

大專・高中新數學叢書 ⑦

新課程

線形計劃與OR

阪大教授・理博 竹之內脩 原著
嚴水謨 編譯



晨光出版社

編輯大意

時常聽到高中生抱怨「不知道到底為什麼要學習數學。」

實際上，一切科學的基礎都與數學有關係，要學習科學必須具備相當的數學能力，因此才引起這學生對學習數學的疑問。

無論從那一方面來講，現在的數學在自然科學方面廣為應用。因此，在我們日常生活中所發生的種種社會問題，利用數學理論來加以解決的習慣尚未建立。

所謂 OR (Operation Research) 這一門學問，是把社會上所發生的種種問題利用數學理論來加以解決或以解決為目標。

但，雖稱為 OR 並不是新的課程，而是利用高中所學過的數學，自己來解決社會上發生的問題，這是學習 OR 的目的。

本書，線形計劃的問題是利用高中所學的不等式與一次式來加以解說，又在庫的問題即使用機率・統計的方法來解說。

內容方面，各個項目依

解說→例題→擴展問題→習題

並進，從基礎到應用，以使能完全理解為目標。

讀完本書，身傍種種事情能利用數學而加以分析亦是一件賞心悅目之事。

原 著 者

前言

在編輯大意裡已提到過，本書對於不擅長於數學者亦能充分了解，精於數學者更能漸漸培養出深厚的興趣來。本書為具有此種特色之參考書，因此本書有下列各項之特點。

■ 小項目主義

各分門別類儘可能採用小項目。使該學習之處一目瞭然，本書之說明一面符合教科書，同時

愈來愈廣，愈來愈深，也愈來愈容易了解。

說明終了，附有「精粹」一欄，為重要公式之總彙集，學習重點均列記於此，使讀者更能倍增學習之效率。

■ 例題→擴展問題→習題

說明若能了解，再由例題，擴展問題，習題三者

反覆學習，不知不覺地實力就會增強。

此精巧微妙之處，實為本書最大之特長。由例題→擴展問題的順序，內容逐漸加深，但在「解法」「要點」欄裏對於問題的思考方法及解答要領均有指示，希望讀者對此兩種問題，能反覆演練，務其達於近乎記憶之程度。總之，數學的學習是

一步一步地累積上去的。

因此，特別推薦此種反覆學習的方法。若例題，擴展問題兩者已充分了解，則對於「習題」將能駕輕就熟。反之，若對「習題」感到困難，則表示前面的學習並未全盤了解。

■ 練習問題

分為A、B兩階段。A部分相當於例題，擴展問題的程度，B部分包含有較深的問題。大學聯考對於此種程度的問題出題率最高，故此為有志於投考大學諸君不可或缺的問題集。

雖有人常說，學習數學不能靠記憶，但這是沒有將問題的思考方法同時記憶所致。本書不是僅僅介紹記憶的方法，而是針對「數學原來是這樣去思考的」給予讀者適當的指導，然後推薦應用廣泛的記憶方法。深信擁有本書之讀者諸君，必能真正地理解數學，同時增強數學的應用實力。

目次

編輯大意	1
前言	2
重要名詞一覽表	5
1. 不等式與領域	6
不等式的基本性質，一元一次不等式，解不等式，聯立一元一次不等式，二元一次不等式，聯立二元一次不等式，領域，凸領域，頂點，聯立二元一次不等式的領域	
2. 含有參數之直線方程式	10
$y=ax+b$ 的圖形，斜率，截距，直線的平行移動， $ax+by=c$ 的圖形，含參數之直線，一次式 $ax+by$ 之值	
3. 領域內一次式之最大・最小	14
一次式的最大・最小，限制條件，目的函數，領域內之點的一次式之值，一次式的值為最大・最小之點	
4. 線形計劃	18
線形計劃法，解法 1，解法 2，解法 3，解法 4	
5. 單體法	22
單體法，斯拉克變數，單體表。	
▶ 練習問題 (1 ~ 8)	29
6. 利用線形計劃法解決問題	31
實際的問題，LP 化之順序，最大值問題，最小值問題，應用問題，特殊的問題	
▶ 練習問題 (9 ~ 14)	42
7. 資料的整理	44
度數分布表，柱狀圖形，平均，標準偏差	
8. 正規分布	48
對於連續變量之機率的定義，機率密度函數，平均與標準偏差	

4 目 次

	正規分布，正規曲線，正規分布的平均與標準偏差， $N(m, \sigma^2)$ ，正規分布的性質	
9.	需要量的分布	52
	需要的變動，偶然變動，週期變動，傾向變動，需要量的分布 ， k 日間的總需要量的分布	
10.	在庫量的決定	56
	在庫的意義，在庫量的決定，在庫殘餘及其機率	
	▶練習問題 (15~22)	59
11.	訂購量的決定方法	61
	在庫管理方法，安全在庫量，訂購點方式及定期訂購方式，訂 購點，訂購量，訂購週期，週轉期間，求最適當訂購量之公式 ，求訂購週期的公式	
12.	期望值與機率	68
	機率，機率分布，期望值，大數法則，相對度數分布表與機 率分布	
	▶練習問題 (23~30)	74
13.	報紙販賣員的問題	77
	報紙販賣員的問題，依利益與損失之最適當進貨量之求法，由 於缺貨而損失之情形，變數為連續量之情形	
	▶練習問題 (31~33)	80
14.	模型實驗	81
	偶然變動之系列及其取法，作偶然變動，亂數表的查法	
15.	需要，庫存變動的模型	86
	型態(Simulation)，蒙地卡羅(Monte Carlo)法，需要的模型	
	▶練習問題 (34~39)	90
	習題解答	92
	練習問題解答	99
	數 表	123

重要名詞一覽表

安全在庫量	61	正規分布的性質	49
一次式的值	11	限制條件	14
一次式的最大・最小	14	截距	10
$N(m, \sigma^2)$	49	線形計劃	18
LP	18	相對度數分布表與機率分布	69
LP 化	31	大數的法則	69
機率	68	週轉期間	62
機率分布	68	頂點	7
機率密度函數	48	直線的平行移動	10
期望值	68	定期訂購方式	62
偶然變動	52	度數分布表	44
傾向變動	52	凸領域	7
在庫	56	訂購週期	62
在庫殘餘	56	求訂購週期的公式	62
在庫量的決定	56	訂購點	61
擬態 (Simulation)	86	訂購點方式	61
週期變動	52	訂購量	61
需要的變動	52	參數 (Parameter)	11
需要的模型	86	統計圖表 (柱狀圖形)	44
需要預測期間	67	標準偏差	44, 48
需要量的分布	52	不等式的基本性質	6
單體表	22	解不等式	6
單體法	22	平均	44, 48
報紙販賣員的問題	77	目的函數	14
統計 (Statistics) 公式	44	蒙地卡羅 (Monte Carlo) 法	86
斯拉克變數	22	運送問題	40
正規曲綫	49	亂數表	82
正規分布	49	領域	7

編輯大意

時常聽到高中生抱怨「不知道到底為什麼要學習數學。」

實際上，一切科學的基礎都與數學有關係，要學習科學必須具備相當的數學能力，因此才引起這學生對學習數學的疑問。

無論從那一方面來講，現在的數學在自然科學方面廣為應用。因此，在我們日常生活中所發生的種種社會問題，利用數學理論來加以解決的習慣尚未建立。

所謂 OR (Operation Research) 這一門學問，是把社會上所發生的種種問題利用數學理論來加以解決或以解決為目標。

但，雖稱為 OR 並不是新的課程，而是利用高中所學過的數學，自己來解決社會上發生的問題，這是學習 OR 的目的。

本書，線形計劃的問題是利用高中所學的不等式與一次式來加以解說，又在庫的問題即使用機率・統計的方法來解說。

內容方面，各個項目依

解說→例題→擴展問題→習題

並進，從基礎到應用，以使能完全理解為目標。

讀完本書，身傍種種事情能利用數學而加以分析亦是一件賞心悅目之事。

原 著 者

前言

在編輯大意裡已提到過，本書對於不擅長於數學者亦能充分了解，精於數學者更能漸漸培養出深厚的興趣來。本書為具有此種特色之參考書，因此本書有下列各項之特點。

■ 小項目主義

各分門別類儘可能採用小項目。使該學習之處一目瞭然，本書之說明一面符合教科書，同時

愈來愈廣，愈來愈深，也愈來愈容易了解。

說明終了，附有「精粹」一欄，為重要公式之總彙集，學習重點均列記於此，使讀者更能倍增學習之效率。

■ 例題→擴展問題→習題

說明若能了解，再由例題，擴展問題，習題三者

反覆學習，不知不覺地實力就會增強。

此精巧微妙之處，實為本書最大之特長。由例題→擴展問題的順序，內容逐漸加深，但在「解法」「要點」欄裏對於問題的思考方法及解答要領均有指示，希望讀者對此兩種問題，能反覆演練，務其達於近乎記憶之程度。總之，數學的學習是

一步一步地累積上去的。

因此，特別推薦此種反覆學習的方法。若例題，擴展問題兩者已充分了解，則對於「習題」將能駕輕就熟。反之，若對「習題」感到困難，則表示前面的學習並未全盤了解。

■ 練習問題

分為A、B兩階段。A部分相當於例題，擴展問題的程度，B部分包含有較深的問題。大學聯考對於此種程度的問題出題率最高，故此為有志於投考大學諸君不可或缺的問題集。

雖有人常說，學習數學不能靠記憶，但這是沒有將問題的思考方法同時記憶所致。本書不是僅僅介紹記憶的方法，而是針對「數學原來是這樣去思考的」給予讀者適當的指導，然後推薦應用廣泛的記憶方法。深信擁有本書之讀者諸君，必能真正地理解數學，同時增強數學的應用實力。

目次

編輯大意	1
前言	2
重要名詞一覽表	5
1. 不等式與領域	6
不等式的基本性質，一元一次不等式，解不等式，聯立一元一次不等式，二元一次不等式，聯立二元一次不等式，領域，凸領域，頂點，聯立二元一次不等式的領域	
2. 含有參數之直線方程式	10
$y=ax+b$ 的圖形，斜率，截距，直線的平行移動， $ax+by=c$ 的圖形，含參數之直線，一次式 $ax+by$ 之值	
3. 領域內一次式之最大・最小	14
一次式的最大・最小，限制條件，目的函數，領域內之點的一次式之值，一次式的值為最大・最小之點	
4. 線形計劃	18
線形計劃法，解法 1，解法 2，解法 3，解法 4	
5. 單體法	22
單體法，斯拉克變數，單體表。	
▶ 練習問題 (1 ~ 8)	29
6. 利用線形計劃法解決問題	31
實際的問題，LP 化之順序，最大值問題，最小值問題，應用問題，特殊的問題	
▶ 練習問題 (9 ~ 14)	42
7. 資料的整理	44
度數分布表，柱狀圖形，平均，標準偏差	
8. 正規分布	48
對於連續變量之機率的定義，機率密度函數，平均與標準偏差	

4 目 次

	正規分布，正規曲線，正規分布的平均與標準偏差， $N(m, \sigma^2)$ ，正規分布的性質	
9.	需要量的分布	52
	需要的變動，偶然變動，週期變動，傾向變動，需要量的分布 ， k 日間的總需要量的分布	
10.	在庫量的決定	56
	在庫的意義，在庫量的決定，在庫殘餘及其機率	
	▶練習問題 (15~22)	59
11.	訂購量的決定方法	61
	在庫管理方法，安全在庫量，訂購點方式及定期訂購方式，訂 購點，訂購量，訂購週期，週轉期間，求最適當訂購量之公式 ，求訂購週期的公式	
12.	期望值與機率	68
	機率，機率分布，期望值，大數法則，相對度數分布表與機 率分布	
	▶練習問題 (23~30)	74
13.	報紙販賣員的問題	77
	報紙販賣員的問題，依利益與損失之最適當進貨量之求法，由 於缺貨而損失之情形，變數為連續量之情形	
	▶練習問題 (31~33)	80
14.	模型實驗	81
	偶然變動之系列及其取法，作偶然變動，亂數表的查法	
15.	需要，庫存變動的模型	86
	型態(Simulation)，蒙地卡羅(Monte Carlo)法，需要的模型	
	▶練習問題 (34~39)	90
	習題解答	92
	練習問題解答	99
	數 表	123

重要名詞一覽表

安全在庫量	61	正規分布的性質	49
一次式的值	11	限制條件	14
一次式的最大・最小	14	截距	10
$N(m, \sigma^2)$	49	線形計劃	18
LP	18	相對度數分布表與機率分布	69
LP 化	31	大數的法則	69
機率	68	週轉期間	62
機率分布	68	頂點	7
機率密度函數	48	直線的平行移動	10
期望值	68	定期訂購方式	62
偶然變動	52	度數分布表	44
傾向變動	52	凸領域	7
在庫	56	訂購週期	62
在庫殘餘	56	求訂購週期的公式	62
在庫量的決定	56	訂購點	61
擬態 (Simulation)	86	訂購點方式	61
週期變動	52	訂購量	61
需要的變動	52	參數 (Parameter)	11
需要的模型	86	統計圖表 (柱狀圖形)	44
需要預測期間	67	標準偏差	44, 48
需要量的分布	52	不等式的基本性質	6
單體表	22	解不等式	6
單體法	22	平均	44, 48
報紙販賣員的問題	77	目的函數	14
統計 (Statistics) 公式	44	蒙地卡羅 (Monte Carlo) 法	86
斯拉克變數	22	運送問題	40
正規曲線	49	亂數表	82
正規分布	49	領域	7

1. 不等式與領域

不等式的基本性質

不等式的式子變形，可利用下列的基本性質。

[不等式的基本性質]

(1) 對任意數 C ，

$$A > B \iff A + C > B + C$$

(2) 對於 $C > 0$ ，

$$A > B \iff AC > BC, \frac{A}{C} > \frac{B}{C}$$

(3) 對於 $C < 0$ ，

$$A > B \iff AC < BC, \frac{A}{C} < \frac{B}{C}$$

一元一次不等式 $ax \leq b$ 之解集合為，

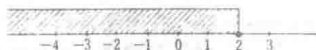
$$a > 0 \text{ 時 } \{x | x \leq \frac{b}{a}\}$$

$$a < 0 \text{ 時 } \{x | x \geq \frac{b}{a}\}$$

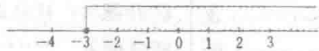
解不等式

求不等式之解集合，稱為解不等式。

例 ① $3x \leq 6$ 之解集合 $\{x | x \leq 2\}$



② $-2x \leq 6$ 之解集合 $\{x | x \geq -3\}$



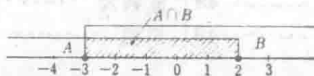
聯立一元一次不等式

聯立一元一次不等式 $\begin{cases} a_1x < b_1 \dots\dots\dots ① \\ a_2x < b_2 \dots\dots\dots ② \end{cases}$

之解集合為，①式之解集合 A 與②式之解集合 B 之交集 $A \cap B$ 。

聯立不等式 $\begin{cases} 3x \leq 6 \\ -2x \leq 6 \end{cases}$

之解集合可以下圖斜綫部份表示之。



二元一次不等式

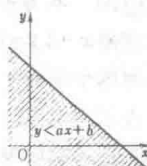
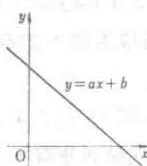
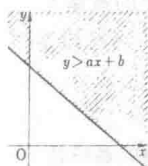
$ax+by < c$ (但 a, b 均不等於 0) 之形式表示之不等式, 稱為變數 x, y 之二元一次不等式。

$ax+by < c$ 之解集合為在座標平面上直線 $ax+by = c$ 所分割之半平面之中一側之點的集合。特別是,

$y > ax+b$ 之解集合……直線 $y=ax+b$ 上方部份

$y = ax+b$ 之解集合……直線 $y=ax+b$ 上

$y < ax+b$ 之解集合……直線 $y=ax+b$ 下方部份



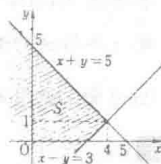
聯立二元一次不等式

$$\text{二元一次不等式 } \begin{cases} a_1x + b_1x \leq c_1 & \dots\dots\dots ① \\ a_2x + b_2x \leq c_2 & \dots\dots\dots ② \end{cases}$$

之解集合是①式之解集合 A 與②式之解集合 B 之交集 $A \cap B$

$$\text{例 } \begin{cases} x+y \leq 5 \\ x-y \leq 3 \end{cases}$$

之解集合 S 是右圖之斜綫部分。



座標平面上圖示之不等式之解集合稱為領域。屬於領域之任意兩點連結綫上之點全部屬於這領域時此領域稱為凸領域。又由幾條綫段及半直綫所圍成的領域, 成為周邊之兩直綫的交點 (角的點) 稱為頂點。

立二元一

等式之領域

聯立二元一次不等式所表示的領域, 由幾條綫段所圍成的凸領域。但, 亦有如右圖所示一方開放的領域。



例題 1. 下列的聯立不等式所表示的領域，試證其為凸領域。

$$(1) \begin{cases} x+3y \geq 7 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 3x-2y \leq 10 \cdots \cdots \textcircled{2} \\ x+2y \leq 14 \cdots \cdots \textcircled{3} \\ 4x-y \geq 2 \cdots \cdots \textcircled{4} \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 3x+2y \geq 8 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ x+3y \geq 5 \cdots \cdots \textcircled{2} \\ x \geq 0 \cdots \cdots \textcircled{3} \\ y \geq 0 \cdots \cdots \textcircled{4} \end{cases}$$

解法 (1) 不等式①： $x+3y \geq 7$ 所滿足的領域，是以直線 $x+3y=7$ 為境界線，如右圖所示不含原點之一側的半平面。

表示之境界的直線的方程式 $x+3y=7$ 是將不等式①之不等號以等號代替而求得。又斜綫的領域是直線 $x+3y=7$ 之上以外之 1 點，例如將原點 $(0, 0)$ 之座標代入不等式①則

$$0+3 \times 0 \geq 7 \quad 0 \geq 7$$

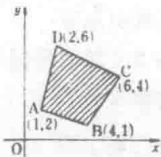
原點的座標能否滿足不等式①一目了然。因此不等式①的領域是以直線 $x+3y=7$ 為境界線，不含原點之一側的半平面。

不等式②，③，④之領域，同理亦可求得。

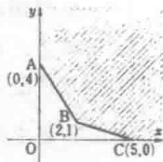
聯立不等式的領域，可由其各個領域之交集求得。

(2) 可與(1)的思考方法一樣求得其領域。

解答 (1)



(2)



由(1)，(2)圖可知其領域均為凸領域。

擴展問題

試說明聯立二元一次不等式之領域不能成為凹多角形。

要點

聯立不等式之領域為凸領域這是一般常見的形狀。聯立二元一次不等式的領域為凹多角形時常導致矛盾。

解答 利用背理法加以說明。

今領域為右圖所示之凹多角形 $ABCDE$ 。

線段 DE 是境界線，故直線 DE 是聯立不等式之中一不等式之境界線。

這不等式以 $ax+by \leq c$ 表示之。

凹多角形被直線 DE 分割，故 $\triangle AEE'$ ，四角形 $E'BCD$ 之中各取一點 $P(x, y)$, $Q(x_2, y_2)$ ，一次式 $ax+by$ 代入其座標，點 P, Q 不在直線 $DE: ax+by=c$ 之上，且關於直線 DE ，另一側有 P, Q 點，

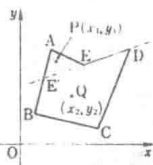
$$(1) \begin{cases} ax_1+by_1 > c \\ ax_2+by_2 < c \end{cases} \quad \text{或} \quad (2) \begin{cases} ax_1+by_1 < c \\ ax_2+by_2 > c \end{cases}$$

之哪一方成立呢？今，

(1) 成立的話點 P 的座標不能滿足不等式 $ax+by \leq c$ 。

(2) 成立的話點 Q 的座標不能滿足不等式 $ax+by \leq c$ 。

因此領域內的點全部是這不等式之解集合相矛盾。因此聯立二元一次不等式的領域不能為凹多角形。



習題 (解答在第92頁)

1. 圖示下列聯立不等式的領域。

$$(1) \begin{cases} 5x-y \geq 4 \\ -3x+5y \geq 2 \\ x+2y \leq 14 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} -x+3y \leq 9 \\ 4x+3y \leq 24 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

2. 求 1. 之聯立不等式領域之頂點的座標。

2. 含有參數(Parameter)之直線方程式

 $y=ax+b$ 之

圖形

斜率，截

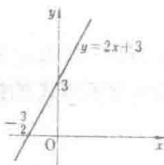
二元一次方程式 $y=ax+b$ 之圖形是直線。直線 $y=ax+b$ 依 a 之大小而決定方向，依 b 而決定位置斜率， b 為截距（ y 軸上的截距）直線 $y=ax+b$ 為 $a > 0$ 時，右上升之直線 $a < 0$ 時，右下降之直線直線的平行
移動又隨著 b 值的增加直線 $y=ax+b$ 向 y 軸正的方向平行移動，隨著 b 值減少，向 y 軸負的方向平行移動例 直線 (1) $y=2x+3$

(2) $y=-\frac{1}{3}x+1$

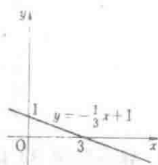


之圖形，各如下圖。

(1)



(2)

 $ax+by=c$

之圖形

二元一次方程式 $ax+by=c$ 之圖形是直線。(a) $a \neq 0, b \neq 0$ 時

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$$

斜率為 $-\frac{a}{b}$ 截距為 $\frac{c}{b}$ b) $a \neq 0, b = 0$ 時

$$x = \frac{c}{a}$$

與 y 軸平行， x 座標是 $\frac{c}{a}$ 的直線。

(c) $a=0, b \neq 0$ 時

$$y = \frac{c}{b}$$

與 x 軸平行， y 座標是 $\frac{c}{b}$ 的直線含參數之直線

$ax+by=k$ ($a \neq 0, b \neq 0, k$ 是參數)

加以整理得

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{k}{b}$$

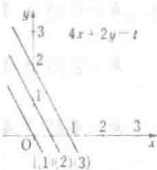
圖形是斜率 $-\frac{a}{b}$ 截距 $\frac{k}{b}$ 之直線。這直線之圖形，依參數 k 值之變化，而沿著 y 軸上下平行移動。

例 $4x+2y=t$ ， t 之值為

(1) $t=0$

(2) $t=2$

(3) $t=4$ 時之圖形如右圖。



一次式
 $ax+by$
之值

一次式 $ax+by$ 之值

$x=x_1, y=y_1$ 時之一次式的值為

$$ax_1+by_1$$

一次式的值為 k 時， x, y 之值是直線 $ax+by=k$ 上之點的座

標。

例 (1) $x=2, y=3$ 之一次式 $4x+3y$ 之值為

$$4 \times 2 + 3 \times 3 = 17$$

(2) 一次式 $4x+3y$ 之值為 12 解

集合是直線 $4x+3y=12$ 上點的座標的集合。

