

※ 高等学校教学参考书 ※

解析几何

吴光磊 丁石孙 等 编
姜伯驹 田 畴

(修订本)

人民教育出版社

高等学校教学参考书



解 析 几 何

吴光磊 丁石孙 等编
姜伯驹 田 畴

人 民 教 育 出 版 社



本书内容包括平面直角坐标、直线和圆、常见的平面曲线、坐标变换、二次曲线的一般讨论、向量代数、空间的平面和直线、常见的曲面与曲线、正交变换与仿射变换等九章。可作为综合大学、高等师范学校数学各专业以及高等工业学校相近专业用作教学参考书。

简装本说明

目前 850×1168 毫米规格纸张较少，书本暂以 787×1092 毫米规格纸张印刷，定价相应减少 20%。希鉴谅。

解 析 几 何

(修 订 本)

吴光磊 丁石孙 姜伯驹 田畴等编

人民教育出版社出版(北京沙滩后街)

北京市印刷三厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

统一书号 13012·0101 开本 787×1092 1/32 印张 8

字数 183,000 印数 279,001—379,000 定价(6) 0.64 元

1961 年 7 月第 1 版 1962 年 5 月第 2 版 1979 年 2 月第 11 次印刷

第二版前言

这本书是在去年仓促写成的，有很多不妥之处。出版后，我們收到不少宝贵的意見和中肯的批評。1961—1962 学年中，我們試用了这本书，在教学过程中也发现了一些問題。現在根据大家提出的意見和我們教学的經驗，部分地改写了本书，并对一些显然的錯誤作了必要的修改。

本书前五章沒有作什么改变。我們認為，在目前中学还没有設置解析几何一課程时，首先让同学通过平面上的直角坐标系来熟悉坐标方法是有好处的。

考虑到教学中的系統性，我們把向量代数与空間的平面与直綫分写成两章，并且突出了仿射坐标系的地位。

原书第六章中关于空間曲面的方程一部分現在并入空間曲面与曲綫一章，二次曲面的标准方程和图形的討論作了补充，并加了直紋性的討論。

最后一章改为正交变换与仿射变换。这样，目标要明确些。对于仿射变换，这次作了比較系統的討論。考虑到本书前五章的写法，二次曲面的仿射分类較多地用了代数的方法。

我們認為在解析几何的課程中(数学及有关专业)應該包括一些射影几何的內容。但是由于缺乏經驗，在这次修改时沒有能加进这部分的内容。

限于時間和水平，这一次的修改距离要求还是很远的。我們希望大家能更多地提出批評和建議。最后，我們对提出意見的同志表示衷心的感謝。

編 者

1962, 3.

目 录

第一章 平面直角坐标	1
§ 1. 平面直角坐标系(1) § 2. 方程与图形(7)	
第二章 直线和圆	12
§ 1. 直线的方程(12) § 2. 直线与一次方程(16) § 3. 两条直线的夹角, 交点(17) § 4. 直线的法式方程, 点到直线的距离(21) § 5. 一次不等式及其应用(25) § 6. 圆的方程(29) § 7. 关于圆的一些性质(31) § 8. 直线和圆的参数方程(34)	
第三章 常见的平面曲线	37
§ 1. 椭圆(37) § 2. 双曲线(50) § 3. 抛物线(61) § 4. 椭圆、抛物线、双曲线的共通性质(70) § 5. 曲线的参数方程(78) § 6. 极坐标, 曲线的极坐标方程(85)	
第四章 坐标变换	93
§ 1. 两个坐标系相互位置的确定(94) § 2. 移轴(94) § 3. 转轴(96) § 4. 一般的坐标变换的公式(99) § 5. 坐标变换公式应用举例(104)	
第五章 二次曲线的一般讨论	108
§ 1. 在坐标变换下二次方程系数的变换(109) § 2. 二次曲线方程的化简(112) § 3. 二次曲线类型和形状的判别(121) § 4. 二次曲线位置的确定(129) § 5. 不变量的概念(132)	
第六章 向量代数	136
§ 1. 向量(136) § 2. 向量的表示(136) § 3. 向量加法(137) § 4. 数乘向量(140) § 5. 仿射坐标系(142) § 6. 用坐标作向量运算(145) § 7. 射影(147) § 8. 内积(148) § 9. 用坐标算内积(150) § 10. 外积(152) § 11. 外积的基本规律(154) § 12. 体积与行列式(156) § 13. 三元一次方程组(159) § 14. 关于向量乘积的两个公式(160) § 15. 坐标变换(162)	
第七章 空间的平面和直线	166
§ 1. 平面的方程(166) § 2. 两个平面的相互位置(168) § 3. 点到平面的距离, 平面的法式方程(170) § 4. 直线的方程(173) § 5. 直线与平面, 二直线间的相互位置(175) § 6. 点、直线和平面间的度量关系(177)	
第八章 常见的曲面与曲线	180
§ 1. 方程与图形(180) § 2. 二次曲面介绍(189) § 3. 空间曲线的参数方程(198) § 4. 曲面的参数方程(200) § 5. 一些特殊类型的曲面(202) § 6. 曲面的直纹性(210)	
第九章 正交变换与仿射变换	213
§ 1. 变换(213) § 2. 刚体运动, 正交变换(217) § 3. 几种特殊的平面变形(222) § 4. 仿射变换(226) § 5. 关于实数的一个性质(233) § 6. 图形的度量性质与仿射性质(235) § 7. 一个代数的结论(235) § 8. 二次曲线的仿射分类(241) § 9. 仿射变换的两个性质(244) § 10. 空间的正交变换和仿射变换(248)	

第一章 平面直角坐标

在生产实践中,随着活动范围的扩大和对精密度要求的提高,特别是,对描写和掌握运动规律的要求,人们就需要比较精确地刻划一个物体的位置。

刻划一个物体位置的方法就是选取几个物体作为参考,按一定的方法来标明这一物体与它们的相互位置的关系。在有了一定的度量单位之后,相互位置的关系通常是用数来表示的。例如,由于航海的需要而产生的地理坐标(经纬度)。又如,为了掌握天体运行的规律或标明天体的位置而产生的各种天文坐标。就是在日常生活中,我们也常常按这样的方法来确定地点的位置。下面所讲的平面直角坐标就是一种最常见的,同时也是最自然的一种坐标。

在这一章中,我们将引进平面直角坐标系,并通过平面直角坐标系建立点与数、方程与图形的联系,熟悉这些内容和掌握坐标方法,对学习这门课程将是十分重要的。

§ 1. 平面直角坐标系

在讲平面直角坐标之前,先来看一下我们通常是怎样确定直线上点的位置的。在直线上,取定一点,记为 O ;取一长度的单位;再取定一个方向。于是对于直线上任一点 P ,就可以按下面的方法来标明它的位置:首先按所取的长度单位量出线段 OP 的长度 $|OP|=x$,如果 P 点不是 O 点,按照从 O 到 P 的方向与选定的方向相同或相反以正数 $+x$ 或负数 $-x$ 来标明 P 点的位置,这个数就称为 P 点的坐标。而 O 点的坐标就是 0 。反之,给定任意一个实数,

直线上有唯一的（即有一个且只有一个）点以这个数为坐标。于是，就给出了直线上点与全体实数之间的一个一一对应。点 O ，

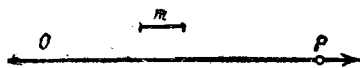


图 1.1

长度单位以及选定的方向三者就构成直线上的一个坐标系（图 1.1）。

1. 平面上点的坐标。

为了确定平面上点的位置，先在平面上取两根互相垂直的并选定了方向的直线，一根叫 x 轴（或横轴），一根叫 y 轴（或纵轴），它们的交点 O 称为原点。于是平面上任意一点 M 的位置便可以这样来确定：由 M 到 x 轴和 y 轴分别作垂线， P 、 Q 分别是它们的垂足。设 x 是 P 在 x 轴上的坐标， y 是 Q 在 y 轴上的坐标，不难看出， $|x|$ 就给出了 M 点到 y 轴的距离， x 的符号就说明了它在 y 轴的哪一侧； $|y|$ 就给出了 M 点到 x 轴的距离， y 的符号就说明了它在 x 轴的哪一侧。因之， M 点的位置便可以数对 (x, y) 来表示（图 1.2）。

如此取定的两根互相垂直的且有方向的直线和长度单位称为平面上的一个直角坐标系，记为 Oxy ；数对 (x, y) 为 M 点的坐标， x 为横坐标， y

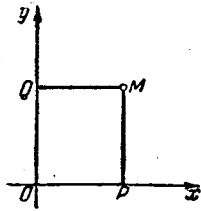


图 1.2

为纵坐标。

在平面上取定了直角坐标系以后，平面上的点便与全体有顺序实数对之间建立了一个一一对应关系，也就是说，在给定坐标系下，平面上的任一点唯一地决定一对有顺序的实数，反之，任意给一对有顺序的实数，它也唯一地决定平面上的一个点。

平面上的直角坐标系按 x 轴和 y 轴上选取的方向可以分成两大类：把 x 轴按逆时针方向^① 绕 O 点转 90° 而与 y 轴重合时，如果

^① 说“逆时针方向”时，已表示我们取定了平面的一面作为正面，否则这句话没有确定的意义。

它们的方向一致,那么这样的坐标系就称为右手系(图 1.3),这是一类;否则,就称为左手系,这是另一类(图 1.4)。此后我们都用右手系。

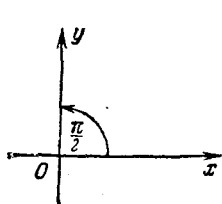


图 1.3

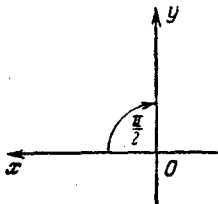


图 1.4

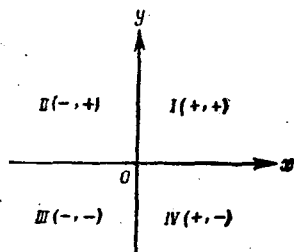


图 1.5

坐标轴把平面分成四部分,称为四个象限。按在其中点的坐标的符号为 $(+, +)$ 、 $(-, +)$ 、 $(-, -)$ 、 $(+, -)$,分别称它们为第一、第二、第三、第四象限(图 1.5)。

2. 两个简单问题。

既然平面上的点的位置完全被它的坐标决定,因而有关点的问题,如两点间的距离,线段上的定比分点应该可以通过点的坐标来表示。下面我们就看看这两个简单而基本的问题。

(1) 两点间的距离。已知两点 M_1 、 M_2 的坐标分别是 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) 。求 M_1 、 M_2 之间的距离。

我们先考虑一般的情形,即线段 M_1M_2 不与坐标轴平行的情形。

过 M_1 、 M_2 分别作平行于 y 轴、 x 轴的两条直线,它们相交于 $M(x_1, y_2)$ 。

线段 M_1M_2 是直角三角形 MM_1M_2 的斜边(图 1.6),由勾股定理得:

$$|M_1M_2|^2 = |MM_1|^2 + |MM_2|^2,$$

由图不难看出:

$$|M_2M| = |x_1 - x_2|, \quad |M_1M| = |y_1 - y_2|.$$

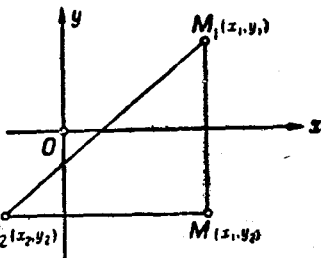


图 1.6

这里取绝对值, 因为线段的长度总不会是负数。于是

$$\begin{aligned}|M_1M_2|^2 &= |x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2,\end{aligned}$$

或者

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \quad (1)$$

这就是所求的公式。

例 $M_1(-2, 3)$ 与 $M_2(6, -12)$ 之间的距离为:

$$\begin{aligned}|M_1M_2| &= \sqrt{(-2-6)^2 + (3-(-12))^2} \\ &= \sqrt{64 + 225} \\ &= 17.\end{aligned}$$

这个公式对于 M_1M_2 平行于 x 轴或 y 轴的情形也是对的。事实上, 如果 M_1M_2 平行于 x 轴, 那么 $y_1 = y_2$, 于是

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = |x_1 - x_2|.$$

平行于 y 轴的情形也一样。

特别地, 一点 $M(x, y)$ 到原点的距离 r 就是:

$$r = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (2)$$

(2) 线段的定比分点, 已知两点 $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$; $M(x, y)$ 是线段 M_1M_2 中的一点, 它分线段之比为 $\lambda (\lambda \geq 0)$, 即

$$\frac{|M_1M|}{|MM_2|} = \lambda$$

求 M 点的坐标。

由 M_1, M 和 M_2 分别引 x 轴的垂线, 垂足分别是 P_1, P 和 P_2

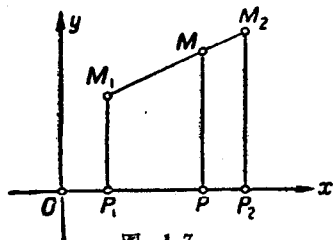


图 1.7

(图 1.7)。由相似性有

$$\frac{|P_1P|}{|PP_2|} = \frac{|M_1M|}{|MM_2|} = \lambda$$

而

$$|P_1P| = |x - x_1|,$$

$$|PP_2| = |x_2 - x|,$$

所以, 有

$$\frac{|x-x_1|}{|x_2-x|}=\lambda,$$

同样,也可以得到

$$\frac{|y-y_1|}{|y_2-y|}=\lambda,$$

或者

$$\left| \frac{x-x_1}{x_2-x} \right| = \lambda, \quad \left| \frac{y-y_1}{y_2-y} \right| = \lambda. \quad (3)$$

在所考虑的情形下, M_1 、 M 、 M_2 是直线上顺序的三个点, 因而 $x-x_1$ 与 x_2-x 同号, $y-y_1$ 与 y_2-y 同号, 所以(3)中绝对值的符号可以不要, 即

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda, \quad \frac{y-y_1}{y_2-y}=\lambda. \quad (4)$$

从(4)中解出 x 和 y :

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \end{cases} \quad (5)$$

例如, 如果 M 是线段的中点, 那么 $\lambda=1$, 就有

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \quad (6)$$

这样的分点通常称为内分点。还有所谓外分点, 即点 M 在 M_1 与 M_2 的联线上, 但在线段 $M_1 M_2$ 之外。对于外分点同样也考虑 $|M_1 M|$ 与 $|M M_2|$ 之比。以上的推导中, 在(3)以前完全相同, 但由(3)到(4)是考虑到 M_1 、 M 、 M_2 这三个点的次序, 因之在外分点的情形就不同了。这时, 考虑三点的次序, 不难看出, $x-x_1$ 与 x_2-x 反号, $y-y_1$ 与 y_2-y 也反号。于是代替(4)的应为

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=-\lambda, \quad \frac{y-y_1}{y_2-y}=-\lambda, \quad (4')$$

其余的推导就一样了。

以上的分析表明: 在内分点的情形, 由 M_1 到 M 与由 M 到 M_2 的方向相同, 因而得出(4); 而在外分点的情形, 由 P_1 到 P 与由 P 到 P_2 的方向相反, 因而得出(4')。因之, 如果我們在考慮綫段长度之比的同时也考慮綫段的方向, 方向相同的取正号, 方向相反的取負号, 換句話說, 內分点的分比用正数表示, 而外分点的分比用負数表示, 那么內外分点的情形就統一起来了, 它們統一的公式就是(5)。

例 設 $P(x, y)$ 外分 $P_1(1, 2)$ 与 $P_2(3, 5)$ 之比为 $-\frac{1}{2}$, 求 P 的坐标。
用公式(5)即得

$$x = \frac{1 - \frac{1}{2} \times 3}{1 - \frac{1}{2}} = -1.$$

$$y = \frac{2 - \frac{1}{2} \times 5}{1 - \frac{1}{2}} = -1.$$

最后, 着重指出, 点的坐标必須先有了坐标系才有意义; 并且, 如果坐标系选得不同, 一般的, 同一个点在不同的坐标系中有不同的坐标, 反之, 同样一对数 (x, y) 在不同坐标系下也对应不同的点。例如, Oxy 与 $O'x'y'$ 是两个不同的坐标系, 它們的坐标轴的方向相同, 而 O' 在坐标系 Oxy 中的坐标是 (a, b) 現在我們看, 任一点 M 在这两个不同的坐标系下的坐标有何关系。

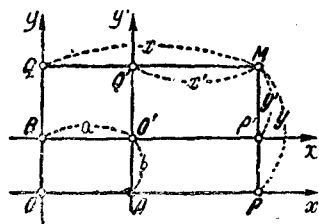


图 1.8

設 M 在 Oxy 中的坐标为 (x, y) ,
而在 $O'x'y'$ 中的坐标为 (x', y')
(图 1.8)

从图上不难看出 x, y 与 x', y' 之間的关系为:

$$\begin{aligned} x &= x' + a, \\ y &= y' + b. \end{aligned} \quad (7)$$

对于这种情况, 我們可以把坐标系 $O'x'y'$ 看成由坐标系 Oxy 经过移轴得出的, (7) 就是移轴的坐标变换公式。

§ 2. 方程与图形

上一节中, 我們初步說明了坐标法, 即說明了如何通过直角坐标系来确立平面上的点与数对——它的坐标——之間的——对应, 以及如何通过坐标来解决一些簡單的問題。現在要进一步說明, 如何通过坐标系来建立函数与图形和方程与图形(在平面情形通常是曲綫)之間的联系。

1. 曲綫的方程

曲綫, 通常都是作为物体的形状、或物体运动的軌迹而出現的。除了大家熟悉的最常見的直綫与圓外, 还有許多其他的也是常見的較复杂的曲綫, 如圓形物体的斜投影就呈橢圓形, 行星运动的軌道也是橢圓形, 拋射体运动的軌迹是拋物綫等。許多簡單而重要的曲綫, 都具有一定的規律性, 这个規律性常常就反映为曲綫上点所共同具有的某些特征性質, 即曲綫可以看成具有某些特征性質的点所构成的。例如, 半徑为 R 的圓就可以看成为所有到一定点距离为 R 的点构成的。而在引进坐标系以后, 由于点完全被它的坐标所决定, 因而曲綫上的点的共同性質, 就反映为曲綫上点的坐标 (x, y) 所应当滿足的限制条件, 它們常常被表示为一个等式:

$$F(x, y) = 0,$$

叫作曲綫的方程。或者, 有时可以写成 $y = f(x)$ 。

所以, 求一条曲綫的方程, 实际上就是, 在給定的坐标系下, 將此曲綫的几何性質用代数式子写出来。

例 1 設已知两点 $M_1(1, 2)$, $M_2(0, -3)$, 求綫段 M_1M_2 的中垂綫的方程。

首先,我們知道 M_1M_2 的中垂綫可以看成是由所有到 M_1, M_2 等距离的点构成的,也就是說,它是到 M_1 和 M_2 距离相等的点的軌迹。

設軌迹上任意一点 M 的坐标为 (x, y) 。

根据条件: $|M_1M| = |MM_2|$ 。所以, x, y 应满足关系

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{x^2 + (y+3)^2}.$$

两边平方,化簡后得到

$$x + 5y + 2 = 0. \quad (1)$$

得到的是不是 M_1M_2 的中垂綫的方程呢? 也就是,它是不是完全反映了曲綫的几何性質呢?

显然,軌迹上的点的坐标 x, y 必須满足方程(1)。反之,满足以上方程的 x, y 所对应的点 $P(x, y)$ 必在中垂綫上,这只要証明,如果 x, y 适合方程(1),則 $M(x, y)$ 与 M_1 和 M_2 的距离相等。这只要通过計算便可以得到:

$$|M_1M| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2},$$

$$|MM_2| = \sqrt{x^2 + (y+3)^2}.$$

因而

$$|M_2M|^2 - |MM_1|^2 = 2x + 10y + 4 = 0.$$

$$|M_1M|^2 = |MM_2|^2,$$

即

$$|M_1M| = |MM_2|.$$

所以方程(1)就是 M_1M_2 中垂綫的方程。

例2 求平行于 y 軸且与 x 軸交于 $(a, 0)$ 的直綫的方程 (图 1.9)。

首先,直綫上所有点的横坐标 x 都等于 a ; 反之,不在直綫上的点的横坐标都不等于 a 。所以,此直綫的方程为:

$$x = a.$$

同样地, 平行于 x 轴, 而与 y 轴交于 $(0, b)$ 的直线的方程为

$$y = b.$$

特别, x 轴和 y 轴的方程分别为

$$y = 0,$$

和

$$x = 0.$$

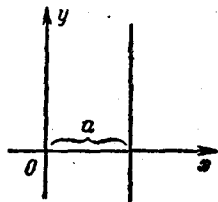


图 1.9

例 3 求圆心在原点、半径为 $R(>0)$ 的圆的方程。

设圆上任一点 M 的坐标为 (x, y) 。根据它与圆心 (原点) 的距离都等于 R 的特征, x, y 应满足

$$\sqrt{x^2 + y^2} = R,$$

或者

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (2)$$

显然, 圆上任一点的坐标都满足 (2); 反之, 也不难证明, 任一点, 只要它的坐标适合 (2), 则它与原点的距离必为 R , 即这一个点必在此圆上。所以 (2) 就是圆心为原点, 半径为 R 的圆的方程。

一般地, 同样的方法可以得到圆心在 (x_0, y_0) 、半径为 R 的圆的方程为

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

同点的坐标一样, 曲线的方程也必须先取定了坐标系才有意义, 同一条曲线在不同坐标下的方程一般的是不一样的, 以上例而论, 同样一个半径为 R 的圆, 按照坐标系的原点取在圆心或不在圆心, 就得到了不同的方程。

2. 函数与方程的图形

建立曲线的方程, 这只是问题的一方面; 另一方面, 给定了函数 $y = f(x)$, 或方程 $F(x, y) = 0$, 有时, 我们需要在确定的坐标系下给出它的图形。

设给出了函数 $y = f(x)$, 而且给定了平面上一个直角坐标

系 Oxy 。由 $(x, f(x))$ 便可以确定一点; x 变动时, 则这个点的轨迹一般是一条曲线, 即所谓函数 $y=f(x)$ 的图形。例如, 自由落体落下的距离 s 与时间 t 的关系为 $s=\frac{1}{2}gt^2$, g 是重力加速度, 在确定的平面直角坐标系中, 它的图形是一条抛物线的右半枝 (图 1.10)。

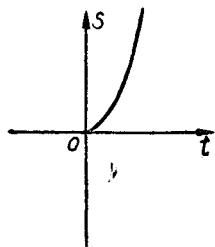


图 1.10

图形有鲜明的直观性, 并且它的一些几何性质就反映了函数的一些重要性质, 例如曲线的上升与下降就反映了当自变量 x 增加时, 函数值 y 是增大还是减小, 曲线的陡与平就反映了当 x 改变时, y 变化的快慢, 有时, 也需要直接从图形上测出自变量所对应的函数值。这些都说明了研究函数与图形的关系, 对理解函数的性质和精确绘制函数的图形都是十分必要的。

当然, 在更多的问题中, 给出的变量之间的关系不一定呈现为明显的 $y=f(x)$ 的关系, 而是一个方程 $F(x, y)=0$ 。例如, 理想气体, 在温度不变时, 压力 P 与体积 V 应满足关系式 $PV=K$, K 为常数; 以原点为圆心, 半径为 R 的圆作圆周运动的质点的坐标 (x, y) 应满足关系式 $x^2+y^2=R^2$ 。因此, 我们将一般地讨论方程 $F(x, y)=0$ 的图形。

在给定的坐标系下, 满足方程 $F(x, y)=0$ 的任一对数 (x, y) 就确定了平面上的一点, 而它们的全体就构成了平面上的一条曲线, 是此方程的曲线。

例 1 $xy=1$ 的图形是一条双曲线。

例 2 $x=1$ 的图形是一条平行于 y 轴的直线。

例 3 $x^2-1=0$ 的图形是两条平行于 y 轴的直线 $x=1$ 和 $x=-1$ 。

例 4 $x^2+y^2=0$ 的图形是一个点 $(0, 0)$ 。

如何绘出复杂一些的方程的图形?大家熟悉的方法是描点法;以后,我们将看到,由于通过坐标系建立了曲线与方程的联系,便可以通过对方程的讨论来研究图形的性质。

3. 总结

我们对曲线与方程的关系给出一个确切的定义: 在给定的平面直角坐标系下, $F(x, y) = 0$ 是曲线 C 的方程, 如果曲线上任一点的坐标 (x, y) 都满足方程; 并且, 所有适合方程的 (x, y) 所对应的点都在这条曲线上。

通过平面直角坐标系, 建立了曲线与方程的联系, 这就进一步揭示出数与形的联系, 使数与形结合起来。数形结合使我们有可能通过对数量关系的讨论来研究图形的性质, 另一方面也可以利用几何图形直观地反映函数或方程中的变量之间的关系, 有时还能由几何形象中提示解决问题的途径。这两方面都是很重要的, 并且不能截然分割, 但在本门课程中将着重前者。因此, 我们今后碰到的问题常常是: 给了轨迹条件, 如何通过坐标系建立它的方程, 以及进一步通过对方程的讨论, 研究方程的图形的性质。下面, 我们将通过对几种常见曲线的讨论来体现这一点, 一方面熟悉和了解这些曲线的重要几何性质, 同时也学习和掌握坐标方法。

第二章 直线和圆

我们将首先讨论两种最简单最常见的曲线——直线和圆；建立它们的方程，并讨论它们的几何性质与方程的联系。一方面更进一步加深对这两种曲线的了解，同时，为进一步研究其它较复杂的曲线打下基础。有关直线和圆的知识在今后的学习中会经常不断的运用，要求读者能熟练掌握它们。

§1. 直线的方程

一点和一个方向就完全确定了一条直线，点可以完全由它的坐标所确定，但如何确定直线的方向呢？我们将用直线与 x 轴的夹角来规定直线在平面中的方向，确切地说，“直线 l 与 x 轴的夹角”是指由 x 轴按反时针方向到直线的角度 α 。显然，这样的角度有两个，它们相差 π 。我们约定 $0 \leq \alpha < \pi$ ，称这样的 α 为直线的倾角(图2.1)。它完全确定了直线在平面中的方向。

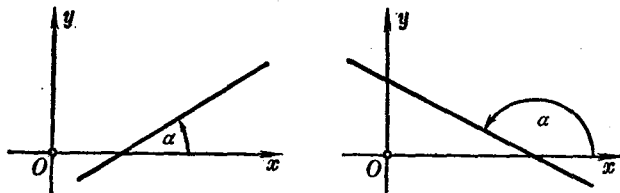


图 2.1

下面，我们首先从这一个大家熟知的直线的性质来建立直线的方程。

1) 点斜式：已知直线通过一点 $M_0(x_0, y_0)$ ，倾角为 α ，求它的