

数理化自学丛书

7

平面几何

第 二 册

几何学

PDG

重 印 说 明

《数理化自学丛书》是一九六六年前出版的。计有《代数》四册，《平面几何》二册，《三角》一册，《立体几何》一册，《平面解析几何》一册；《物理》四册；《化学》四册。这套书的特点是：比较明白易懂，从讲清基本概念出发，循序渐进，使读者易于接受和理解，并附有不少习题供练习用。这套书可以作为青年工人、知识青年和在职干部自学之用，也可供中等学校青年教师教学参考，出版以后，很受读者欢迎。但是在“四人帮”及其余党控制上海出版工作期间，这套书横被扣上所谓引导青年走白专道路的罪名，不准出版。

英明领袖华主席和党中央一举粉碎了祸国殃民的“四人帮”。我国社会主义革命和社会主义建设进入新的发展时期。党的第十一次全国代表大会号召全党、全军、全国各族人民高举毛主席的伟大旗帜，在英明领袖华主席和党中央领导下，为完成党的十一大提出的各项战斗任务，为在本世纪内把我国建设成为伟大的社会主义的现代化强国，争取对人类作出较大的贡献，努力奋斗。许多工农群众和干部，在党的十一大精神鼓舞下，决心紧跟英明领袖华主席和党中央，抓纲治国，大干快上，向科学技术现代化进军，为实现四个现代化作出贡献，他们来信要求重印《数理化自学丛书》。根据读者的要求，我们现在在原书基础上作一些必要的修改后，重新出版这套书，以应需要。

十多年来，科学技术的发展是很快的。本丛书介绍的虽仅是数理化方面的基础知识，但对于应予反映的科技新成就方面内容，是显得不够的。同时，由于本书是按读者自学的要求编写的，篇幅上就不免有些庞大，有些部分也显得有些烦琐。这些，要请读者在阅读时加以注意。

对本书的缺点，希望广大读者批评指出，以便修订时参考。

一九七八年一月

目 录

重印说明

第一章 相似形 1

成比例的线段 1

§ 1.1 线段的比 1

§ 1.2 成比例的线段 11

§ 1.3 平行线截得比例线段定理 19

§ 1.4 应用平行线截得比例线段定理的作图题 32

§ 1.5 三角形内角、外角平分线性质 38

相似三角形 46

§ 1.6 相似多边形 46

§ 1.7 相似三角形的判定 52

§ 1.8 相似直角三角形的判定 67

§ 1.9 相似三角形的性质 74

§ 1.10 比例规和对角线尺 80

相似多边形 84

§ 1.11 相似多边形的性质 84

§ 1.12 多边形相似的判定 87

§ 1.13 位似形 93

§ 1.14 应用作位似形解作图题 100

§ 1.15 放缩尺 106

本章提要 109

复习题一 109

第二章 有关三角形和圆的

线段间的度量关系 115

和三角形有关的线段间的

度量关系 116

§ 2.1 直角三角形中成比例的线段 116

§ 2.2 勾股定理 122

§ 2.3 勾股定理的推广 128

§ 2.4 勾股定理的逆定理 131

§ 2.5 三角形的中线、高、外接圆半径和角平分线的计算公式 136

和圆有关的线段间的度量

关系 141

§ 2.6 关于圆的切线和割线间的度量关系 141

§ 2.7 关于圆内相交两弦的度量关系 146

代数作图法 151

§ 2.8 代数作图法的基本作图题 151

本章提要 159

复习题二 160

第三章 多边形的面积 165

§ 3.1 多边形的面积 165

§ 3.2 矩形的面积 168

§ 3.3 平行四边形的面积 175

§ 3.4 三角形的面积.....	132	§ 4.4 正多边形的作图.....	248
§ 3.5 梯形的面积.....	192	本章提要	253
§ 3.6 相似多边形的面积的 比.....	197	复习题四	259
§ 3.7 关于多边形面积的作 图题.....	206	第五章 圆的周长和面积	262
本章提要	219	§ 5.1 圆的周长.....	262
复习题三	219	§ 5.2 圆弧的长.....	272
第四章 正多边形	222	§ 5.3 弧度制.....	278
§ 4.1 圆的内接和外切正多 边形.....	223	§ 5.4 圆的面积.....	233
§ 4.2 正多边形的外接圆和 内切圆.....	230	§ 5.5 扇形的面积.....	290
§ 4.3 关于正多边形的计算 题.....	234	§ 5.6 弓形的面积.....	296
		本章提要	301
		复习题五	301
		总复习题	304
		习题答案	309

第一章 相似形

成比例的线段

§1.1 线段的比

1. 线段的度量 为了要知道竹竿的长度,我们就用尺去量. 这里所谓“量”,就是把一把尺的一端和竹竿的一端对齐,然后把这把尺紧密地沿着竹竿一尺接一尺地比较,最后得到了竹竿的长度. 例如5尺,这表示从长度来讲,竹竿是尺的五倍(图1.1).

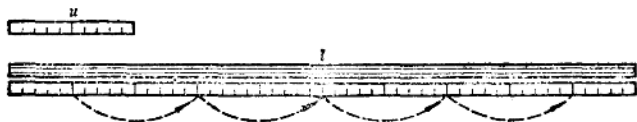


图 1.1

用几何的观点来研究,尺和竹竿可以分别看做是线段 u 和 l ; 用尺量竹竿的过程,可以看做是用线段 u 去量线段 l , 得出线段 l 含有线段 u 多少倍的过程. 这里线段 u 叫做**长度单位**, 线段 l 是**被度量的线段**, 最后所得的倍数叫做**量数**. 说得更确切一些, 它是**以线段 u 作长度单位去量线段 l 所得的量数**. 线段的量数和线段的长度是有区别的: 量数只是一个正数, 量数后面注明了长度单位才是长度. 在前面的实例中,

“5”是以尺作长度单位去量竹竿所得的量数，“5尺”才是竹竿的长度。度量线段的目的是要得到一个量数。要得到线段的量数首先要选定作为长度单位的线段。用两种不同的长度单位先后去度量同一条线段，所得的两个量数显然是不等的。例如用市尺作单位去量线段 l ，如果所得的量数是 6，用 m （公尺）作单位去量同一线段，所得的量数就是 2 了。

但是，用线段 u 量线段 l 和用尺量竹竿毕竟有些不同。给定了两条线段 u 和 l 的图形之后，我们很难想象，在图形上“拿起”线段 u ，紧贴着线段 l ，对齐了两端，一次接一次地进行比较。这里就得利用分割规了。首先把分割规两脚的两个尖端分别放在线段 u 的两个端点上（图 1·2(1)），然后保持分割规两脚张口的大小，把一个脚的尖端放在线段 l 的一个端点 A 上，依着图 1·2(2) 虚线所指的方向，在线段 l 上，连续截取等于 u 的线段 $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots$ ，这样就在图形上进行了用线段 u 度量线段 l 的过程。

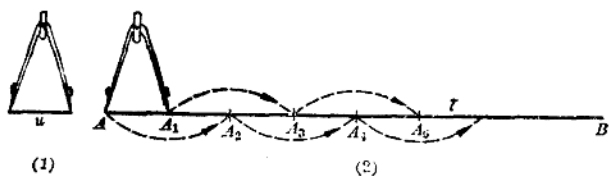


图 1·2

用尺量竹竿是一件十分简单的事，但不能因此把线段的度量问题也理解为简单的问题。用长度单位 u 去截线段 l 是否一定截得尽？截不尽怎么办？度量线段所得的量数究竟是怎样的数？这些问题都是比较复杂的。下面我们将详细地、精确地来研究它们。

图 1.3 中, 线段 u 是长度单位, 线段 AB 是要度量的线段. 现在利用分割规在线段 AB 上, 从端点 A 起, 连续截取等于 u 的线段 $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots$. 这样截取的结果总不出下面两种情况中的一种:

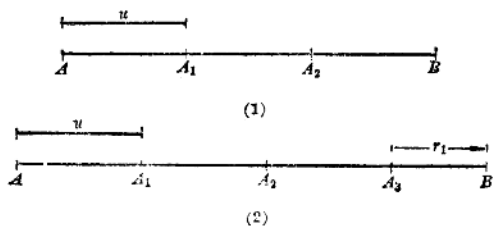


图 1.3

(1) 截了 m 次以后 (这里 m 是一个自然数), 恰巧截尽 (图 1.3(1)),

(2) 截了 m 次以后, 得到了小于 u 的剩余线段 r_1 (图 1.3(2)).

对于第一种情况, 线段 AB 恰巧是线段 u 的整数倍. 所得的量数是一个正整数 m . 在图 1.3(1) 里, $m=3$. 度量线段 AB 的过程到此结束.

对于第二种情况, 线段 AB 的量数还没有确定, 只知道它的量数应当大于正整数 m , 但是小于正整数 $m+1$. 在图 1.3(2) 里, 线段 AB 的量数大于 3 而小于 4, 度量的过程还没有结束. 我们把它叫做第一回截取. 在第一回截取里所得的剩余线段是 r_1 . 为了进一步确定线段 AB 的量数, 我们可以采用比 u 小的线段作长度单位, 继续度量线段 r_1 .

现在用线段 u 的 $\frac{1}{10}$ 作单位来度量剩余线段 r_1 , 从线段 r_1

的左端起,用分割规连续截取等于 $\frac{1}{10}u$ 的线段,截取的结果

总不出下面的两种情况之一:

(1) 截了 m_1 次以后,线段 r_1 恰巧被截尽(图1.4(1)).

(2) 截了 m_1 次以后,得到了小于 $\frac{1}{10}u$ 的剩余线段 r_2 (图

1.4(2)).

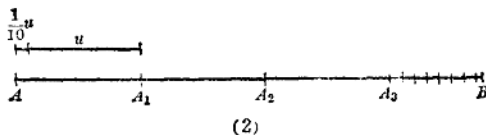
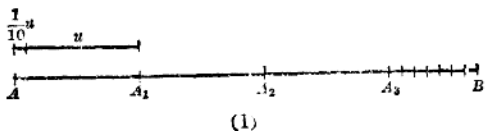


图 1.4

对于第一种情况,线段 r_1 恰巧是线段 $\frac{1}{10}u$ 的整数 m_1 倍,这里 m_1 可以等于从1到9的任何一个正整数.这时线段 AB 的量数已经确定为有限小数 $m + \frac{m_1}{10}$.在图1.4(1)里 $m + \frac{m_1}{10} = 3.7$.度量线段 AB 的过程到此结束.

对于第二种情况:线段 AB 的量数仍旧没有确定,只知道它的量数大于 $m + \frac{m_1}{10}$ 而小于 $m + \frac{m_1 + 1}{10}$,这里 m_1 可以等于0(如果 $r_1 < \frac{1}{10}u$),也可以等于从1到9的任何一个正整数

(如果 $r_1 > \frac{1}{10}u$)。在图 1.4(2) 里, 线段 AB 的量数大于 3.7

而小于 3.8. 度量线段 AB 的过程还没有结束, 我们把这一回的截取叫做第二回截取. 在第二回截取里所得的剩余线段是 r_2 . 为了更进一步确定线段 AB 的量数, 我们可以采用比 $\frac{1}{10}$

u 小的线段作长度单位, 继续度量线段 r_2 .

线段的度量就是这样进行的. 从上面的讨论, 可以得到度量线段的初步结论: 用长度单位 u 去度量线段 l . 如果线段 l 恰巧被 u 所截尽, 那末线段 l 的量数是一个正整数; 如果截不尽, 那末再用 $\frac{1}{10}u$, $\frac{1}{100}u$, $\frac{1}{1000}u$, \dots 做长度单位分别去截第一回剩余线段 r_1 , 第二回剩余线段 r_2 , 第三回剩余线段 r_3 , \dots . 如果某一回的剩余线段恰巧被截尽, 那末线段 l 的量数是一个正有限小数.

用线段 u , $\frac{1}{10}u$, $\frac{1}{100}u$, \dots 分别去截线段 l , 第一回剩余线段 r_1 , 第二回剩余线段 r_2 , \dots , 会不会每截一次总有剩余, 线段的度量过程将无止地进行下去呢? 下面的两个例题将说明这个问题.

例 1. 用线段 AB 作长度单位去量线段 CD , 所得的量数是 +3, 研究用线段 CD 作长度单位去度量线段 AB 的度量过程 (图 1.5).

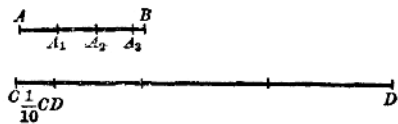


图 1.5

【解】 依照题意, 线段 CD 含有线段 AB 的 3 倍. 显然 $CD > AB$. 用 CD 作长

度单位去度量 AB 时，第一回就得用 $\frac{1}{10} CD$ 去截 AB 。

因为 $AB - 3 \cdot \frac{1}{10} CD = AB - 3 \cdot \frac{1}{10} \cdot 3AB = \frac{1}{10} AB$ ，所以用 $\frac{1}{10} CD$ 去截 AB ，截了 3 次而得到第一回剩余线段 $\frac{1}{10} AB$ 。

因为 $\frac{1}{10} AB - 3 \cdot \frac{1}{100} CD = \frac{1}{10} AB - 3 \cdot \frac{1}{100} \cdot 3AB = \frac{1}{100} AB$ ，所以用 $\frac{1}{100} CD$ 去截第一回剩余线段 $\frac{1}{10} AB$ ，截了 3 次而得第二回剩余线段 $\frac{1}{100} AB$ 。

因为 $\frac{1}{100} AB - 3 \cdot \frac{1}{1000} CD = \frac{1}{100} AB - 3 \cdot \frac{1}{1000} \cdot 3AB = \frac{1}{1000} AB$ ，所以用 $\frac{1}{1000} CD$ 去截第二回剩余线段 $\frac{1}{100} AB$ ，截了 3 次而得第三回剩余线段 $\frac{1}{1000} AB$ 。

.....

度量的过程将无限地继续下去，所得的量数是一个循环小数 $0.333\dots$ 。

例 2. 在等腰直角三角形 ABC 里，腰 AC 的长度是一寸。现在以寸作长度单位，求斜边 AB 的量数(图 1·6)。

【解】 我们将利用计算三角形面积的方法来求得 AB 的量数^①。作斜边 AB 上的高 CD (图 1·6(1))。因为三角形

^① 在算术里已经学习过计算三角形面积的方法。三角形的面积等于底和高乘积的一半。

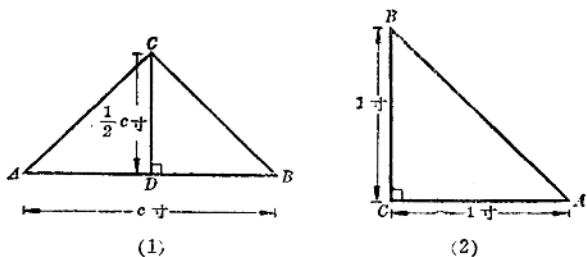


图 1.6

ABC 是等腰的, 所以 CD 又是斜边上的中线, 从而 $AD = \frac{1}{2} AB$. 容易看出, 直角三角形 ACD 也是等腰的, 所以 $CD = AD$, $CD = \frac{1}{2} AB$. 设 AB 的长度为 c 寸, 这里 c 是它的量数, 则 CD 的长度是 $\frac{1}{2} c$ 寸. 依据三角形面积公式:

$$\text{三角形 } ABC \text{ 的面积} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \frac{c}{2} = \frac{1}{4} c^2 \text{ (平方寸)}. \quad (1)$$

但是直角三角形 ABC 的直角边 AC , BC 可以分别做三角形的底边和高(图 1.6(2)). 因为 AC , BC 的长度都是一寸, 所以

$$\text{三角形 } ABC \text{ 的面积} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2} \text{ (平方寸)}. \quad (2)$$

由(1),(2)两式, 得

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} c^2, \quad c^2 = 2, \quad \therefore c = \sqrt{2}.$$

这里斜边 AB 的量数是一个无理数 $\sqrt{2}$, 它是一个无限不循环小数, 开头几位数字是 1.4142... . 这表示用线段 AC

去截 AB , 截了 1 次而得剩余线段 r_1 ; 用线段 $\frac{1}{10} AC$ 去截 r_1 , 截了 4 次而得剩余线段 r_2 ; 用线段 $\frac{1}{100} AC$ 去截 r_2 , 截了 1 次而得 r_3 ; ... 度量的过程将无限止地继续下去。

从前面的两个例题可以知道: 度量线段的过程有时将无限止地继续下去, 这时线段的量数可能是一个正的循环小数, 也可能是一个正的无理数(无限不循环小数)。

一般地说, 在选定了长度单位线段之后, 每一条线段总有一个量数, 这量数可能是正整数、正有限小数、正循环小数或正无限不循环小数。在代数学里, 把整数、分数(有限小数、循环小数)叫做**有理数**, 把无限不循环小数叫做**无理数**; 有理数和无理数总称**实数**。因此我们有下面的结论: 以确定的长度单位线段去度量任意线段, 总有一个确定的正实数作为它的量数。

2. 两条线段的比 给定了两个数 a 和 b , 要想知道 a 是 b 的多少倍($a > b$), 或者 a 是 b 的几分之几($a < b$), 我们可以用 b 去除 a 。所得的商叫做 a 和 b 两数的比; 这里被除数 a 叫做比的前项, 除数 b 叫做比的后项。两个数 a 和 b 的比通常表达为 $\frac{a}{b}$ 的形式, 或者 $a:b$ 的形式。

两个数的比的概念可以推广到两条线段的比。

用同一长度单位去量两条线段, 所得的两个量数的比叫做这两条线段的比。

在图 1.7 里, 线段 EF 是长度单位, 用 EF 分别去量线段 AA' 和 BB' , 必然得到两个量数 a 和 b 。量数 a 和 b 的比就是线段 AA' 和 BB' 的比, 并且表达为 $\frac{AA'}{BB'} = \frac{a}{b}$, 或者

$AA':BB' = a:b$. 在图 1.7 里, 显然有 $\frac{AA'}{BB'} = \frac{6}{11}$.

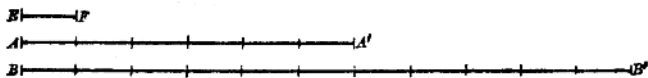


图 1.7

确定线段的量数必须首先确定长度单位. 长度单位改变了, 一条线段的量数也跟着改变. 例如用尺做长度单位量竹竿, 如果量数是 5; 长度单位改用了寸, 这根竹竿的量数就变为 50 了.

线段的量数既由所选的长度单位确定, 两线段的比又由两线段的量数确定, 那末, 改变了长度单位, 两线段的比是否也要改变呢?

假设用寸作长度单位, 两条线段的量数分别为 50 和 30. 改用尺作长度单位后, 它们的量数分别改变为 5 和 3 了. 改用分作长度单位后, 它们的量数又分别改变为 500 和 300. 我们先后采用尺, 寸, 分作长度单位, 两线段的比先后为: $\frac{5}{3}, \frac{50}{30}$

和 $\frac{500}{300}$, 它们是相等的. 由此可见, 每改变一次长度单位, 两条线段的量数各扩大或缩小同样的倍数, 对于两线段的比来讲, 正好把它的前项和后项扩大或缩小同样的倍数, 比的值是不会改变的. 因此, 两线段的比和所采用的长度单位没有关系.

例 3. 线段 AB 和 CD 的长度分别为 2.1 尺和 1.4 米. 求两线段 AB 和 CD 的比. 如果用 CD 作长度单位, 求出线段 AB 的量数.

【解】 要求 AB 与 CD 的比，首先要使它们的长度单位相同。 CD 的长度 1.4 米 $=4.2$ 尺，所以 $\frac{AB}{CD} = \frac{2.1}{4.2} = 0.5$ 。

用 CD 作长度单位去度量线段 AB ，所得的量数 a ，就是线段 AB 含有线段 CD 的倍数，所以 $a = \frac{2.1}{4.2} = 0.5$ 。

从这个例题可以知道，两线段 AB, CD 的比，也可以理解为以线段 CD 作长度单位去度量线段 AB 所得的量数。

习 题 1.1

1. 一条线段的量数一定是有理数吗？并举出例子。

2. 线段 a 和长度单位 l 分别含有第三线段 c 的 54 倍和 15 倍，求出线段 a 的量数。

3. 用圆规和直尺任意作一个正方形和正三角形；再利用分割规截取相等线段的方法，证明：

(1) 以正方形的一边为长度单位，量它的对角线所得的量数，精确到 0.1 的时候是 1.4。

(2) 以正三角形一边为长度单位，量它的高所得的量数，精确到 0.1 的时候是 0.8。

4. “线段”和“线段的长度”是一样的吗？为什么？

5. 线段 a 和 b 的长度分别是 5 厘米和 4 厘米，求出它们的比。如果改用 1 寸长的线段为长度单位时，它们的量数分别是多少？它们的比有没有变化？

6. 什么是两线段之比？它一定是有理数吗？上题中，如果采用线段 b 做长度单位，两线段之比如何？

7. 把一条长 56 厘米的线段分成 1:2:3 的三段，然后求出每一个分点把全线段分成两部分的比。

8. 点 C 把线段 AB 分成 $AC:CB=2:3$ 。已知 AB 为 48 厘米，求 AC 和 CB 的长。

9. 如果 $AB=12$ cm, 那末延长几厘米后可以使得 $AC:BC=5:2$? 这里 C 是延长线的终点.

10. 线段 AB 被点 C 分成 $AC:CB=3:2$, 求 AC 和 AB 的比, 以及 AB 和 CB 的比.

§ 1.2 成比例的线段

在算术里, 我们已经学习过关于比例的概念, 比例是表示两个比相等. 如果两个数 a 和 b 的比等于另外两个数 c 和 d 的比, 那末我们说四个数 a, b, c, d 组成一个比例 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 或 $a:b=c:d$.

在等式 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 里, a, d 叫比例的外项, b, c 叫比例的内项, d 叫做 a, b, c 的第四比例项.

如果 a 和 b 的比等于 b 和 c 的比, 即 $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, 那末 b 叫做 a 和 c 的比例中项.

四个数组成比例的概念, 可以推广为四条线段组成比例的概念.

如果线段 a 和 b 的比等于线段 c 和 d 的比, 线段 a, b, c, d 叫做成比例的线段.

在图 1.8 中, 线段 a 和 b 的比等于 $\frac{4}{7}$, 线段 c 和 d 的比也

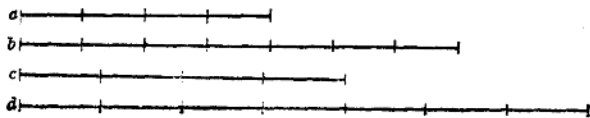


图 1.8

等于 $\frac{4}{7}$. 所以线段 a, b, c, d 是成比例的线段.

例 1. 在图 1.9 中, $DE, D'E'$ 分别是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的中位线. 试证线段 $BC, DE, B'C', D'E'$ 是成比例的线段.

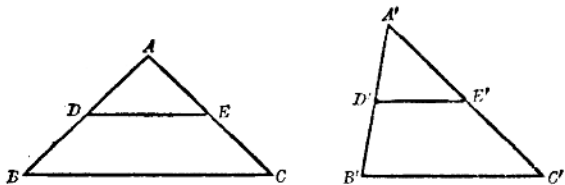


图 1.9

已知 $DE, D'E'$ 分别为 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的中位线.

求证 $\frac{BC}{DE} = \frac{B'C'}{D'E'}$.

【证】 因为 DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线, BC 是底边, 所以 $BC = 2DE$, 或 $\frac{BC}{DE} = 2$.

同理可证: $\frac{B'C'}{D'E'} = 2$. 从而 $\frac{BC}{DE} = \frac{B'C'}{D'E'}$.

依据两线段的比的定义: 两线段的比是用同一长度单位去量两条线段所得的量数的比, 四条线段组成的比例实际上是它们的四个量数所组成的比例. 因此关于数的比例的性质完全适用于线段的比例.

下面是关于比例的一些主要性质的定理. 在定理里的所有字母都代表不等于零的实数. 有些定理比较简单, 读者可参阅括号里的提示, 自己证明.

定理 1 如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 那末 $ad = bc$ (即将等式 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 的两端各乘以 bd).

定理 2 如果 $ad = bc$, 那末可以以 a 和 d 为比例外项 (或者比例内项), 以 b 和 c 为比例内项 (或者比例外项) 组成比例 (即以 db 除等式 $ad = bc$ 的两端).

定理 3 (反比定理) 如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 那末 $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ (把等式 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 两端各乘以 bd , 再各除以 ac).

定理 4 (更比定理) 如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 那末 $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ (把等式 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 的两端各乘以 $\frac{b}{c}$ 或 $\frac{d}{a}$).

定理 5 (合比定理) 如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 那末 $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.

已知 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

求证 $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.

【证】 $\because \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \therefore \frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$. 通分相加, 得

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}.$$

定理 6 (分比定理) 如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 那末 $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

(把等式 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 的两端各减 1, 再通分).