题 解 中 心

算 术 辞 典

〔日本〕长泽龟之助 原著
薛德炯　吴载耀　编译

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书为“数学辞典”的第一册，内容分解法之部，名词之部，算术小史三门，解法门又分为数，数的应用，数性，比例，成数算法，开方，类聚一，类聚二，类聚三，理化学应用等十部，分门别类，载有题解5、284题，附录英汉名词对照表，平方立方表，对数表，复利表，度量衡表，货币表等等，全书约计1,659千字。

本书出版于1935年，内容不尽正确，但为了目前各方面有需要，仍以旧版重印，供各地中小学教师作备课时的参考。

题 解 中 心

算 术 辞 典

〔日本〕长泽龟之助 原著

薛德炯 吴载耀 编譯

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行 上海商务印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 43.5 插頁 4 字数 1,650,000

1959年11月新1版 1981年8月第3次印刷

印数：21,001—236,000

统一书号：17119·7 定价：（科五）5.55 元

限国内发行

索引例言

●本辭典第一門收集之問題，爲數約五千三百；欲索而出之，必先熟諳本索引之分類方法．當本辭典編撰之時，凡風行之歐美名著，靡不擷其菁華，錄入本典，故各類問題，可稱完備．●本辭典先分十部，各部分若干類，各類含題較多，又別A、B、C等．●部I所集，單爲關於數之問題．共分四類，即整數、分數、小數、及雜題是．雜題一類，主爲數之基本定理，如交換定理、分配定理等；又不能入前三類者亦入之．各類又分A、B、C等小類．●部II所集，爲各種類之應用問題．共三類，即整數、分數、小數是；各類又分A、B、C等若干小類．例如分類1中之距離問題，與類2中之距離問題不同，前者屬於整數問題，而後者則屬於分數問題．●部III、V、IX所集，各爲特種問題，而以類聚一、二、三之名稱，分別綜括之，凡問題之屬於是等部類者，甚易判別，故欲檢索問題，首須辨明該題是否屬於此等部類，若否，則再從他部類中檢索之．●部IV爲數性，所集者爲關於整數性質、約數、倍數等問題．爲便利計，類1依二法分之．第一法與辭典本文同，第二法與本文無關，先集可爲2、3、4等取整除者，次集以2、3、4等除而有剩餘者．讀者欲索問題，以第二法爲便．●部VI爲比例，凡不屬特種部類，而單用比、比例、連鎖法、配分法、混合法等得解之問題皆屬之．解法中雖用比例，而可入和差、雞鶴算等特種部類中者，則入特種部類，但用比例極顯著者，則兼入比例部中．●部VII爲成數算法，凡不屬於特種部類，而屬於成數、損益、佣鏠、保險、租稅、利息、年賦、償還、折扣、公債、股票、匯兌、平均期日、年金等之問題，皆入此部．解法或題文中雖含成數，而可入特種部類者，則入特種部類；其用成數極顯著者，則兼入成數部中．●部VIII爲開方，凡開平方、開立方、及關於直角三角形之Pythagoras氏定理之問題、已知二數和(或差)積求二數之問題、及開方雜題(如求某數四次根、六次根等)皆入本部．他部中之問題含開方運算者，兼入本部，本部中之問題可屬他部者，兼入他部．●部X爲理化應用問題．物理類分力學、比重、熱學、聲學、光學、磁電學六目，各目中再分小目，如力學中再分力、運動量、墜體、風力、功、馬力等．化學類，依問題中所含之名詞而分爲百分比、容積分、子量、重量等類種．●問題在辭典本文中，雖只一見，而在索引中，則有數見者．凡欲使用本辭典者，於問題之分類法，必須十分熟諳，而後使用的，可以縱橫自如．

目　录

算術辭典索引

目 次

解法之部

題解中心

算術辭典

第一門　解法之部

部 I. 數

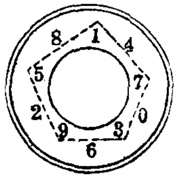
類 I. 整數

A. 加減

1. 由 1000 減 175, 加 172, 再減 175, 加 172, 如是連續行之, 則自始計之, 減至幾回後,不能再減?

解 減以 175, 加 172, 其結果即減以 $175-172=3$. 如是每行一回,卽以 3 減一回. 據此,省去最後之減數 175, 得 $1000-175=825$, 除以 3, 得商 275, 無剩餘. 故減以 175, 加 172, 行至 275 回, 則得餘數 175. 因此減至 $275+1$, 卽 **276** 回,則全盡.

2. 試藉所示圖之助,由 100 迅速累減 7, 以求最後之結果. 又試由 1000 分別累減 9, 8, 6, 及 5 時, 如何?[此圖之效用, 乃在累加較 9 小之同數時, 可徑知所得數之末位數字. 例如累加 3 於 12 時,得 12, 15, 18, 21, 24, 27,……, 其末位數字,可依順時計向由此圖形取得之. 又如累加 4 於 12, 則得 12, 16, 20, 24, 28, 32,……, 其末位數字可依反時計向,由此圖形一間一取得之. 總之,在累加或累減同數之際,其所得第三, 第四, 等數之末位數字, 可準照所得最初二數, 依順時計向或反時計向,由此圖形,間若干字而求得之].



解 由某數減 7 時所得之末位數字,等於加 3 時所得之末位數字;何則,減以 7, 等於減以 10 而更加 3 故也. 據此,因 100 之末位爲 0, 故可由 0 處始,依順時計向計之. 即爲 93, 86, 79, 72, 65, 58, 51, 44, 37, 30, 23, 16, 9, **2**. 但單求最後之結果時,則因由 100 減 7×10 得 30, 故可由 30 始. 次,由 100 累減 9 時,則可由 $100-9\times10=10$ 始, 而得 **1**; 累減 8 時, 則因等於加 2, 故可由 0 始,依順時計向就外部一間一取之,而得 $100-8\times10=20$, 12, **4**; 累減 6 時, 可由 0 始依反時計向就外部依次取之,而得 $100-6\times10=40$, 34, 28, 22, 16, 10, 4; 累減 5 時,極爲簡單,不必用此圖. 但若特別須用此圖, 則因此圖依次各數,係依次加 3 而得者,故由 $3\times5=15$ 可知

5 爲 0 下第 5 數字,卽 0 下隔去四字取得者, 故所求末位數字爲 $100-5\times10=50$, 45, 40, 35,……, **0**.

3. 被減數或減數,加以任意數或減以任意數,則差之變動如何?

解 被減數增以任意數或減以任意數,則差亦以同數增減,又若減數增以任意數或減以任意數,則差亦以同數減增. 何則,因兩數之差者,乃被減數超過減數之數,故被減數若有增減,則其超過減數之數,亦生同數之增減,反之,減數若有增減,則減數較被減數不足之數,亦生同數之減增. 故如前述.

附註 本題若以代數記號表之,則更簡明. 卽設 $a-b=d$, 則 $(a\pm x)-b=(a-b)\pm x$, 及 $a-(b\pm x)=(a-b)\mp x$.

B. 乘積

4. 設以 14 及 25 爲甲乙二因數作積,若甲因數加 3, 乙因數加 7, 則積生若何之變化?

解 二因數之積爲 14×25, 今 $(14+3)\times(25+7)=(14+3)\times25+(14+3)\times7$[分配律]$=(14\times25+3\times25)+(14\times7+3\times7)=14\times25+(14\times7+25\times3+3\times7)$, 卽甲乙二因數之積增加,所增加者爲甲因數之 7 倍,乙因數之 3 倍,與 3×7 之和.

5. 設以 12 及 27 爲甲乙二因數作積,若由甲因數減 3, 由乙因數減 7, 則積發生若何之變化?

解 甲乙二因數之積爲 12×27, 今 $(12-3)\times(27-7)=(12-3)\times27-(12-3)\times7$[分配律]$=(12\times27-3\times27)-(12\times7-3\times7)=12\times27-3\times27-12\times7+3\times7$[組合律]$=12\times27-(27\times3+12\times7-3\times7)$, 卽甲乙二因數之積減小,所減小者爲乙數之 3 倍,甲數之 7 倍之和與 3×7 之差.

6. 右圖示乘法之演算,△處之數字未明,然則△處之數字如何?

$$\begin{array}{r} 4\triangle\triangle \\ \underline{3\triangle} \\ 3\,6\triangle\triangle \\ \underline{\triangle\triangle7\triangle\triangle} \\ \triangle\triangle3\triangle\triangle \end{array}$$

解 乘數中之未明數字須爲 8 或 9. 何則, 若命之爲 7, 則縱令 $500\times7=3500$, 亦小於 3600 故也. 茲先命之爲 8. 因 $400\times8=3200$, $5\times8=400$, 故被乘數之十位數字當爲 5 以上. 命之爲 5, 則 $50\times30=1500$, $7\times30=210$, 故被乘數之末位,須爲 7 以上. 故如上得 (1) 式爲解答之一. 又設被乘數之末位數字爲 8, 則得 (2) 式. 次,設被乘數之十位數字爲 6, 而以 0 或 9 爲其末位數字,則 $460\times30=13800$, 或 $469\times30=14070$, 又 46×30 之各種百位數字,不能外於 8, 9 或 0. 故所求之解答爲 (1) 式.

$$\begin{array}{rr} (1) & (2) \\ 457 & 458 \\ \underline{38} & \underline{38} \\ 3656 & 3664 \\ \underline{13710} & \underline{13740} \\ 17366 & 17404 \end{array}$$

7. $123456789\times987654321\times192837465$ 爲幾位數?

解 第一因數小於 2×10^8, 第二因數小於 99×10^7, 第三因數小於 2×10^8, 故三因數之積小於 $2\times10^8\times99\times10^7\times2\times10^8=396\times10^{23}$, 卽不大於 26 位之數. 又第一因數大於 1×10^8, 第二因數大於 9×10^8, 第三因數大於 19×10^7. 故三因數之積大於 $1\times10^8\times9\times10^8\times19\times10^7=171\times10^{23}$, 卽不小於 26 位之數. 故所求之位數爲 **26**.

8. 785626 乘以 85672 時,得部分積五個,若欲令其成三個部分積,當用何法?

解 因 $56=8\times7$, $72=8\times9$, 故欲求被乘數與 72 之積,可求被乘數與 8 之積之 9 倍. 又欲求被乘數與 56 之積可求被乘數與 8 之積之 7 倍. 故其運算,如上所示.

```
      785626
       85672
 -----------
 6285098
  43995056
    56565072
 -----------
 67306150672
```

C. 除商

9. 除法中若剩餘較商大, 則其除數增 1, 而商不變. 試證之.

解 今設'剩餘＝商＋甲', 則'被除數＝除數×商＋剩餘＝除數×商＋商＋甲＝(除數＋1)×商＋甲', 而剩餘較除數小, 故較剩餘小之甲, 小於較除數大之'除數＋1'. 故加 1 於除數而除時,其商等於原商.

10. 除法中以同數乘除數及被除數時,其商不變,而剩餘等於原剩餘乘以同數所得之積. 試證之.

解 1. 例如設除法 (1) 及 (2) 中,除法 (2) 之除數及被除數爲以同數 4 乘除法 (1) 之除數及被除數所得者. 茲比較之, 卽可知各部分除法中之除數, 被除數, 及部分積, 在 (2) 中者俱爲在 (1) 中者之 4 倍,從而剩餘亦增大 4 倍;而商無變化.

```
    (1)                 (2)

3749 | 12          14996 | 48
36     312         144      312
 14                  59
 12                  48
  29                116
  14                 96
   5                 20
```

解 2. 設某數 N, 以除數 a 除時, 得商 Q, 剩餘 R, 則 $N=a\times Q+R$. 此式之兩邊,以他任意數, 例如 m 乘之, 得 $N\times m=a\times m\times Q+R\times m$. 然 R 爲除以 a 時之剩餘, 故 $a>R$, 故 $a\times m>R\times m$. 因此 $N\times m$ 除以 $a\times m$ 時,得商 Q,剩餘 $R\times m$, 卽如題所言.

注意 1. 由本題之結果反考之, 可知除法中以同數除被除數及除數, 則商不變, 而剩餘等於以同數除原剩餘時之商.

注意 2. 由注意 1, 可知施行除法時,被除數及除數之尾端, 若有若干個 0, 則可就此二數,自末尾起,削去同數個 0, 而商不變. 然若不能整除,則所得之剩餘後,必須附加前所削去之 0, 始可得原剩餘.

注意 3. 小數之除法 [除數被除數皆爲小數者] 中, 化除數爲整數時,亦以本題之理爲依據.

11. 設一數能整除各數,則此數除各數之和時所得之商,等於此數一一除各數時所得商之和. 試證之.

解 例如 $(27+18+15)\div3=27\div3+18\div3+15\div3$. 何則, $(27\div3+18\div3+15\div3)\times3=27\div3\times3+18\div3\times3+15\div3\times3=27+18+15$, 故 $(27+18+15)\div3=27\div3+18\div3+15\div3$ 也.

注意 除數若不能整除各數,而用分數時,則本定數恆眞.

12. 設一數能整除二數,則此數除二數之差時所得之商, 等於其一一除此二數時所得商之差. 試證之.

解 例如 $(35-15)\div5=35\div5-15\div5$,

何則,$(35\div5-15\div5)\times5=35\div5\times5-15\div5\times5=35-15$ 故也.

注意　參照 11 題注意.

13.　若干因數之積,除以是等因數之一時所得之商,等於此因數外之其餘諸因數之連乘積.試證之.

解　例如 $2\times4\times7\times9\div7=2\times4\times9$. 何則,以 7 乘 $2\times4\times9$, 得 $2\times4\times9\times7=2\times4\times7\times9$ 故也.

14.　若干因數之連乘積除以他數時,若此諸因數中有爲除數之倍數者,則可將此因數改之爲除以除數時所得之商,即得所求之商.試證之.

解　例如 $3\times12\times8$ 除以 6 時,因 12 爲 6 之倍數,故所求之商等於 $3\times(12\div6)\times8$, 即 $3\times2\times8$. 何則, $3\times12\times8\div6=3\times2\times6\times8\div6=3\times2\times8$ [13 題] 故也.

注意　由此可知,若干因數之連乘積除以某數時,可單除其中之一因數.

15.　以若干因數之連乘積除某數時所得之商,等於以此若干因數,逐一除此數時最後所得之商.試證之.

解　(I) 逐次除法中無剩餘時.例如因 $168=2\times3\times4\times7$……(1), 故 $168\div(2\times3\times4)=7$. 又 (1) 之兩邊除以 2, 則由 13 題, $168\div2=3\times4\times7$, 同理, $168\div2\div3=4\times7$, $168\div2\div3\div4=7$. 因此, $168\div(2\times3\times4)=168\div2\div3\div4$.

(II) 逐次除法中有剩餘時. 例如以 $3\times5\times9$, 即 135, 除 1199 時,因 $1199=3\times399+2$, $399=5\times79+4$, $79=9\times8+7$, 故 $5\times79=5\times(9\times8+7)=5\times9\times8+5\times7$,因此 $399=5\times79+4=5\times9\times8+5\times7+4$, 從而 $3\times399=3\times(5\times9\times8+5\times7+4)=3\times5\times9\times8+3\times5\times7+3\times4$, 故 $1199=3\times999+2=3\times5\times9\times8+3\times5\times7+3\times4+2=(3\times5\times9)\times8+[(3\times5)\times7+(3\times4+2)]$. 此式中最後之 2 爲某數除以 3 時所得之剩餘,故 $3>2$, 又 4 爲除以 5 時所得之剩餘, 故 $5>4$, 從而 $3\times5>3\times4+2$. 次, 7 爲某數除以 9 時所得之剩餘故 $9>7$, 因此 $3\times5\times9>3\times5\times7+3\times4+2$. 是以 1199 爲 $3\times5\times9$ 之 8 倍加小於 $3\times5\times9$ 之數所得之和.故 1199 除以 $3\times5\times9$ 時所得之整數商爲 8; 而 1199 除以 3 時所得之整數商爲 399, 399 除以 5 時所得之整數商爲 79, 79 除以 9 時所得之整數商亦爲 8. 故如題所言 [參照 34 題].

16.　以甲數除某數,更以乙數除其商,與以乙數除某數,更以甲數除其商所得之結果相等.試證之.

解　某數無論先除以甲數,或交換除數,而先除以乙數,其結果皆等於某除數以'甲×乙'時所得之商 [15 題] 故除數雖交換,而商不變.

注意　本題中之除數並不限於二數,不論其爲幾數,本題皆能成立.

17.　設某數 b 得爲他數 c 所整除,則以其商除一數 a 時所得之商,等於以 b 除 $a\times c$ 時所得之商.試證之.

解　設 $a\div(b\div c)=x$, 則由除法之定義, $a=x\times(b\div c)=x\times b\div c$ [結合律],故 $a\times c=x\times b$, 從而 $a\times c\div b=x$, 故 $a\div(b\div c)$

$=a\times c\div b$.

注意 若用分數，則雖不能整除時，本定理亦能成立甚明.

18. 設某數 b 得爲 c 所整除，且他數 a 得爲 b 所整除，則 a 除以 $b\div c$ 時所得之商，等於 a 除以 b 時所得之商乘以 c 所得之積.試證之.

證 設 $a\div(b\div c)=x$，則由除法之定義，$a=x\times(b\div c)=x\times b\div c$ [組合律] $=x\div c\times b$ [交換律].故 $a\div b=x\div c$，故 $a\div b\times c=x$，故 $a\div(b\div c)=a\div b\times c$.

注意 若用分數，則雖不能整除時，本定理亦能成立.

19. 設某數 a 得爲 b 所整除，又他數 c 得爲 d 所整除，則 $a\div b$ 與 $c\div d$ 之相乘積，等於 $a\times c$ 除以 $b\times d$ 時所得之商.試證之.

證 $(a\div b)\times(c\div d)=a\div b\times c\div d$ [組合律] $=a\times c\div b\div d$ [交換律] $=a\times c\div(b\times d)$ [組合律].

注意 若用分數，則雖不能整除時，本定理亦能成立.

20. 設 a, b, c, d 爲四數，$a\div b$，$c\div d$ 之各除算皆爲整除算，則 $(a\div b)\div(c\div d)=a\times d\div(b\times c)$.試證之.

證 $(a\div b)\div(c\div d)=a\div b\times d\div c$ [組合律] $=a\times d\div b\div c$ [交換律] $=a\times d\div(b\times c)$ [組合律].

注意 同 19 題之注意.

21. 右之除算中，在・處之數字爲何？

```
7・・)51・・1(・2
      ・・1・
      ------
       1・1・
       ・・・・
       ------
        1・9
```

解 將所設除算式，改書成右下形.此時 $l=1$，$q=11-9=2$，因而 $b\times 2$ 之末位 $=q=2$，故知 $b=1$，或 6.又因 $7a1\times e<51cd$，故 $e<8$，及因 $800\times 6<51cd$，故 $e\geqq 6$，故 $e=6$，或 7.

```
7ab)51cd1(e2
    fg1h
    ----
    1k1l
    mnpq
    ----
     1r9
```

設 $e=7$，則 $7a1\times e=fg17=4900+(fg10-4900)+7$，故 $fg10-4900=a\times 70$，故知非 $a\times 70=210$，因而 $a=3$ 不可.然此時 $fg1h=5117$，因而生不合理之結果 $1k1=cd-17$.故 $e\neq 7$，因此 $e=6$.於是 $7a1\times 6=4200+a\times 60+6=fg1h$，故 $f=4$，$h=6$，然縱命 $a=9$，則 $791\times 6=4746$，而亦不能得 $51cd-4746=1k1$，故 $b=1$ 錯誤.因此 $b=6$.將此式與 $e=6$ 組合，則 $7ab\times 6<4800$，故 $51cd-7a6\times 6>51cd-4800$，即 $1k1>300$，而不合理.故此假定不可能，是以最後所得推考者，惟 $e=7$.此時 $7a6\times 7=4900+a\times 70+42=fg1h$，由此得 $h=2$，$a=1$，$f=5$，$g=0$.又由 $716\times 2=1432=mnpq$，得 $m=1$，$n=4$，$p=3$.由 $r=11-(p+1)=7$，得 $r=7$.故 $1k1l=mnpq+1r9=1611$，故 $k=6$.又由 $fg1h0+1k11=51731=51cd1$，得 $c=7$，$d=3$.至此問題全告解決.

答

```
716)51731(72
    5012
    ----
     1611
     1432
     ----
      179
```

22. 試不用省略算，而求 38927 與 67198 之積除以 74213 與 4738 之積所得之商，至小數第四位.

解

```
        38927
        67198         74213
       311416          4738
       350343        593704
       38927         222639
      272489        519491
     233562         296852
     2615816546 | 351621194
     2461348358 | 7.4393…
      1544681880
      1406484776
       1381971040
       1054863582
        3271074580       答 7.4393
        3164590746
         1064838340
         1054863582
            9974758
```

23. 以 93 除 4020, 得商爲 4, 剩餘爲 38, 此答數正否, 試憑還原法以驗. 若爲錯誤者, 試改正之.

解 4020 除以 93, 得商爲 4, 剩餘爲 38, 則等式 $4020=93\times4+38$ 應能成立, 然因 $93\times4+38=410$, 與被除數絕不相等, 故所設之答爲錯誤者. 正確之運算, 應如右方所示, 因知所得之商應爲 **43**, 剩餘應爲 **21**.

```
4020 | 93
372  | 43
 300
 279
  21
```

24. 一除法, 運算後得商爲 15, 今僅使其除數改變, 再施除算, 而得商爲 20. 問對於除數應與以若何之變化?

解 **1.** 設被除數爲 a, 除數爲 b, 依題意, 可知 $a=b\times15=b\times3\times5$, 次設後一除數爲 b', 則知 $a=b'\times20=b'\times4\times5$. 故 $b\times3=b'\times4$. 卽始除數之 3 倍等於後除數之 4 倍, 因知後除數卽由始除數之 3 倍除以 4 而得也.

解 **2.** 設被除數爲 a, 除數爲 b, 則依題意, $a=b\times15$. 如可變化除數與商, 而欲被除數保持不變, 若設商已變化, 則非以其反對變化施之於除數不可. 然本題中, 商已乘上 $20\div15=\frac{4}{3}$, 因知除數應除以 $\frac{4}{3}$ 也. 卽 $a=(b\div\frac{4}{3})\times(15\times\frac{4}{3})=b\div\frac{4}{3}\times20$.

25. 某除法中, 商得 13, 剩餘爲 26, 其除數與被除數之和爲 404. 求除數及被除數.

解 404 旣爲除數與被除數之和, 則 404 除以除數所得之商應爲 $13+1=14$, 而剩餘仍爲 26. 故除數爲 $(404-26)\div14=$ **27**, 因而被除數爲 $404-27=$ **377**.

26. 以某數除 11011, 求得之商爲二位數, 並已知得商之第一數字時之剩餘爲 84, 得第二數字時之剩餘爲 50. 試求除數之値.

解 商旣爲二位數, 則商之第一數字與除數之乘積之末位相當於被除數之十位. 因其時之剩餘爲 84, 故除數定爲 $1101-84=1017$ 之約數, 同理, 因求得第二數字時之剩餘爲 50, 故知除數又爲 $841-50=791$ 之約數. 因而求 1017 與 791 之最大公約數, 得爲 113. 若以 113 作除數, 則得商爲二位數中之 **97**, 故知 **113** 爲所求之除數.

27. 一除法中, 其被除數, 除數, 商之和爲 73; 除數, 商, 剩餘之和爲 17; 若設商爲 8, 則被除數爲何?

解 被除數與除數之和, 卽除數與商之積加上剩餘與除數之和, 爲 $73-8=65$. 但除數與剩餘之和爲 $17-8=9$, 故除數與商之積爲 $65-9=56$. 是以除數等於 $56\div8=7$, 故所求之被除數爲 $73-7-8=$ **58**.

28. 一除法中,商等於除數之 6 倍,除數又等於剩數之 6 倍,而此三數之和爲 516. 求被除數.

解 除數爲剩餘之 6 倍,商爲除數之 6 倍,是以商卽爲剩餘之 $6\times6=36$ 倍. 故三數之和爲剩餘之 $36+6+1=43$ 倍,以是求得剩餘爲 $516\div43=12$,從而除數爲 $12\times6=72$,商爲 $72\times6=432$. 由此求得所需之被除數爲 $432\times72+12=$ **31116**.

29. 某數爲 17 除時,所得之整數商等於剩餘之 5 倍,而被除數與整數商之和爲 182. 試求被除數.

解 被除數等於商之 17 倍加剩餘,然商爲剩餘之 5 倍,商之 17 倍卽等於剩餘 5 倍之 17 倍,或 85 倍,因而被除數卽爲剩餘之 85 倍與剩餘之和,卽等於剩餘之 86 倍. 依題意,被除數與商之和等於 182,故剩餘之 86 倍與 5 倍之和,卽 91 倍,等於 182,是以知剩餘爲 $182\div91=2$,因而求得被除數爲 $2\times86=$ **172**.

30. 某數除以 7 時,得商 8 與剩餘若干,次加 6 於其剩餘而復以 7 除,照此法進行,歷五回而剩餘始無,求某數.

解 某數除以 7 時,所得之剩餘決不超乎 1, 2, 3, 4, 5, 6 六數之外,故此類剩餘加 6 後,必等於 7,或大於 7 而小於 7 之 2 倍,其理甚明. 故剩餘加 6 後而爲 7 除,歷 5 回而始整除,關於每回之除算得商始終爲 1. 以此,前之商 8 加上後之商 5 後乘之以 7,卽等於某數與 5 回加入之 6 之和,是故可知所求之數爲 $(8+5)\times7-(6\times5)$ $=$ **61**.

D. 剩 餘

31. 於除法中,剩餘必小於被除數之半分,試證之.

證 於除法中,'除數×商+剩餘=被除數'. 故若'剩餘=被除數÷2',或'剩餘>被除數÷2'時,則'除數×商=被除數÷2',或'除數×商<被除數÷2',因而'除數×商=剩餘'或'除數×商<剩餘'. 於是,設商爲整數,則此二式卽表示'除數=剩餘',或'除數<剩餘',是乃不合理者. 若商爲小數時,則被除數得以 10 之某次冪乘之,使商成整數. 於是因被除數及除數,俱以同數倍之,故其倍數之大小關係,與原來之被除數,除數之關係同. 是以無論在何款中,若'剩餘=被除數÷2',或'剩餘>被除數÷2',則生不合理之結果,故如題所言.

32. 某整數除以 2 時,得剩餘 1,次以 5 除其商,則得剩餘 3,再以 6 除此時所得之商,則得剩餘 4. 然則某整數若以 $2\times5\times6=60$ 除時,其剩餘如何?

解 設某整數 N 除以 2 時所得之商爲 P 則 $N=P\times2+1$;設 P 爲 5 除時所得之商爲 Q,則 $P=Q\times5+3$;故 $N=(Q\times5+3)\times2+1=Q\times5\times2+3\times2+1$,設 Q 除以 6 時之商爲 R,則 $Q=R\times6+4$,故 $N=(R\times6+4)\times5\times2+3\times2+1=R\times6\times5\times2+4\times5\times2+3\times2+1$. 因而以 60 除 N 時所得之剩餘爲 $4\times5\times2+3\times2+1=$ **47**. (參照 15 題)

注意 普徧言之,最後之剩餘,乘以其前

之諸除數，又其前一之剩餘，乘以此剩餘前之諸除數，如是以往，則加此種種積與最先之剩餘，卽得全剩餘.

33. 某整數除以 24，此除數乃可分爲 2, 3, 4 三因數者，並已知某整數最初以 2 除之，得剩餘 1，復以 3 除其商，則得剩餘 2，再以 4 除此時所得之商，則得剩餘 2，然則若最初除以 4，次以 3 除其商，再以 2 除其商時，於此次之各除法中所得之剩餘如何?

解 某整數爲(第三商)$\times 4\times 3\times 2+2\times 3\times 2+1\times 2+1$ [32 題]，卽等於(第三商)$\times 24+15$，因此某整數除以 4 時，則得商爲(第三商)$\times 6+3$，並得剩餘 3，又以 3 除(第三商)$\times 6+3$ 時，則得商爲(第三商)$\times 2+1$ 而無剩餘，最後此商爲 2 除時，則得商仍爲第三商而得剩餘 1.

34. 以甲數之因數逐次除乙數，捨棄每次之剩餘，則最後之商與以甲數除乙數所得之商相等，試證之.

解 因以甲之因數逐次除乙數時，捨棄每次之剩餘，故以甲數除乙數所得之商決不小於逐次以甲數之因數除乙數最後所得之商，其理甚明，故祇須證明前商決不大於後商卽可. 在次之除法中，所捨之數小於逐次之除數. 例如設除數爲 60，分解之爲 $3\times 4\times 5$，則逐次之剩餘決不大於 2, 3, 4. 今卽設剩餘爲最大之 2, 3, 4，則依 32 題，全剩餘爲 $2+3\times 3+4\times 3\times 4=(3-1)+(4-1)\times 3+(5-1)\times 3\times 4=(3-1)+(3\times 4-3)+(3\times 4\times 5-3\times 4)=3\times 4\times 5-1=60-1$，故不行逐次除法，而以 $3\times 4\times 5$，卽 60 除之，商亦不增加，故以甲數除乙數所得之商，決不大於以甲數之因數逐次除乙數所得之商，卽如題所言.

注意 本題歸於 15 題，但題言及證法相異，故另揭之.

35. 保持除數不變，而被除數乘以某數時，則商及剩餘亦將乘以同數，試證之.

解 設被除數爲 31，除數爲 7，則得商 4 與剩餘 3，然則 $31=7\times 4+3$，但相等之二數，各以同數乘之，其結果仍相等，故 $31\times 2=(7\times 4+3)\times 2=7\times 4\times 2+3\times 2=7\times(4\times 2)+3\times 2$，由是可知被除數乘 2 時而除數不變，則商及剩餘亦均 2 倍其值.

注意 在本題中，被除數所乘之數與剩餘之積必須小於除數. 何則，例如設 125 除以 30 時，得商 4 與剩餘 5，卽 $125=30\times 4+5$，而等式之兩邊設均乘 7，則 $125\times 7=30\times 4\times 7+5\times 7$，故被除數乘以 7 時，得商爲 4×7，剩餘爲 $5\times 7=35$. 然以剩餘 35 大於除數 30 故，則剩餘決非 35 也，於是與題言不合.

36. 保持除數不變，被除數除以某數，商及剩餘亦均除以同數. 試證之.

解 設被除數爲 a，除數爲 b，商爲 q，剩餘爲 r，則 $a=b\times q+r$. 設以 n (n 爲得整除 a, q, r 之任何數) 除此等式之兩邊，則 $a\div n=(b\times q+r)\div n=(b\times q)\div n+(r\div n)$ [配分定則]$=b\times(q\div n)+(r\div n)$，故 $a\div n=b\times(q\div n)+(r\div n)$. 由是可知保持除數之不變，被除數設除以某數 n，則商及剩餘亦均除以同數.

37. 保持被除數不變，假設除數乘以某數時，則商須以同數除之，而剩餘仍不變，試證

之.

[證] 設被除數為 a, 除數為 b, 商為 q, 剩餘為 r, 則 $a=(b\times q)+r$, 今 $b\times q$ 積中之一因數 b 為某數 m 乘後, 則須破壞等式之成立, 欲仍保持等式之成立, 則非以同數除其積中之他一因數 q 不可. 故 $a=(b\times m)\times(q\div m)+r$, 而與題言吻合.

[注意] 在本題中, q 必得為 m 所整除, 否則剩餘顯然須發生變化.

38. 以甲數先後除乙數及丙數,所得二剩餘之和, 等於以甲數除乙丙二數之和時, 所得之剩餘, 或再加入甲數而得之和, 其證法如何?

[證] 設乙為甲除時所得之剩餘為R, 則'乙＝甲之倍數＋R', 又丙為甲除時所得之剩餘為 r, 則'丙＝甲之倍數 $+r$', 因此, 則'乙＋丙＝甲之倍數＋甲之倍數＋R $+r$', 但以兩甲數之倍數之和仍為甲之倍數, 故'乙＋丙＝甲之倍數＋R $+r$'. 若R $+r<$ 甲, 則 R $+r$ 卽為以甲除乙＋丙時所得之剩餘. 若 R $+r>$ 甲, 則因 R $<$ 甲, $r<$ 甲, 而 R $+r<$ 甲 $\times 2$. 因此, R $+r$ 卽等於以甲除乙＋丙時所得之剩餘加甲數. 故如題所言.

39. 以甲數除乙數及丙數所得二剩餘之差等於以甲數除乙丙二數之差時之剩餘, 或等於此時所得之剩餘與甲數之差. 試證之.

[證] 設以甲數除乙數及丙數時, 所得之二剩餘各為R, r, 則'乙＝甲之倍數＋R', '丙＝甲之倍數 $+r$', 因而若設乙大於丙, R $>r$, 並因甲之二個倍數之差仍為甲之倍數, 故'乙－丙＝甲之倍數＋(R $-r$)', 因知 R $-r$ 卽為以甲除乙－丙時所得之剩餘. 若設乙＞丙, 且R $<r$, 則甲＋R $>r$, 且'乙－丙＝甲之倍數＋甲＋R $-r$', 因而'甲＋R $-r$ ＜甲', 且'甲＋R $-r$ ＝甲－($r-$ R)'. 是乃乙－丙除以甲時, 所得之剩餘也; 故 $r-$ R 等於以甲除乙－丙時之剩餘與甲之差. 卽如題所言.

40. 設以甲數除乙數及丙數所得之二剩餘之和等於甲數, 則乙丙二數之和得為甲數所整除, 試證之.

[證] 1. 設以甲除乙丙時所得之二剩餘各為 R, r, 則'乙＝甲之倍數＋R', '丙＝甲之倍數 $+r$', 因而'乙＋丙＝甲之倍數＋R $+r$'. 然依題意, R $+r$ 與甲相等, 故'乙＋丙＝甲之倍數＋甲＝甲之倍數', 因知'乙＋丙'得為甲所整除.

[證] 2. 由 38 題, 可知以甲除乙及丙所得之二剩餘之和, 等於以甲除乙丙之和所得之剩餘, 或等於再加上甲之和, 然依題意, 前二剩餘之和既等於甲, 則以甲除乙丙之和所得之剩餘仍等於甲, 是乃不可能者, 且剩餘加甲後仍等於甲, 是可知剩餘為 0 也, 卽'乙＋丙'得為甲所整除.

[注意] 與本題同理, 設以甲數除乙數及丙數所得之二剩餘相等時, 則乙丙二數之差得為甲數所整除, 亦得證之.

41. 以一數除諸他數之相乘積之剩餘, 等於以該數各別除諸數所得之諸剩餘之相乘積, 或等於此乘積再除該數所得之剩餘, 試證之.

[證] 例如求 24, 26, 34 之相乘積除以 7 時所得之剩餘, 因 $24=7$ 之倍數 $+3$, $26=7$ 之倍數 $+5$, 故 $24\times 26=$(7 之倍數