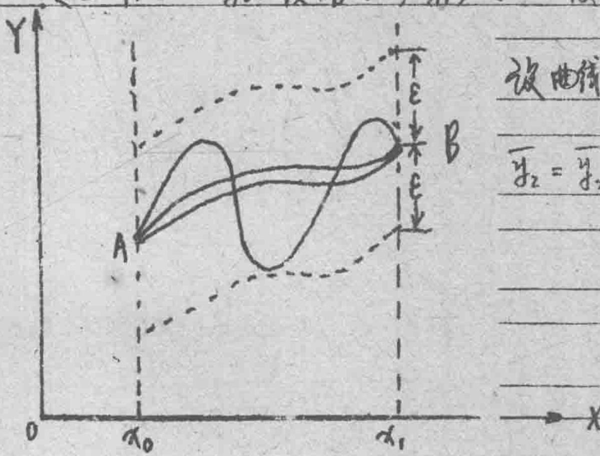
$y(x)$ 与 $y_1(x)$ 的一级距离用 $r(y_1,y)$ 表示

(二) 定义域中一曲线的邻域——所有与曲线

$$y = y(x) \qquad a \leqq x \leqq b$$

的 n 级距离小于 ε 的曲线 $\bar{y} = \bar{y}(x)$ 的全体称为曲线 $y = y(x)$ 在闭区间 $a \leqq x \leqq b$ 内的 n 级 ε 邻域（$y = y(x)$ 的零级 ε 邻域即由所有位于 $y = y(x)$ 上下宽为 2ε 的带形区域内的曲线集合）

例：已知泛函 $S = S[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y(x), y'(x))\,dx$ 的定义域为通过两定点 $A(x_0, y_0)$ 及 $B(x_1, y_1)$ 之一切使积分有意义的曲线集合 $\{y(x)\}$。



设曲线 1 为 $y = y(x)$，曲线 2 为 $\bar{y}_1 = \bar{y}_1(x)$，曲线 3 为 $\bar{y}_2 = \bar{y}_2(x)$（如图示），且满足以下关系式：

$|\bar{y}_1(x) - y(x)|$ 的最大值 $< \varepsilon$

$|\bar{y}_1'(x) - y'(x)|$ 的最大值 $< \varepsilon$

$|\bar{y}_2(x) - y(x)|$ 的最大值 $< \varepsilon$

$|\bar{y}_2'(x) - y'(x)|$ 的最大值 $> \varepsilon$

由上式知 $\bar{y}_1 = \bar{y}_1(x)$ 属于 $y = y(x)$ 的一级 ε 邻域，$\bar{y}_2 = \bar{y}_2(x)$ 属于 $y = y(x)$ 的零级 ε 邻域，但不属于一级 ε 邻域。

(三) 泛函的最小值与最大值

设曲线集合 $\{y(x)\}$ 为泛函 S 的定义域，如果有一曲线 $y = y(x) \in \{y(x)\}$，对于任一 $\bar{y} = \bar{y}(x) \in \{y(x)\}$ 有 $S[\bar{y}(x)] - S[y(x)] \geqq 0$

则称泛函 $J=J[y(x)]$ 在 $y=y(x)$ 上达到广义最小值（如果没有等号则为狭义最小值）。如果

$$J[\bar{y}(x)]-J[y(x)]\leqq 0$$

则称泛函在 $y=y(x)$ 上达到广义最大值（如果没有等号则为狭义最大值）。

（四）泛函的强极值

如果有一曲线 $y=y(x)\in\{y(x)\}$，对于任一 $\bar{y}(x)\in\{y(x)\}$，且属于 $y=y(x)$ 的零级 ε 邻域的曲线，有

$$J[\bar{y}(x)]-J[y(x)]\geqq 0$$

则称泛函在 $y=y(x)$ 上达到强极小值（如果没有等号则为狭义强极小）

如果

$$J[\bar{y}(x)]-J[y(x)]\leqq 0$$

则称泛函在 $y=y(x)$ 上达到强极大值（如果没有等号则为狭义强极大值）。

（五）泛函的弱极值

如果有一曲线 $y=y(x)\in\{y(x)\}$，对于任一 $\bar{y}(x)\in\{y(x)\}$，且属于 $y=y(x)$ 的一级 ε 邻域，有

$$J[\bar{y}(x)]-J[y(x)]\geqq 0$$

则称泛函在 $y=y(x)$ 上达到弱极小值（没有等号则为狭义弱极小值）

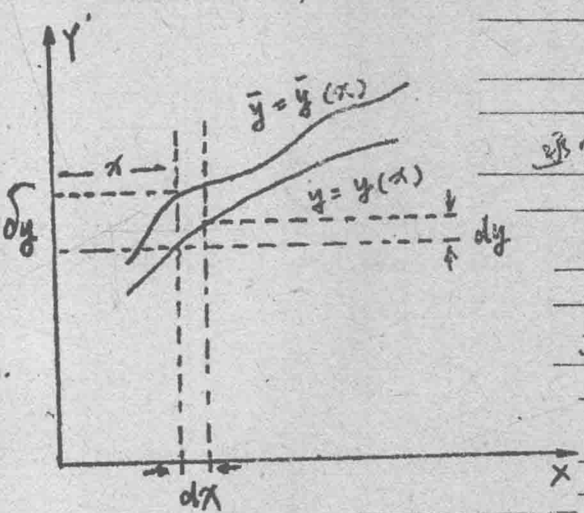
如果：

$$S[\bar{y}(x)] - S[y(x)] \leq 0$$

则称泛函在 $y=y(x)$ 上达到弱极大值（若有等号则为非严格弱极大值）。

以后只讨论泛函的最小值、强极小、弱极小（只要对最小值、强极小、弱极小的条件作相应的改变即得到关于最大值、强极大、弱极大的结论）。

（六）泛函定义域中函数的变分



设 $\bar{y}=\bar{y}(x)$ 与 $y=y(x)$ 是同属于泛函定义域的两个函数，则函数 $\delta y(x)=\bar{y}(x)-y(x)$ 称为函数 $y=y(x)$ 的变分，在 x 处之大小如图示，它是在 x 处由于函数形式的改变而产生的增量。而函数在 x 处的微分 $dy=y'(x)dx$ 为由于自变量 x 的改变而产生的函数 $y=y(x)$ 的增量（实际为函数增量 $\Delta y=dy+o(dx)$ 的线性主部）。而函数导函数的变分为

$$\delta y'(x) = \bar{y}'(x) - y'(x) = \frac{d}{dx}[\bar{y}(x) - y(x)] = \frac{d}{dx}(\delta y)$$

则 $\delta\left(\frac{d}{dx}y\right) = \frac{d}{dx}(\delta y)$ 或 $\delta(dy) = d(\delta y)$

以上结果表明对于函数微分运算与变分运算可交换。

在一般情况，泛函 $J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1} L(x, y(x), y'(x))\,dx$ 所依赖的曲线之端点 A (x_0, y_0) 与 B (x_1, y_1) 是固定的。如果我们研究泛函在某一曲线 $y=y(x)$ 上的性质，自然要考虑到与该曲线十分邻近之可取曲线，这一族曲线可用参数 α 来表示，即

$$y=y(x,\alpha)$$

并设 $y=y(x,0)=y(x)$ 为二阶可导的函数，函数 $y=y(x)$ 的变分也可定义为

$$\delta y=\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0}\alpha$$

它的导函数的变分为

$$\delta y'=\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial x}\right]\Big|_{\alpha=0}\alpha$$

$$=\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial \alpha}\right]_{\alpha=0}\alpha$$

$$=\frac{d}{dx}\delta y$$

可变端点 A 的坐标为：

$$x_0=x_0(\alpha), \qquad y_0=y(x_0(\alpha),\alpha)$$

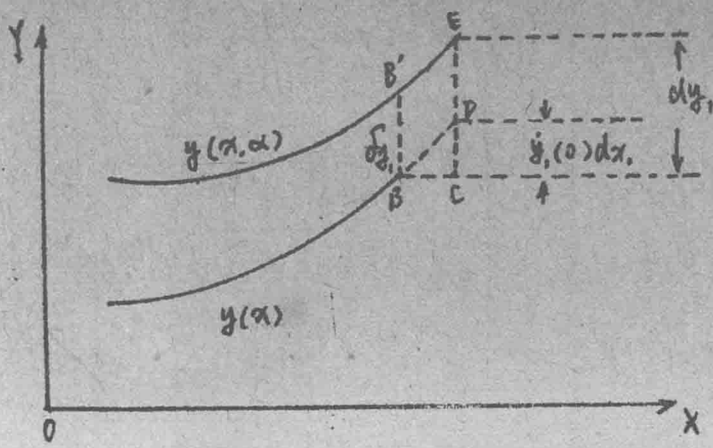
可变端点 B 的坐标为：

$$x_1=x_1(\alpha), \qquad y_1=y(x_1(\alpha),\alpha)$$

当 $\alpha=0$ 端点即 $y=y(x)$ 的端点：

$$A\ (x_0(0),\ y(x_0(0),0)=y_0(0))$$

$$B\ (x_1(0),\ y(x_1(0),0)=y_1(0))$$



在 $y=y(x)$ 之端点 $B\,(x_1(0),\ y_1(0))$

处之坐标的微分分别为：

$$dx_1=\frac{dx_1(\alpha)}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0}\alpha$$

$$dy_1=\left[\frac{d}{d\alpha}y(x_1(\alpha),\alpha)\right]_{\alpha=0}\alpha=\left[\frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{dx_1}{d\alpha}\right]_{\alpha=0}\alpha+\left[\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right]_{\alpha=0}\alpha$$

式中的 $\left[\frac{\partial y}{\partial x_1}(x_1(\alpha),\alpha)\right]_{\alpha=0}=\frac{\partial y}{\partial x_1}(x_1(0),0)=\dot{y}_1(0)$

为 $y=y(x)$ 在端点 B 处的导数

则 $\left[\frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{dx_1}{d\alpha}\right]_{\alpha=0}\alpha=\dot{y}_1(0)dx_1$

以无限邻近于 $y=y(x)$ 的曲线 $y=y(x,\alpha)$ 作比较，设后者的端点的 y 坐标比前者大，增大部分中的由于 x 坐标的增量 dx_1 而产生的增量部分 $\dot{y}_1(0)dx_1$ （在图中 $\overline{BC}=dx_1$，$\overline{DC}=\dot{y}_1(0)dx_1$）

dy_1 表式中的

$$\left[\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right]_{\alpha=0}\alpha=\frac{\partial y(x_1(\alpha),\alpha)}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0}\alpha=\delta y_1$$

为在 $y=y(x)$ 的端点 B 上，在同一 x_1 坐标下，曲线 $y=y(x,\alpha)$ 的 y 坐标比 $y=y(x)$ 的 y 坐标的增量，即 $y=y(x)$ 在端点 B 的变分 δy_1 （在图中为 $\overline{BB'}=\delta y_1$）

因此 dy_1 的表式为

$$dy_1 = \dot{y}_1(0)\, dx_1 + \delta y_1 \qquad \cdots\cdots \quad (1)$$

同理在 $y = y(x)$ 的A端，有

$$dy_0 = \dot{y}_0(0)\, dx_0 + \delta y_0 \qquad \cdots\cdots \quad (2)$$

有了以上一些结果，就可以在一般的情况下来定义泛函的变分（一阶的）并求得它的表达式。

（七）泛函的变分

根据上面的结果，在曲线端点可变的一般情况下泛函可表为参数 α 的通常的函数：

$$S = S(\alpha) = \int_{x_0(\alpha)}^{x_1(\alpha)} L\left(x, y(x,\alpha), y_x(x,\alpha)\right) dx$$

现定义泛函 S 在曲线 $y = y(x)$ 上的变分为

$$\delta S[y(x)] = \left(\frac{dS}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} d\alpha$$

它的表达式可应用含参变数之积分的莱布尼兹公式求得：

$$\delta S = \left(\frac{dS}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} \alpha$$

$$= L\left(x_1(0), y(x_1(0),0), y_x(x_1(0),0)\right) \frac{dx_1}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0} \alpha \; -$$

$$L\left(x_0(0), y(x_0(0),0)\; y_x(x_0(0),0)\right) \frac{dx_0}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0} \alpha \; +$$

$$\int_{x_0(0)}^{x_1(0)} \left(\frac{\partial L}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} \alpha \, dx$$