

工科硕士研究生数学用书

应用数学基础 (下册)

(第三版)

曾绍标 熊洪允 毛云英 编著

获国家教育部科技进步二等奖)



天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

工科硕士研究生数学用书

应用数学基础

(第三版)

下册

曾绍标 熊洪允 毛云英 编著

(本书荣获国家教育部科技进步二等奖)



天津大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

应用数学基础/曾绍标,熊洪允,毛云英编著. —天津:天津大学出版社,1993.3 (2003.7 重印)

ISBN 7-5618-0684-1

I . 应… II . ①曾… ②熊… ③毛… III . 应用数学 — 高等学校 — 教材 IV . 029

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 012389 号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨风和
地 址 天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)
网 址 www.tjup.com
电 话 营销部:022-27403647 邮购部 022-27402742
印 刷 河北省昌黎县人民胶印厂
经 销 全国各地新华书店
开 本 140mm × 203mm
印 张 8.75
字 数 277 千
版 次 1994 年 9 月第 1 版
印 次 2003 年 7 月第 6 次
印 数 17 501 - 21 500
定 价 29.00 元(上、下册)

目 录

第 7 章 插值法	(1)
7.1 Lagrange 插值	(1)
7.1.1 插值问题	(1)
7.1.2 Lagrange 插值多项式	(3)
7.1.3 插值余项的表达式	(4)
7.2 Newton 插值	(7)
7.2.1 差商的定义及其性质	(8)
7.2.2 Newton 插值公式	(9)
7.2.3 差分的定义及其性质	(12)
7.2.4 等距节点的 Newton 插值公式	(14)
7.3 Hermite 插值与分段插值	(17)
7.3.1 Hermite 插值	(17)
7.3.2 分段插值	(20)
7.4 三次样条插值	(22)
7.4.1 三次样条插值的定义	(23)
7.4.2 三次样条插值函数的构造方法	(24)
7.4.3 插值余项	(31)
习题 7	(32)
第 8 章 数值积分和数值微分	(35)
8.1 数值求积公式的一般形式及其代数精度	(35)
8.1.1 数值求积公式的一般形式	(35)
8.1.2 求积公式的代数精度	(36)
8.2 Newton-Cotes 公式	(38)
8.2.1 插值型求积公式	(38)

8.2.2	Newton-Cotes 公式	(39)
8.2.3	复化求积公式	(44)
8.3	Romberg 算法	(47)
8.4	Gauss 型求积公式	(50)
8.4.1	一般理论	(50)
8.4.2	几种 Gauss 型求积公式	(55)
8.5	数值微分	(61)
8.5.1	插值型求导公式	(61)
8.5.2	利用三次样条插值函数求数值导数	(64)
习题 8		(65)
第 9 章	常微分方程的数值解法	(67)
9.1	概述	(67)
9.1.1	常微分方程初值问题	(67)
9.1.2	建立数值解法的基本思想与途径	(69)
9.1.3	数值方法的截断误差与阶	(72)
9.2	Runge-Kutta 方法	(75)
9.2.1	二阶 Runge-Kutta 方法	(75)
9.2.2	四阶 Runge-Kutta 方法	(77)
9.3	收敛性、稳定性与误差控制	(79)
9.3.1	收敛性	(79)
9.3.2	稳定性	(81)
9.3.3	误差控制	(83)
9.4	一阶方程组与高阶方程	(84)
9.4.1	一阶方程组	(84)
9.4.2	高阶方程	(86)
9.5	边值问题的差分解法	(87)
9.5.1	线性方程边值问题的差分格式	(88)
9.5.2	其他边界条件的讨论	(95)
9.5.3	非线性方程边值问题	(95)

习题 9	(96)
第 10 章 数理方程基本概念	(98)
10.1 二阶线性偏微分方程的分类	(98)
10.1.1 偏微分方程的基本概念	(98)
10.1.2 二阶线性偏微分方程的分类	(99)
10.1.3 二阶线性偏微分方程的标准形式	(101)
10.1.4 两个自变量时化为标准形式的变换	(103)
10.2 典型二阶线性偏微分方程的建立	(108)
10.2.1 振动过程与波动方程	(108)
10.2.2 热传导方程	(113)
10.2.3 稳定状态与 Laplace 方程、Poisson 方程	(117)
10.3 定解条件与定解问题的提法	(118)
10.3.1 定解条件的数学表示	(118)
10.3.2 定解问题的提法	(122)
10.3.3 定解问题的适定性	(124)
习题 10	(124)
第 11 章 定解问题的分离变量解法	(126)
11.1 一维齐次方程、齐次边界条件混合问题的分离变量 解法	(127)
11.1.1 分离变量法	(127)
11.1.2 广义解概念	(131)
11.1.3 级数解的物理意义	(133)
11.1.4 热传导方程混合问题的分离变量解法	(133)
11.1.5 各种齐次边界条件下的固有值与固有函数系	(135)
11.2 非齐次方程及非齐次边界条件的处理	(142)
11.2.1 固有函数法	(142)
11.2.2 非齐次边界条件的齐次化	(147)
11.3 某些区域上二维 Laplace 方程的分离变量解法	(151)

11.3.1 矩形域上 Laplace 方程的边值问题	(151)
11.3.2 圆域上 Laplace 方程的边值问题	(154)
11.4 特殊函数在分离变量法中的应用	(157)
11.4.1 Legendre 多项式的应用	(157)
11.4.2 Sturm-Liouville 方程的固有值问题	(161)
11.4.3 Bessel 函数及其应用	(162)
习题 11	(169)
 第 12 章 解定解问题的其他方法	(173)
12.1 波动方程的 D'Alembert 解法	(173)
12.1.1 一维波动方程 Cauchy 问题的解	(173)
12.1.2 三维波动方程的 Poisson 公式	(180)
12.1.3 二维波动方程的 Poisson 公式	(184)
12.1.4 高维波动方程解的物理意义	(185)
12.2 积分变换法	(186)
12.2.1 积分变换概念	(187)
12.2.2 Fourier 变换及其性质	(187)
12.2.3 Laplace 变换及其性质	(190)
12.2.4 定解问题的积分变换解法	(194)
12.3 Green 函数法	(199)
12.3.1 调和函数的性质	(199)
12.3.2 Laplace 方程第一边值问题的 Green 函数	(203)
12.3.3 球域的 Green 函数和 Poisson 积分公式	(205)
12.3.4 解半空间上第一边值问题的 Green 函数法	(207)
12.3.5 二维情形	(209)
习题 12	(210)
 第 13 章 偏微分方程的数值解法	(213)
13.1 椭圆型方程的差分解法	(213)
13.1.1 差分格式的构成	(213)

13.1.2	差分方程解的存在惟一性	(217)
13.1.3	收敛性与误差估计	(220)
13.1.4	一般二阶椭圆型方程第三边值问题的差分格式	(223)
13.2	抛物型方程的差分解法	(224)
13.2.1	古典差分格式的构成	(225)
13.2.2	差分格式的稳定性	(230)
13.2.3	差分格式的收敛性	(234)
13.2.4	二维热传导方程的交替方向格式	(234)
13.3	双曲型方程的差分解法	(237)
13.3.1	三层显格式	(237)
13.3.2	三层隐格式	(239)
13.4	有限元方法	(240)
13.4.1	变分原理	(240)
13.4.2	区域剖分	(244)
13.4.3	面单元分析	(244)
13.4.4	线单元分析	(249)
13.4.5	总体合成与基本方程组	(250)
习题 13		(255)
附录 1	$J_n(x) (n=0,1,2,\cdots,5)$ 的正零点 $\mu_i^{(n)} (i=1,2,\cdots,9)$ 的近似值	(257)
附录 2	Fourier 变换与 Laplace 变换简表	(258)
附录 3	习题参考答案	(261)
参考文献		(270)

第7章 插值法

在生产或科研中,有时需要根据函数 $f(x)$ 在某些已知点的值去构造一个函数 $F(x)$ 作为 $f(x)$ 的近似表达式. 本书第6章介绍的最小二乘法是解决这类问题的一种方法. 本章将介绍解决这类问题的另一种方法——插值法. 插值法与最小二乘法的区别在于插值法要求构造出来的函数 $F(x)$ 在已知点与函数 $f(x)$ 有相等的函数值, 或者还要求有相等的导数值.

7.1 Lagrange 插值

7.1.1 插值问题

设已知函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上一系列互异点 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 处的函数值

$$y_i = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n,$$

而 $f(x)$ 的解析表达式是未知的. 例如, 只是通过实验测得上述诸点的函数值. 构造一个函数 $F(x)$ 作为 $f(x)$ 的近似表达式, 并要求

$$F(x_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, n. \quad (7.1)$$

有时 $f(x)$ 的解析表达式虽然是已知的, 但由于较为复杂而不便于直接使用, 也需要构造一个较简单的函数 $F(x)$ 作为 $f(x)$ 的近似表达式, 并要求其满足式(7.1). 这类问题称为插值问题, $f(x)$ 称为被插值函数, $F(x)$ 称为插值函数, $[a, b]$ 称为插值区间, $x_0, x_1, \dots, x_n$ 称为插值节点或简称为节点, 式(7.1)称为插值条件.

用插值函数 $F(x)$ 近似代替被插值函数 $f(x)$, 得近似等式

$$f(x) \approx F(x), x \in [a, b],$$

此式称为插值公式. 误差

$$R(x) = f(x) - F(x)$$

称为插值函数 $F(x)$ 的余项或截断误差.

以后几章将看到,插值函数 $F(x)$ 是对函数 $f(x)$ 进行其他数值计算(例如,求导数,求积分,解微分方程等)的有力工具.

如果要求插值函数 $F(x)$ 是多项式函数,则称插值问题是代数插值问题.我们将主要考虑代数插值问题.显然满足(7.1)的多项式有无限多个.

定理 7.1 存在惟一的 $p \in P_n[a, b]$ 满足插值条件(7.1),即满足

$$p(x_i) = y_i, i = 0, 1, \cdots, n. \quad (7.2)$$

证明 设

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n. \quad (7.3)$$

代入条件(7.2)得

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n = y_0, \\ a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n = y_1, \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n = y_n. \end{cases} \quad (7.4)$$

这是关于 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 的线性方程组,其系数行列式

$$V_n(x_0, x_1, \cdots, x_n) = \det \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}$$

为 Vandermonde 行列式.利用行列式的性质可求得

$$V_n(x_0, x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=0}^{i-1} (x_i - x_j).$$

由于当 $i \neq j$ 时 $x_i \neq x_j$,所以上式右端各因式都不等于零.因此, $V_n(x_0, x_1, \cdots, x_n) \neq 0$, 方程组(7.4)存在惟一解 $a_0, a_1, \cdots, a_n$, 即可以惟一地确定一组系数,使所得的多项式(7.3)满足条件(7.2).

证毕.

根据定理 7.1,在 $P_n[a, b]$ 中存在惟一的多项式 $p(x)$ 满足插值条件(7.2),称之为 n 次插值多项式,或简称为插值多项式.因此,无论用

什么方法求出的满足插值条件(7.2)的插值多项式,也无论所求出的插值多项式的表达形式如何,它们都是同一个多项式.

现在,插值问题的关键是如何具体求出插值多项式.求插值多项式的方法称为**插值法**.值得指出的是,解方程组(7.4),求出插值多项式的系数来确定插值多项式,一般计算量较大,有时还会对精度有严重影响,因而是不可取的.

7.1.2 Lagrange 插值多项式

令

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n l_k(x) y_k, \quad (7.5)$$

其中 $l_k(x)$ 是满足条件

$$l_k(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = k, \\ 0, & \text{当 } i \neq k \end{cases}$$

的 n 次多项式, $k=0, 1, \dots, n$. 显然, 由(7.5)表示的多项式 $L_n \in P_n[a, b]$, 并且满足插值条件(7.1). 由于 $x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$ 是 $l_k(x)$ 的 n 个零点, 所以

$$l_k(x) = A \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (x - x_i).$$

又由 $l_k(x_k) = 1$ 可知

$$A = 1 / \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (x_k - x_i).$$

因此

$$l_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i}, \quad k=0, 1, \dots, n. \quad (7.6)$$

将其代入(7.5)得

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \left(\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \right) y_k. \quad (7.7)$$

形如(7.7)的插值多项式称为 **Lagrange 插值多项式**. 由式(7.6)所表示的 $n+1$ 个 n 次代数多项式 $l_k(x)$ ($k=0, 1, \dots, n$) 称为以 $x_0, x_1, \dots, x_n$

为节点的 **Lagrange 插值基函数**. Lagrange 插值多项式是基函数的线性组合. 这种构造插值多项式的方法称为基函数法.

设

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i),$$

则

$$\omega'_{n+1}(x_k) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (x_k - x_i).$$

于是, Lagrange 插值多项式又可写成

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_k) \omega'_{n+1}(x_k)} y_k. \quad (7.8)$$

当 $n=1$ 时, 由式(7.7)得

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1,$$

即

$$L_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0).$$

这是一个线性函数, 通常称为 $f(x)$ 的线性插值函数, 相应的插值法称为**线性插值**. 用 $L_1(x)$ 近似代替 $f(x)$, 在几何上是用通过两点 (x_0, y_0) 与 (x_1, y_1) 的直线 $y = L_1(x)$ 近似代替曲线 $y = f(x)$, 如图 7-1 所示.

当 $n=2$ 时, 由式(7.7)得 $f(x)$ 的二次插值函数

$$\begin{aligned} L_2(x) = & \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2. \end{aligned}$$

用 $L_2(x)$ 近似代替 $f(x)$, 在几何上就是用通过点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ 和 (x_2, y_2) 的抛物线 $y = L_2(x)$ 近似代替曲线 $y = f(x)$, 如图 7-2 所示. 因此, 二次插值又称为**抛物线插值**.

7.1.3 插值余项的表达式

定理 7.2 设 $f \in C^n[a, b]$, $f^{(n+1)}(x)$ 在 (a, b) 内存在, $L_n(x)$ 是

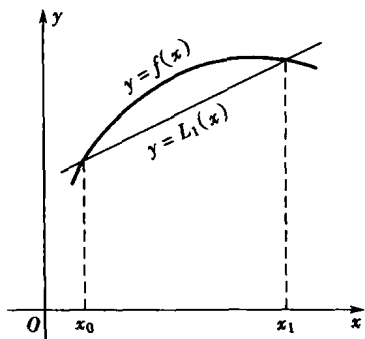


图 7-1

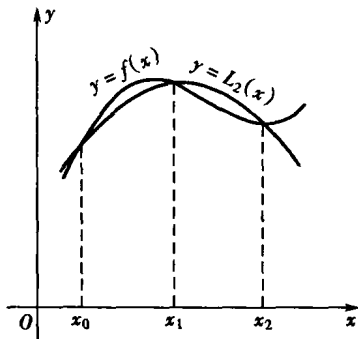


图 7-2

$f(x)$ 在节点 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 处的 n 次插值多项式, 则对任意 $x \in [a, b]$, 插值余项为

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i), \quad (7.9)$$

其中 $\xi \in (a, b)$ 且依赖于 x .

证明 当 x 是节点时, 式(7.9)显然成立. 下面假设 x 是 $[a, b]$ 上的任一非节点. 由于在节点 x_i 处有

$$R_n(x_i) = f(x_i) - L_n(x_i) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

故可设

$$R_n(x) = K(x) \prod_{i=0}^n (x - x_i). \quad (7.10)$$

构造辅助函数

$$\varphi(t) = f(t) - L_n(t) - K(x)\omega_{n+1}(t),$$

其中

$$\omega_{n+1}(t) = \prod_{i=0}^n (t - x_i).$$

不难看出, $\varphi(t)$ 满足

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) = \varphi(x_1) = \dots = \varphi(x_n) = 0,$$

即 $\varphi(t)$ 在 $[a, b]$ 上有 $n+2$ 个互异的零点. 反复应用 Rolle 定理可知, 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$, 即

$$f^{(n+1)}(\xi) - L_n^{(n+1)}(\xi) - K(x)\omega_{n+1}^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

而 $L_n^{(n+1)}(t) = 0$, $\omega_{n+1}^{(n+1)}(t) = (n+1)!$. 因此, 由上式得

$$K(x) = f^{(n+1)}(\xi)/(n+1)!.$$

代入式(7.10)即得式(7.9).

证毕.

由于定理 7.2 中的 $\xi \in (a, b)$ 很难具体确定. 因此用式(7.9)也就很难计算出误差 $R_n(x)$. 对某些函数 $f(x)$, 如果在 $[a, b]$ 上有 $|f^{(n+1)}(x)| \leq M_{n+1}$, 则有余项估计式

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|.$$

由插值余项式的表达式(7.9)可以看出, $|\omega_{n+1}(x)|$ 是 $|R_n(x)|$ 的一个因子, 因而越小越好. 当插值多项式的次数 n 确定后, 对于给定的 x , $|\omega_{n+1}(x)|$ 的大小就取决于 $n+1$ 个插值节点的选取. 为了使 $|\omega_{n+1}(x)|$ 尽可能小一些, 这 $n+1$ 个插值节点的选取原则是使 x 尽可能位于区间 I_x 的中部. 此处 I_x 是包含 x 以及这 $n+1$ 个节点的最小闭区间.

例 7.1 已知函数 $y = \ln x$ 的数值如下表:

x	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4
y	1.098612	1.131402	1.163151	1.193922	1.223775

用线性插值和抛物线插值分别计算 $\ln 3.27$ 的近似值, 并估计它们的误差.

解 根据插值节点的选取原则, 用线性插值近似计算 $\ln 3.27$ 时, 取节点 $x_0 = 3.2$, $x_1 = 3.3$. 于是得到线性插值函数

$$\begin{aligned} L_1(x) &= \frac{x-3.3}{3.2-3.3} \times 1.163151 + \frac{x-3.2}{3.3-3.2} \times 1.193922 \\ &= 0.307710x + 0.178479. \end{aligned}$$

因此 $\ln 3.27 \approx L_1(3.27) = 1.184691$.

用抛物线插值近似计算 $\ln 3.27$ 时, 取节点为 $x_0 = 3.2$, $x_1 = 3.3$, $x_2 = 3.4$. 于是得到二次插值函数

$$L_2(x) = -0.045900x^2 + 0.606060x - 0.306225.$$

因此 $\ln 3.27 \approx L_2(3.27) = 1.184787.$

设 $f(x) = \ln x$, 则

$$f'(x) = \frac{1}{x}, f''(x) = -\frac{1}{x^2}, f'''(x) = \frac{2}{x^3}.$$

在区间 $[3.2, 3.3]$ 上, $|f''(x)| \leq \frac{1}{3.2^2}$. 因此, 用线性插值计算 $\ln 3.27$ 时的误差

$$\begin{aligned} |R_1(3.27)| &\leq \frac{1}{2! \times 3.2^2} |(3.27 - 3.20)(3.27 - 3.30)| \\ &= 0.000103. \end{aligned}$$

在区间 $[3.2, 3.4]$ 上, $|f'''(x)| \leq \frac{2}{3.2^3}$. 因此, 用抛物线插值计算 $\ln 3.27$ 时的误差

$$\begin{aligned} |R_2(3.27)| &\leq \frac{2}{3! \times 3.2^3} |(3.27 - 3.20)(3.27 - 3.30)(3.27 - 3.40)| \\ &= 0.000009. \end{aligned}$$

由此可见, 抛物线插值的精确度较高.

若 $f \in P_n[a, b]$, 由式(7.9)可知, $R_n(x) \equiv 0$, 因此 $f(x)$ 的 n 次插值多项式就是 $f(x)$ 本身. 特别地, 若取 $f(x) \equiv 1$, 则由式(7.7)得到 Lagrange 插值基函数的一个重要性质

$$\sum_{k=0}^n l_k(x) = 1.$$

7.2 Newton 插值

前一节介绍的 Lagrange 插值多项式, 其形式具有对称性, 便于编程计算. 但是, 如果在计算过程中需要在原有基础上增加一些节点以求得较高次的插值多项式时, 必须全部重新计算. 本节将介绍另一种形式的插值多项式. 利用这种形式的插值多项式, 当增加节点时只需在原来求得的插值多项式的基础上再增加一些项, 这将为实际应用带来方便.

在构造此种插值多项式之前,先介绍差商概念及有关性质.

7.2.1 差商的定义及其性质

定义 7.1 已知函数 $f(x)$ 在互异节点 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 的值分别为 $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$. 记

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i},$$

称 $f[x_i, x_{i+1}]$ 为 $f(x)$ 关于节点 x_i, x_{i+1} 的一阶差商. 记

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i},$$

并称为 $f(x)$ 关于节点 x_i, x_{i+1}, x_{i+2} 的二阶差商. 一般地, 称

$$\begin{aligned} & f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] \\ &= \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} \end{aligned}$$

为 $f(x)$ 关于节点 $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}$ 的 k 阶差商. 特别地, $f(x_i)$ 称为 $f(x)$ 关于节点 x_i 的零阶差商, 并记为 $f[x_i]$. 差商又称为均差.

定理 7.3 差商具有如下基本性质:

(1) $f(x)$ 的 k 阶差商 $f[x_0, x_1, \dots, x_k]$ 可表示为 $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_k)$ 的线性组合

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \sum_{i=0}^k \frac{f(x_i)}{\omega'_{k+1}(x_i)},$$

其中 $\omega_{k+1}(x) = \prod_{j=0}^k (x - x_j)$.

(2) 差商与其所含节点的排列次序无关, 即对任意 x_l 与 $x_j (l \neq j)$ 都有

$$\begin{aligned} & f[x_0, \dots, x_{l-1}, x_l, x_{l+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_k] \\ &= f[x_0, \dots, x_{l-1}, x_j, x_{l+1}, \dots, x_{j-1}, x_l, x_{j+1}, \dots, x_k]. \end{aligned}$$

(3) $f[x_0, x_1, \dots, x_k, x]$

$$= \frac{f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k]}{x - x_k}.$$

(4) 如果 $f(x)$ 是 n 次多项式, 则其 k 阶差商 $f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x]$,

当 $k \leq n$ 时是 x 的 $n - k$ 次多项式, 当 $k > n$ 时对一切 x 恒等于零.

证明 性质(1)可用数学归纳法证明(留给读者). 性质(2)是性质(1)的直接推论. 由性质(2)及差商定义得

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, \dots, x_k, x] &= f[x_k, x_0, \dots, x_{k-1}, x] \\ &= \frac{f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k]}{x - x_k} \end{aligned}$$

性质(3)得证. 性质(4)可用数学归纳法和性质(3)证明(留给读者). 证毕.

7.2.2 Newton 插值公式

由差商的性质(3)有

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x], \\ f[x_0, x] &= f[x_0, x_1] + (x - x_1)f[x_0, x_1, x], \\ f[x_0, x_1, x] &= f[x_0, x_1, x_2] + (x - x_2)f[x_0, x_1, x_2, x], \\ &\dots\dots \\ f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x] &= f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n] \\ &\quad + (x - x_n)f[x_0, x_1, \dots, x_n, x]. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] \\ &\quad + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] \\ &\quad + \dots + (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \dots, x_n] \\ &\quad + (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)f[x_0, x_1, \dots, x_n, x]. \end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned} N_n(x) &= f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] \\ &\quad + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] \\ &\quad + \dots + (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \dots, x_n], \end{aligned} \quad (7.11)$$

$$E_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)f[x_0, x_1, \dots, x_n, x], \quad (7.12)$$

则

$$f(x) = N_n(x) + E_n(x).$$

显然 $N_n(x)$ 是 x 的次数不超过 n 的多项式, 且满足

$$N_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$