现代数学译丛

# 交换代数导引

〔英〕M. F. 阿蒂亚
I. G. 麦克唐纳 著

科学出版社

现代数学译丛

# 交换代数导引

〔英〕M.F.阿蒂亚
I.G.麦克唐纳 著

冯绪宁 刘木兰 戴宗铎 译

万哲先 校

科学出版社

1982

# 内 容 简 介

交换代数是代数几何及代数数论的重要工具，它对代数几何的作用如同微分学对微分几何的作用一样．本书用近代观点简明扼要地介绍了交换代数的主要内容，是一本较好的入门书．本书的特点是：强调了模的作用；着重介绍了“局部化”这个技术性工具；阐明了交换代数与代数几何的关系；每章附有大量习题，读者通过做题可学到交换代数的技巧．

本书可供数学工作者、特别是代数学和代数几何学工作者、大学数学系高年级学生及研究生阅读．


M. F. Atiyah I. G. MacDonald

INTRODUCTION TO COMMUTATIVE ALGEBRA

Addison-Wesley Publishing Company, 1969

现代数学译丛

交换代数导引

〔英〕M. F. 阿蒂亚 I. G. 麦克唐纳 著

冯绪宁 刘木兰 戴宗铎 译

万哲先 校

责任编辑 杜小杨 张鸿林

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1982年11月第一版 开本：850×1168 1/32

1982年11月第一次印刷 印张：5 5/8

印数：0001—7,150 字数：143,000

统一书号：13031·2086

本社书号：2850·13—1

定价：1.10元

# 序　　言

交换代数本质上是研究交换环的. 大体上讲，它由两个源泉发展而来：(1)代数几何，(2)代数数论. 在(1)中，它所研究的环的原型是域 $k$ 上的多变元多项式环 $k[x_1,\cdots,x_n]$; 在(2)中，则是有理整数环 $\mathbf{Z}$. 两者之中，又以代数几何的影响更为深远. 在由 Grothendieck 发展的现代的代数几何中，业已包含了很多代数数论的内容. 交换代数则是这种新的代数几何的基础之一. 正如微分学给微分几何提供了工具一样，交换代数给代数几何提供了完整的局部化工具.

本书出自为牛津大学三年级学生所开设的一个课程. 它的本来目的是为了较快地介绍这个专题，并使得只学过普通代数基本课程的学生能够阅读它. 另一方面，我们不打算用它来代替篇幅较大的关于交换代数的著作，如 Zariski-Samuel[4] 或 Bourbaki[1]. 我们集中讨论某些中心课题，而不去触及象域论这样范围较广的题目. 在内容上，我们比 Northcott[3]包括得广一些，讲法也同它有本质的区别. 按照现代趋势，我们更多地强调了模和局部化.

交换代数中最核心的概念就是素理想，这是算术中素数或几何中点的概念的推广. 集中注意于"接近一个点"这个几何概念其代数类比是环相对于一个素理想作**局部化**这个重要过程. 所以，用几何语言对局部化的结果加以探讨是很自然的，在 Grothendieck 的**概型**(scheme) 理论中已经系统地作到了这点. 我们对于很多结果以练习和注释的形式用概型语言加以说明，一方面是作为对 Grothendieck 的工作[2] 的导引，同时也因为它提供了几何直观.

由于本书的前身是讲稿，因此文体相当简洁，几乎没有一般的题外说明，许多证明过程也压缩了. 我们始终不打算扩大书的篇幅，希望能用简练的表达方式把现今已成为一种优美引人的理论

的数学结构说得更加清晰．我们的原则是通过一系列简单的步骤建立主要定理，而略去常规的验证过程．

目前，任何一个著述交换代数的作者都会遇到一个难题，即如何安排对现代发展起了如此重要作用的同调代数．在一本小书中原原本本地讲述同调代数是不可能的，但是，完全忽略它也是不明智的．我们所采用的折衷方案是使用最基本的同调代数方法，如正合序列、图表等等，而不涉及那些需用深刻的同调论研究所得的结果，我们希望以这种办法为学习同调代数的系统课程打下基础，而这种课程是那些愿意深入学习代数几何的读者所必修的．

在每章结尾我们都安排了大量习题，这些题目有的容易，有的难．对那些较难的，我们通常给以提示，有时给出完整的答案．我们曾得到R. Y. Sharp先生的帮助，他作了全部习题，不只一次地帮助我们纠正了错误．

有很多数学家对本书所阐述的理论的发展作出过贡献，我们不打算一一列举了．但是，我们还要向 J. P. Serre 和 J. Tate 两位表示感谢，因为我们向他们学习了这个课题，他们的影响对于本书的材料选取和表达方式都起了决定性的作用．

## 参 考 资 料

[1] N. Bourbaki, Algébre Commutative, Hermann, Paris (1961—65).

[2] A. Grothendieck and J. Dieudonné, Éléments de Géometrie Algébrique, *Publications Mathématiques de l'I. H. E. S.*, Nos 4, 8, 11,.... Paris. (1960—).

[3] D. G. Northcott, Ideal Theory, Cambridge University Press (1953).

[4] O. Zariski, and D. Samuel, Commutative Algebra I, II, Van Nostrand, Princeton (1958, 1960).

# 记 号 和 术 语

环和模用大写斜体字表示，它们中的元素用小写斜体字表示．一个域常记作 $k$．理想用小写德文字母表示．**Z**, **Q**, **R**, **C** 分别代表有理整数环、有理数域、实数域和复数域．

我们总把映射写在左方，这样元素 $x$ 在映射 $f$ 之下的象写作 $f(x)$，而不是 $(x)f$．映射 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to Z$ 的合成是 $g \circ f$，而不是 $f \circ g$．

称映射 $f: X \to Y$ 是**单**的，如果由 $f(x_1) = f(x_2)$ 可得 $x_1 = x_2$；是**满**的，如果 $f(X) = Y$；既单又满的映射则称为**一一对应**（或**一一映射**）．

在证明完毕（或略去证明）时记以符号 ■．

集合的包含用符号 $\subseteq$ 表示，我们以符号 $\subset$ 表**真**包含．所以 $A \subset B$ 意味着 $A$ 包在 $B$ 中且不等于 $B$．

# 目　　录

# 第一章　环和理想

我们首先简略地复习一下环的定义和基本性质．这可以说明要求读者具备的水平并用来规定有关记号和约定．然后讨论素理想和极大理想．本章最后一部分讨论在理想上进行的一系列初等运算． 在本章末尾的习题中引进了 Grothendieck 概型的语言．

## 环和环同态

**环** $A$ 是具有两个二元运算(加法和乘法)的集合，使得

1) $A$ 对于加法是一个交换群(这样，$A$ 有零元素，记为 0，而对于每个元素 $x \in A$ 有(加法)逆元素 $-x$)．

2) 乘法是结合的:

$$(xy)z = x(yz),$$

而且对于加法是分配的:

$$x(y+z) = xy + xz,$$
$$(y+z)x = yx + zx.$$

我们所考查的环都是**交换环**:

3) 对所有 $x$、$y \in A$，$xy = yx$，

且具有**单位元**(记为 1):

4) $\exists 1 \in A$，使得对所有 $x \in A$，$x1 = 1x = x$

这样，单位元是唯一的．

**在整本书里，"环"这个字都表示具有单位元的交换环．** 即适合上面的公理 1)–4)的环．

注记． 在 4)中我们并不排除 $1 = 0$ 这一可能性，如果这样的话，那么对于任意元素 $x \in A$ 有

$$x = x1 = x0 = 0,$$

这就是说 $A$ 由一个元素 0 组成. 这种环称为**零环**，为了简略起见将它也记为 0.

**环同态**是一个从环 $A$ 映入环 $B$ 的映射 $f$,它具有以下性质:

i) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (即 $f$ 是加法交换群的同态,因此 $f(x-y) = f(x) - f(y)$, $f(-x) = -f(x)$, $f(0) = 0$);

ii) $f(xy) = f(x)f(y)$;

iii) $f(1) = 1$.

换句话说,$f$ 保持加法、乘法和单位元.

环 $A$ 的子集 $S$ 叫作 $A$ 的**子环**,如果 $S$ 是加法子群,对乘法封闭且含有 $A$ 的单位元. 这时从 $S$ 映入 $A$ 的恒同映射就是个环同态.

如果 $f:A\to B$ 和 $g:B\to C$ 都是环同态，那么它们的合成 $g\circ f:A\to C$ 也是环同态.

## 理想. 商环

环 $A$ 中的一个加法子群 $\mathfrak{a}$ 叫作环 $A$ 的一个**理想**，如果它具有性质 $A\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{a}$ (即若 $x\in A$ 且 $y\in\mathfrak{a}$，则 $xy\in\mathfrak{a}$). $A$ 中乘法诱导出商群 $A/\mathfrak{a}$ 中唯一确定的乘法，这就使得这个商群成为一个环，叫做**商环**(或同余类环) $A/\mathfrak{a}$. $A/\mathfrak{a}$ 的元素是 $A$ 对于 $\mathfrak{a}$ 的陪集，而映射 $\varphi:A\to A/\mathfrak{a}$ 将每个元素 $x\in A$ 映到它的陪集 $x+\mathfrak{a}$，是环的满同态.

我们将经常用到下面这个事实:

**命题 1.1** 在环 $A$ 的包含 $\mathfrak{a}$ 的那些理想 $\mathfrak{b}$ 与环 $A/\mathfrak{a}$ 的理想 $\bar{\mathfrak{b}}$ 之间存在着保持包含关系的一一对应: $\mathfrak{b} = \varphi^{-1}(\bar{\mathfrak{b}})$. ■

设 $f:A\to B$ 是任一环同态，$f$ 的**核** $f^{-1}(0)$ 是环 $A$ 中的一个理想 $\mathfrak{a}$，而 $f$ 的**象** $f(A)$ 是环 $B$ 中的子环 $C$，同态 $f$ 导出环同构 $A/\mathfrak{a}\cong C$.

我们有时采用记号 $x\equiv y \pmod{\mathfrak{a}}$，它等价于 $x-y\in\mathfrak{a}$.

## 零因子．幂零元．可逆元

环$A$中的**零因子**是指"整除 0"的元素$x$，即在$A$中存在着$y\neq 0$,使得 $xy=0$. 没有非零零因子(且 $1\neq 0$)的环叫作**整环**. 例如$\mathbf{Z}$和 $k[x_1,\cdots,x_n]$（其中$k$是域而 $x_1,\cdots,x_n$ 是无关变元)，都是整环.

元素$x\in A$叫作**幂零的**,如果 $x^n=0$ 对某个 $n>0$. 每个**幂零元**都是零因子(除非$A=0$),但反过来,一般说来不对.

环$A$中的**可逆元**是指每一个"整除 1"的元素$x$，即对某个$y\in A$ 有 $xy=1$. 这样一个元素$y$唯一地被确定,记作 $x^{-1}$. $A$中的可逆元全体组成一个(乘法)交换群.

一个元素$x\in A$ 的所有倍元$ax$组成一个**主理想**,记作$(x)$或$Ax$. 元素$x$是可逆元，当且仅当 $(x)=A=(1)$. **零理想**$(0)$通常简记作 0.

如果环$A$中 $1\neq 0$ 而且每个非零元都是可逆元,$A$就叫做**域**,任一域都是整环(反过来并不对,$\mathbf{Z}$就不是域).

**命题 1.2.** 设$A$是个非零环,那么以下诸断言等价:

i）$A$是域;

ii）在$A$中除了 0 和(1)之外没有别的理想;

iii）任一从$A$映入非零环的同态都是单的.

证明 i)→ii). 设 $\mathfrak{a}\neq 0$ 是$A$中的理想，那么$\mathfrak{a}$包含一个非零元$x$，但$x$是可逆元,因此，$\mathfrak{a}\supseteq x=(1)$，所以 $\mathfrak{a}=(1)$.

ii)→iii). 设 $\varphi:A\to B$ 是一个环同态,它的核 $\mathrm{Ker}(\varphi)$ 是$A$中的理想,且异于 1,因此，$\mathrm{Ker}(\varphi)=0$，这就是说$\varphi$是单的.

iii)→i). 设$x$是$A$的一个元素，并假定它不是可逆元. 因$(x)\neq(1)$，所以环 $B=A/(x)$ 不是零环. 令 $\varphi:A\to B$ 是从$A$映到$B$之上的以$(x)$为核的自然同态. 根据假设,$\varphi$是单的. 因此 $(x)=0$，也就是说 $x=0$. ■

## 素理想和极大理想

环 $A$ 中的理想 $\mathfrak{p}$ 叫做**素理想**，如果 $\mathfrak{p} \neq (1)$，而从包含关系 $xy \in \mathfrak{p}$ 推出 $x \in \mathfrak{p}$ 或者 $y \in \mathfrak{p}$.

环 $A$ 中的理想 $\mathfrak{m}$ 叫做**极大理想**，如果 $\mathfrak{m} \neq (1)$，而且不存在理想 $\mathfrak{a}$ 适合条件 $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{a} \subset (1)$（**严格**包含关系）.

换句话说：

$\mathfrak{p}$ 是素理想 $\Longleftrightarrow$ $A/\mathfrak{p}$ 是整环；

$\mathfrak{m}$ 是极大理想 $\Longleftrightarrow$ $A/\mathfrak{m}$ 是域（根据(1.1)和(1.2)）.

因此每个极大理想都是素理想（反过来，一般说来不对）. 零理想是素理想，当且仅当 $A$ 是整环.

设 $f: A \to B$ 是个环同态，而 $\mathfrak{q}$ 是 $B$ 中的素理想，因为 $A/f^{-1}(\mathfrak{q})$ 与 $B/\mathfrak{q}$ 的一个子环同构，所以它不包含非零零因子，因此理想 $f^{-1}(\mathfrak{q})$ 是 $A$ 中素理想. 然而，如果理想 $\mathfrak{n}$ 是 $B$ 中的一个极大理想，那么 $f^{-1}(\mathfrak{n})$ 不一定是 $A$ 中的极大理想. 我们只能断定它是素理想.（例如 $A = \mathbf{Z}$, $B = \mathbf{Q}$, $\mathfrak{n} = 0$.）*)

素理想在整个交换代数中是很基本的，下面的定理及其系理指出有足够多的素理想.

**定理 1.3.** 每个 $\neq 0$ 的环 $A$ 中都有极大理想.（我们提醒一下，我们只考虑有单位元的交换环.）

证明. 本定理的证明是 Zorn 引理[1]的一个标准应用.

用 $\Sigma$ 表示 $A$ 中所有 $\neq (1)$ 的理想的集合. 按包含关系在 $\Sigma$

---

*) 如果 $f$ 是满同态，那么从 $\mathfrak{n}$ 是 $B$ 的极大理想可推出 $f^{-1}(\mathfrak{n})$ 是 $A$ 的极大理想.——译者注

1) 设 $S$ 是个非空偏序集，这就是说，在 $S$ 中给了一个关系 $x \leqslant y$，它是自反的、传递的，并具有性质：从 $x \leqslant y$ 和 $y \leqslant x$ 同时成立推出等式 $x = y$. $S$ 的子集 $T$ 叫做链，如果对任意一对 $x, y \in T$，一定有 $x \leqslant y$ 或 $y \leqslant x$. Zorn 引理断言，如果 $S$ 中的每个链 $T$ 都在 $S$ 中有上界（也就是说，存在 $x \in S$，使得对一切 $t \in T$，有 $t \leqslant x$），那么 $S$ 中至少有一个极大元.

Zorn 引理等价于选择公理、良序原理等等，可参看例如 P. R. Halmos, Naive Set Theory, Van Nostrand (1960).

中引进次序，集合$\Sigma$包含0，因而非空．为了应用Zorn引理，需要验证$\Sigma$中的每个链在$\Sigma$中都有一个上界，设$(\mathfrak{a}_\alpha)$是$\Sigma$中的一个理想链，那么对任何一对足码$\alpha, \beta$，都有$\mathfrak{a}_\alpha \leqslant \mathfrak{a}_\beta$或$\mathfrak{a}_\beta \leqslant \mathfrak{a}_\alpha$．令$\mathfrak{a} = \bigcup_\alpha \mathfrak{a}_\alpha$．那么易证$\mathfrak{a}$是理想，因为$1 \notin \mathfrak{a}_\alpha$对所有$\alpha$，所以$1 \notin \mathfrak{a}$．因此$\mathfrak{a} \in \Sigma$而$\mathfrak{a}$是所考察的链的上界．由Zorn引理推出，$\Sigma$中有一个极大元． ■

**系理 1.4.** 若$A$中一个理想$\mathfrak{a} \neq (1)$，则$A$中存在一个包有$\mathfrak{a}$的极大理想．

证明．将(1.3)用到$A/\mathfrak{a}$上，再利用(1.1)．也可将(1.3)的证明加以变形来直接证明． ■

**系理 1.5.** $A$中任一非可逆元素都包在一极大理想中． ■

注记．1）如果环$A$是Noether环(第七章)，我们可以避免用Zorn引理而得到：在所有$\neq(1)$的理想组成的集合中有一个极大元．

2）有的环恰只有一个极大理想，例如域，有唯一的一个极大理想$\mathfrak{m}$的环$A$叫作**局部环**，而域$k = A/\mathfrak{m}$叫做环$A$的**同余类域**．

**命题 1.6.** i）设$A$是一个环，$\mathfrak{m} \neq (1)$是$A$中这样一个理想，它使得任一元素$x \in A \backslash \mathfrak{m}$都是可逆元，那么$A$是局部环，$\mathfrak{m}$是它的极大理想．

ii）设$A$是一个环，$\mathfrak{m}$是它的一个极大理想，并假定$1+\mathfrak{m}$中任一元素（即$1+x$，而$x \in \mathfrak{m}$）都是$A$中可逆元，那么$A$是局部环．

证明．i）任一$\neq(1)$的理想都由非可逆元组成，因此都包在$\mathfrak{m}$中，由此推出$\mathfrak{m}$就是$A$中唯一极大理想．

ii）设$x \in A \backslash \mathfrak{m}$．因为$\mathfrak{m}$极大，$x$和$\mathfrak{m}$一起就生成理想(1)，因此存在着这样的元素$y \in A$和$t \in \mathfrak{m}$使得$xy + t = 1$．由此推出$xy = 1 - t$属于$1+\mathfrak{m}$，因而是可逆元，再利用i)即可． ■

仅有有限个极大理想的环叫作**半局部环**．

**例．** 1）$A = k[x_1, \cdots, x_n]$，$k$为域，设$f \in A$是一个不可约多项式．由唯一因子分解定理推出理想$(f)$是一个素理想．

2) $A = \mathbf{Z}$. $\mathbf{Z}$ 中任一个理想均有形状 $(m)$,这里 $m \geq 0$. $(m)$ 是素理想当且仅当 $m = 0$ 或 $m$ 是素数. 所有形如 $(p)$ 的理想,其中 $p$ 是素数,都是极大理想. $\mathbf{Z}/(p)$ 是由 $p$ 个元素组成的域.

同样断言对于例 1) 当 $n = 1$ 时也成立,然而当 $n > 1$ 时不成立. $A = k[x_1, \cdots, x_n]$ 中所有常数项等于 0 的多项式组成的理想 $\mathfrak{m}$ 是一个极大理想. 因为它是将 $f \in A$ 映到 $f(0)$ 的同态 $A \to k$ 的核. 然而当 $n > 1$ 时理想 $\mathfrak{m}$ 不是主理想: 它的任意一组生成元都至少包含 $n$ 个元素.

3) **主理想整环**是所有理想都是主理想的整环. 在这种环里,任一非零素理想都是极大的. 因为如果理想 $(x) \neq 0$ 是素理想,而 $(y) \supset (x)$, 那么 $x \in (y)$, 令 $x = yz$, 因 $yz \in (x)$, 而 $y \notin (x)$, 所以推出 $z \in (x)$. 令 $z = tx$, 那么 $x = yz = ytx$, 于是 $yt = 1$, 因而 $(y) = (1)$.

## 小 根 和 大 根*)

**命题 1.7.** 环 $A$ 的所有幂零元的集合 $\mathfrak{N}$ 是一个理想; 环 $A/\mathfrak{N}$ 中没有非 0 幂零元.

证明. 如果 $x \in \mathfrak{N}$, 显然有 $ax \in \mathfrak{N}$, 对所有 $a \in A$. 设 $x$, $y \in \mathfrak{N}$, 并设 $x^m = 0$, $y^n = 0$. 根据二项式定理 (它在任意交换环中亦成立), $(x+y)^{m+n-1}$ 是乘积 $x^r y^s$ 的带整系数的和, 其中 $r + s = m + n - 1$. 显然, 不等式 $r < m$ 和 $s < n$ 不能同时成立, 因此这些乘积中的每一个都是零, 这就是说 $(x+y)^{m+n-1} = 0$. 因此 $x + y \in \mathfrak{N}$. 这证明了 $\mathfrak{N}$ 是理想.

将元素 $x \in A$ 所属的 $A/\mathfrak{N}$ 中的同余类记作 $\bar{x}$. 那么 $\bar{x}^n$ 就是 $x^n$ 所属的同余类. 因此 $\bar{x}^n = 0 \Longrightarrow x^n \in \mathfrak{N} \Longrightarrow (x^n)^k = 0$ 对某个 $k > 0 \Longrightarrow x \in \mathfrak{N} \Longrightarrow \bar{x} = 0$. ■

理想 $\mathfrak{N}$ 叫作环 $A$ 的**小根**. 下面命题给出 $\mathfrak{N}$ 的另一种定义.

---

*) 小根又叫幂零元根,大根又叫 Jacobson 根.——译者注

**命题 1.8.** $A$ 的小根即是 $A$ 中所有素理想的交.

证明. 设 $\mathfrak{N}'$ 是 $A$ 中所有素理想的交. 如果 $f \in A$, $f$ 幂零, 而 $\mathfrak{p}$ 是一素理想, 那么对某个 $n > 0$, 有 $f^n = 0 \in \mathfrak{p}$, 由 $\mathfrak{p}$ 是素理想推出 $f \in \mathfrak{p}$, 因此 $f \in \mathfrak{N}'$.

反过来, 设 $f$ 不是幂零元. 用 $\Sigma$ 表一切具有性质

$$n > 0 \Longrightarrow f^n \notin \mathfrak{a}$$

的理想 $\mathfrak{a}$ 的集合. 因为 $0 \in \Sigma$, 所以 $\Sigma$ 不是空集. 将 $\Sigma$ 按包含关系引进次序. 用(1.3)中同样的论证方法可证能够将 Zorn 引理应用到 $\Sigma$ 上. 因此, $\Sigma$ 有一个最大元, 将它记作 $\mathfrak{p}$. 再去证明 $\mathfrak{p}$ 是素理想. 设 $x, y \notin \mathfrak{p}$, 那么理想 $\mathfrak{p} + (x)$ 和 $\mathfrak{p} + (y)$ 都严格包含 $\mathfrak{p}$, 所以都不属于 $\Sigma$. 因此

$$f^m \in \mathfrak{p} + (x), \quad f^n \in \mathfrak{p} + (y)$$

对某两个 $m$ 和 $n$. 由此推出 $f^{m+n} \in \mathfrak{p} + (xy)$. 因此理想 $\mathfrak{p} + (xy)$ 不属于 $\Sigma$. 所以 $xy \notin \mathfrak{p}$. 这样我们就有一个素理想 $\mathfrak{p}$ 它不包含 $f$, 因此 $f \notin \mathfrak{N}'$. ■

环 $A$ 的**大根** $\mathfrak{R}$ 定义为它所有的极大理想的交. 它可以描述如下:

**命题 1.9.** $x \in \mathfrak{R} \Longleftrightarrow$ 对一切 $y \in A$, $1 - xy$ 都是可逆元.

证明. $\Longrightarrow$: 如果 $1-xy$ 不是可逆元, 那么根据(1.5), 这个元素属于某个极大理想 $\mathfrak{m}$. 但是, $x \in \mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{m}$, 因此 $xy \in \mathfrak{m}$, 于是 $1 \in \mathfrak{m}$, 矛盾.

$\Longleftarrow$: 假定 $x \notin \mathfrak{m}$, 而 $\mathfrak{m}$ 是某个极大理想. 这时 $\mathfrak{m}$ 和 $x$ 一起就生成理想 (1). 因此对于某个 $u \in \mathfrak{m}$ 和某个 $y \in A$, 有 $u + xy = 1$. 这就是说 $1-xy \in \mathfrak{m}$, 因此这个元素不是可逆元. ■

## 理想的运算

设 $\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{b}$ 是环 $A$ 中的理想, 它们的**和** $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ 定义为所有的和 $x + y$ 的集合, 其中 $x \in \mathfrak{a}$, $y \in \mathfrak{b}$, 它是包含 $\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{b}$ 的最小理想. 更一般地, 还可以定义环 $A$ 中任意一组理想(不一定是有限个)的和

$\sum_{i\in I}\mathfrak{a}_i$；这个和中的元素是所有可能的形如 $\sum x_i$ 的和，其中 $x_i\in\mathfrak{a}_i$，对一切 $i\in I$，且几乎所有元素 $x_i$（即除有限个外）都是零元素．这些理想的和是包含所有这些理想 $\mathfrak{a}_i$ 的最小理想．

任意一组理想的**交**仍是理想，因此环 $A$ 的理想对于包含关系组成一个完备格．

环 $A$ 中两个理想 $\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{b}$ 的**积** $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ 定义为由一切可能的乘积 $xy$ 所生成的理想，其中 $x\in\mathfrak{a}$ 而 $y\in\mathfrak{b}$．它是一切有限和 $\sum x_iy_i$ 的集合，其中每个 $x_i\in\mathfrak{a}$，每个 $y_i\in\mathfrak{b}$．类似地可定义任意**有限个**理想的积．特别，对任意理想 $\mathfrak{a}$，可定义它的幂 $\mathfrak{a}^n(n>0)$．照惯例，规定 $\mathfrak{a}^0=(1)$．理想 $\mathfrak{a}^n(n>0)$ 由所有可能的乘积 $x_1x_2\cdots x_n$ 所生成，其中 $x_i\in\mathfrak{a}$，对一切 $i$．

**例．** 1）如果 $A=\mathbf{Z}$．$\mathfrak{a}=(m)$，$\mathfrak{b}=(n)$，那么 $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ 由 $m$ 和 $n$ 的最大公因数所生成；$\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$ 由它们的最小公倍数所生成；而 $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}=(mn)$．因此，这时有 $\mathfrak{a}\mathfrak{b}=\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}\Longleftrightarrow m,n$ 互素．

2）$A=k[x_1,\cdots,x_n]$，$\mathfrak{a}=(x_1,\cdots,x_n)=$ 由元素 $x_1,\cdots,x_n$ 生成的理想．这时 $\mathfrak{a}^m$ 是不含次数 $<m$ 的项的所有多项式（连同0）的集合．

到目前为止所定义的三种运算（和、交、积）都是交换的和结合的，**分配律**也成立：

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})=\mathfrak{a}\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\mathfrak{c}.$$

在环 $\mathbf{Z}$ 中，$\cap$ 和 $+$ 这两个运算中的每一个对另一个都是分配的．但是在一般情形，这个事实并不成立．在这方面最好的结果是**模律**：

如果 $\mathfrak{a}\supseteq\mathfrak{b}$ 或 $\mathfrak{a}\supseteq\mathfrak{c}$，则 $\mathfrak{a}\cap(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})=\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\cap\mathfrak{c}$．

在环 $\mathbf{Z}$ 中，有 $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})=\mathfrak{a}\mathfrak{b}$．但在一般情形只有包含关系 $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})\subseteq\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ 成立（因为 $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})=\mathfrak{a}(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})+\mathfrak{b}(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})\subseteq\mathfrak{a}\mathfrak{b}$）．显然 $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$，因此

$$\text{如果 } \mathfrak{a}+\mathfrak{b}=(1) \text{ 则 } \mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}=\mathfrak{a}\mathfrak{b}.$$

如果 $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=(1)$，理想 $\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{b}$ 叫作**互素**的．对于互素的理想