

前 言

对于高速旋轉刚体的力学問題,牛頓(1642—1727)、欧拉(1707—1783)、泊松(Poisson, 1781—1840)、潘索(Poinsot, 1777—1859)、雅科毕(Jacob, 1804—1851)等学者都作了詳細的研究,并先后指出这种刚体的下列三个主要运动特性:定軸性,进动特性及章动特性。傅科(Foucault)于1852年称这种刚体为陀螺,并应用它对慣性空間的定軸性,設計測試仪表,在實驗室中显示出地球的自轉現象。許多年来,人們在多方面設法利用陀螺的三个主要特性,設計并制造出必要的設備,来解决一些生产中的問題,其中最重要的是:研究及設計一系列的陀螺仪表,供水面上、水面下、陆地上及空中的运动物体作方位測量、方位控制、軌道測量及軌道控制之用。現在就陀螺及慣性导航的发展过程,以及自动控制技术在这个发展过程中所起的作用作簡單的叙述。

从十八世紀中叶到十九世紀末的一百五十年左右的期間,多次有人提出并設法解决在輪船上应用陀螺来建立方位基准的問題,但是,一方面由于需要并不十分迫切,另一方面又受当时技术水平的限制,虽然經過一定的努力,但長時間都未能制造出供实际使用的陀螺仪表。廿世紀初,电动机、汽輪机、高速軸承等都发展到一定的水平,为制造高性能的陀螺,打下了物質基础;同时,在进行北极探险的筹备工作中,人們亦积极地希望設計出一种,能够代替磁罗盘在北极附近使用,指示輪船所在地点南北方向的仪表。这种需要促进了陀螺仪表的发展。安休茲(H. Anschütz-Kaempfe)于1906年、斯派利(Sperry)于1911年,先后各完成一种原理基本相同、而构造不同的陀螺罗盘,开辟了陀螺仪表在运动物体的方位指示系統中应用的道路。直到今天,陀螺罗盘仍然是远洋輪船中的一种主要的航向仪表;而且它在一部分飞机及火箭的导航系統中,亦得到了实际的应用。

在第一次世界大战前后,砲火的射程不断增大,因而亦不断地提高了对这些砲火发射瞄准装置控制精确度的要求。显然,我們必須采用适当的仪器設備,在輪船上建立人工鉛垂綫(或人工水平面),使它不受輪船的傾斜及俯仰运动的影响,作为控制砲火发射瞄准装置的基准綫。这种需要促进了垂直陀螺的发展,它是一种由陀螺与摆适当地結合在一起的陀螺仪表,能够在作等速直綫运动的物体上,正确地指示运动物体所在地点的鉛垂綫方向。在1930年前后,又研制成功体积小、重量輕的航向陀螺及垂直陀螺,这些陀螺仪表目前仍然是一般飞机中必不可少的設備。

陀螺罗盘及垂直陀螺是分別用来建立运动物体所在地点的人工子午面及人工水平面,即用来指示运动物体所在地点的地理坐标系的坐标軸方向,因而我們要求这些陀螺的轉子軸在地理坐标系中的方向,是固定不变的。但是,地球的自轉以及运动物体的运动,都引起地理坐标系对于慣性空間的角速度,因而必須有力矩作用在陀螺上,使陀螺对慣性

空間产生进动运动，才能保证陀螺轉子軸在地理坐标系中的方向不变。所以在陀螺罗盘及垂直陀螺中，一般都采用摆或其他部件与陀螺相结合的方法，組成閉路系統。以垂直陀螺为例，我們是用摆綫来測量垂直陀螺的偏差，并产生必要的修正力矩，使陀螺轉子軸向着偏差減小的方向进动；亦就是說，垂直陀螺是一个以摆綫的方向为輸入、轉子軸的方向为輸出的位置随动系統。显然，自动控制技术的基本方法，早在普通的陀螺仪表中，已經得到了应用。

既然普通的陀螺仪表大都是由摆及陀螺組合而成，因而运动物体的加速度将影响这些仪表的精确度，甚至使仪表失效。因此，无论是运动物体沿着前进方向的加速度、由于地球自轉而引起的哥氏加速度或者是物体作机动运动而引起的向心加速度等都将影响陀螺仪表的正常工作；而消除物体的运动加速度对陀螺仪表的影响亦是一个迫切要解决的问题。休拉 (M. Schuler) 于 1923 年发表了关于休拉摆的論文，虽然在理論上解决了陀螺仪表不受运动物体加速度影响的问题，但是在工程技术上实现周期长达 84.4 分鐘的复摆的问题，則尚待进一步研究。如果用陀螺来实现休拉摆，那么我們必須能够精确地控制陀螺按每小时零点几度的角速度对慣性空間进动，因而陀螺本身的漂移速度就必须小于每小时百分之一度。一般陀螺的漂移速度可能高达每小时几十度，这远远不能满足組成休拉摆的要求。因此，解决在高速飞行或作机动运动的物体中建立方位基准的首要任务是：提高陀螺的精确度，以减小它的漂移速度。

理想的陀螺在沒有干扰力矩作用时，它的轉子軸将指向慣性空間固定的方向。有了干扰力矩之后，陀螺轉子軸将按一定的角速度漂移，因而改变了轉子軸在慣性空間的方向。要求提高陀螺的精确度，亦就是要求降低作用在陀螺上的干扰力矩：这包括內、外两个框架軸的軸承摩擦力矩，由动、靜不平衡而产生的力矩，由于机械变形而引起的力矩等。我們概括地說：有两个干扰力矩，分别沿着內、外两个框架軸方向作用在陀螺上，因而必須同时降低这两个干扰力矩的数值，才能提高陀螺的性能。除了在提高加工、安装精度，增加材料的几何尺寸稳定，提高軸承的性能等方面設法以外，通常还采用下列两种不同的方法，来分别地降低沿着內、外两个框架軸方向作用在陀螺上干扰力矩的数值：1) 采用单自由度悬浮的方法，做成单自由度浮子式陀螺，以降低沿着內框架軸方向作用在陀螺上的干扰力矩；2) 采用力平衡式閉路反饋的方法，产生一个控制力矩，以抵消沿着外框架軸方向作用在陀螺上的干扰力矩对系統性能的影响。这种用单自由度陀螺另加力平衡式反饋迴路所組成的系統称为稳定平台，它的功用与一个用內、外两个框架所支承的陀螺相同。但是，稳定平台的性能則远比陀螺的性能要好。我們还可以在稳定平台上适当地安装摆或加速度計，并用摆綫的方向来控制稳定平台的方位，組成垂直平台閉路系統；如果我們根据休拉摆的調整条件来选择上述閉路系統的参数时，这样所組成的系統称慣性平台，它可以在作机动运动的物体中，正确地指示鉛垂綫的方向。所以稳定平台相当于两自由度进动陀螺，而垂直平台和慣性平台相当于垂直陀螺，但是，稳定平台的性能远比两自由度

进动陀螺的性能要好,而惯性平台的性能亦远比垂直陀螺的性能要好。所以,浮子式陀螺及各种平台的研究工作是近二十年来整个陀螺研究工作中的一个重要内容。

上面讨论了陀螺及各种平台在运动物体方位测量系统中应用的问题。在陀螺及平台之外,再增添一些控制元件,组成自动驾驶仪后,还可以用来自动地控制运动物体的方位,亦就是控制运动物体的转动运动,这在飞机、火箭中都得到了广泛的应用。我们还可以用陀螺等部件来测量或控制运动物体中某些部件例如雷达跟踪天线、航空摄影机、砲塔等的方位。

运动物体的控制除了包括方位控制以外,还包括轨道控制,即控制运动物体质量中心的运动轨迹。我们固然可以直接地测量物体的位置随时间变化的规律,来求得物体的轨道;我们亦可以间接地测量物体的速度或加速度,通过一次或两次积分运算,来求得物体的运动轨道。在平台上安装加速度计,用它来测量运动加速度,经两次积分后而求得运动轨道的系统,称为惯性导航系统;这是一种不依赖于外界信号的、因而基本上亦不受外界天然的或人为的干扰的轨道测量系统。在第二次世界大战末期使用的 V-2 型火箭中,沿着火箭纵轴方向,安装了一个用陀螺做成的积分线加速度计,它的输出与火箭发动机的熄火装置相联。这样,在火箭的发射过程中,就可以根据火箭的速度,来控制发动机的熄火,以实现轨道控制。这是第一个实际使用的惯性导航系统,它开辟了惯性导航技术这一新的学科领域。二十年来,经过不断的研究与发展,惯性导航系统的性能逐渐提高,在宇宙航行、远程火箭、飞机、潜艇等的精密轨道控制系统,都得到了实际的应用。

从上面简短的叙述,可以看出:1)在普通的垂直陀螺及陀螺罗盘等陀螺仪表中,已经采用了闭路反馈方法或随动系统的方法;2)在稳定平台系统中,采用了力平衡式反馈方法,来提高这种系统的精确度;3)惯性平台系统中的休拉摆理论相当于自动控制系统中的不变性原理;4)在运动物体的控制系统中,陀螺、平台、加速度计等又都是方位控制或轨道控制系统中的主要部件。这表明:陀螺仪表本身的工作原理、陀螺仪表性能的改进以及陀螺的应用等都与自动控制技术有密切的关系。

因此,作者在编写本书时,将采用自动控制技术这门学科的观点及方法,来分析研究陀螺本身及一些主要陀螺仪表的特性;并从系统的观点来阐明,在包括有陀螺的各种平台、方位控制、惯性导航等复杂的系统中,陀螺与其他部件的关系以及陀螺在系统中的作用等问题。作者将不加说明地引用下列的概念与方法:拉氏变换、过渡过程分析、频率特性、反馈原理、闭路系统的稳定性、品质及根轨迹法等,因而要求读者在阅读本书之前,对上述的概念与方法,需有初步的认识。在全书的讨论中,除了个别章节以外,都忽略了陀螺、平台等系统中的非线性因素,并采用典型的函数,作为系统的输入来分析这些系统的特性。在解决具体问题时,读者可以根据调节原理的方法,进一步分析非线性、脉冲、具有随机输入及干扰等系统的特性。

全书大体上分为三部分。

第一部分包括第一及第二两章。在这两章中,对理論力学中与陀螺、平台、慣性导航等有密切关系的部分,将作概括的討論,以供閱讀其他章节参考之用。第一章討論运动学,第二章討論动力学。

第二部分討論几种主要类型的陀螺仪表的工作原理。这部分包括第三、四、五及六四章。在第三章中,首先建立两自由度进动陀螺的运动方程式,进而研究陀螺的章动运动及进动运动,然后再分析陀螺对于中間坐标系的相对进动运动以及由于运动方程式中非綫性項而引起的陀螺漂移等問題。第四章研究用两自由度陀螺来指示地理坐标系各坐标軸方向的陀螺仪表,这包括垂直陀螺以及陀螺半罗盘、陀螺磁罗盘、陀螺罗盘等航向陀螺仪表。第五章討論单自由度进动陀螺的工作原理及其应用,这包括:浮子式单自由度陀螺的构造及其主要部件,浮子式陀螺的漂移和它的性能測試方法,用单自由度陀螺組成測速陀螺、积分陀螺、空間积分器等問題。第六章討論音叉振动陀螺、轉子振动陀螺、粒子陀螺、低温超导体陀螺、流体轉子陀螺、电磁流体轉子陀螺、自由轉子陀螺等新型陀螺的构造及其工作原理,这些陀螺大都处于不同的研究和发展阶段,个别的亦在試用过程中。

第三部分討論平台及慣性导航系統的問題。这部分有七章,从第七章到第十三章。单軸稳定平台和单軸慣性平台的問題分別在第七及第八两章中討論。第九章討論单自由度慣性导航系統的問題,第十章討論在慣性导航系統中使用的高精度的加速度計的构造、工作原理及其輸出信号的修正等問題。两自由度和三自由度平台系統以及用这些平台系統来测量和控制运动物体的軌道等問題,則將在那十一、十二、十三等三章中討論。

本书所討論的問題,牽涉面比較广。作者又試圖用統一的观点与方法,来分析陀螺、陀螺仪表、平台系統、慣性导航系統等不同类型的問題。限于作者的水平,一定会有很多的缺点与錯誤,誠懇地希望讀者多多指正。

本书在編写过程中承有关組織的支持及鼓励,在此表示衷心的感谢。本书的附图除了一部分摘自参考文献以外,第一、第二及第三章一小部分的附图是由武安娜同志設計的,第三章的大部分以及第四、第五及第六章的附图是由金春城同志設計的,絕大部分附图的描繪工作是由楊华春同志完成;在編写及手稿的校对过程中,承翟寿德、邹志膺、梁泽环、沈廉、蔣介能、孙树勋、张春华、連綏仁、孙承恩、叶人超、陈德跃等同志提出不少宝贵意見,特别是金春城同志做了很多工作,在此一并致謝。

作 者

1963年12月

目 录

| | |
|--|----|
| 前言 | xi |
| 第一章 运动学 | 1 |
| § 1.1. 质点运动学 | 1 |
| 1. 质点对固定坐标系的运动 | 1 |
| 1.1. 运动的描述(1) 1.2. 矢径、位移、速度及加速度(2) 1.3. 在直角坐标系中, 矢径、速度与加速度之间的关系(3) | |
| 2. 相对运动及牵连运动 | 5 |
| 2.1. 动坐标系(5) 2.2. 动坐标系作平移运动(6) 2.3. 动坐标系绕固定点转动(7) 2.4. 动坐标系既有平移运动又有转动运动(10) | |
| 3. 两次及两次以上的相对运动及牵连运动 | 11 |
| 3.1. 两次相对运动及牵连运动(11) 3.2. 多次相对运动及牵连运动(14) | |
| 4. 用曲线坐标系来描述质点的运动 | 15 |
| 4.1. 坐标曲面、坐标曲线及坐标轴(15) 4.2. 柱面坐标系(17) 4.3. 球面坐标系(18) | |
| § 1.2. 刚体运动学 | 19 |
| 1. 刚体运动的几种简单形式 | 19 |
| 1.1. 刚体的运动自由度(19) 1.2. 刚体的几种简单运动(20) | |
| 2. 刚体绕固定点的转动 | 22 |
| 2.1. 确定刚体位置的广义坐标(22) 2.2. 刚体的角位移、瞬时转轴及角速度(28) 2.3. 转动运动的合成与分解(29) | |
| 3. 刚体的一般运动 | 33 |
| 3.1. 刚体的一般运动分解为平移及转动两种运动(33) 3.2. 作一般运动时, 刚体内速度和加速度的分布(34) 3.3. 刚体的螺旋运动及瞬时螺旋轴(35) 3.4. 刚体的相对运动及牵连运动(36) | |
| § 1.3. 物体在地球附近的运动 | 37 |
| 1. 几种通常采用的坐标系以及各坐标系之间的相对运动 | 37 |
| 1.1. 几种通常采用的坐标系(38) 1.2. 太阳的运动及地球绕太阳的公转运动(40) 1.3. 地球的自转运动及地球的几何形状(42) 1.4. 坐标系之间的相对运动(45) | |
| 2. 地理坐标系的角速度及角加速度 | 46 |
| 2.1. 球面坐标表示法(47) 2.2. 相对速度分量表示法(47) 2.3. 物体沿斜航线航行(48) 2.4. 物体在通过地心的平面内运动(49) | |
| 3. 运动物体质量中心的加速度 | 51 |
| 3.1. 用球面坐标来表示加速度(51) 3.2. 用相对速度分量来表示加速度(52) 3.3. 轨道受限制时物体质量中心的加速度(53) 3.4. 在通过地心的平面内运动时物体质量中心的加速度(53) | |

| | |
|--|-----|
| 第二章 动力学 | 56 |
| § 2.1. 解决动力学问题的基本方法..... | 56 |
| 1. 应用牛顿定律逐点地求运动轨迹..... | 56 |
| 2. 应用变分学方法求运动轨迹..... | 56 |
| 3. 物体的平衡问题..... | 57 |
| 4. 牛顿动力学与分析动力学两种方法的比较..... | 58 |
| 5. 本章的内容..... | 59 |
| § 2.2. 质点动力学..... | 59 |
| 1. 运动方程式及其积分..... | 59 |
| 1.1. 牛顿定律及质点的运动方程式(59) 1.2. 运动方程式对时间的积分——动量定理(61) | |
| 1.3. 运动方程式对空间的积分(62) 1.4. 惯性坐标系作等速直线运动时质点的运动方程式及其积分(64) | |
| 1.5. 在非惯性坐标系中质点的运动方程式(65) | |
| 2. 质点运动的动量矩定理..... | 66 |
| 2.1. 动量矩的定义(66) 2.2. 对惯性坐标系的动量矩定理(66) | |
| 2.3. 对非惯性坐标系的动量矩定理(68) | |
| 3. 质点在有心力场中的运动..... | 69 |
| 3.1. 有心力场(69) 3.2. 质点在有心力场中的运动方程式(70) | |
| 3.3. 运动方程式的积分(74) | |
| § 2.3. 质点系及刚体动力学..... | 77 |
| 1. 质点系动力学..... | 77 |
| 1.1. 定义及符号(77) 1.2. 质心运动定理(78) | |
| 1.3. 对惯性坐标系原点的动量矩定理(79) | |
| 1.4. 对质量中心的动量矩定理(80) | |
| 1.5. 对非惯性坐标系原点的动量矩定理(81) | |
| 1.6. 质点系作一般运动时的动力学问题(83) | |
| 1.7. 质点系运动方程式对空间的积分(83) | |
| 2. 刚体动力学..... | 84 |
| 2.1. 刚体的两种简单运动(85) | |
| 2.2. 刚体绕固定点的转动(86) | |
| 2.3. 刚体的一般运动(91) | |
| 2.4. 刚体的动能及势能(93) | |
| § 2.4. 分析动力学..... | 95 |
| 1. 引言..... | 95 |
| 2. 约束条件及约束力..... | 96 |
| 2.1. 几何约束(96) | |
| 2.2. 约束力及主动力(96) | |
| 2.3. 可能位移和真实位移(97) | |
| 2.4. 理想约束(98) | |
| 2.5. 稳定约束和不稳定约束(99) | |
| 2.6. 运动约束(100) | |
| 2.7. 自由度和广义坐标(101) | |
| 3. 可能位移原理..... | 102 |
| 3.1. 采用直角坐标系时的可能位移原理(102) | |
| 3.2. 采用广义坐标时的可能位移原理(103) | |
| 3.3. 广义力的物理意义及其求法(104) | |
| 3.4. 系统在有位力场中的平衡条件(106) | |
| 3.5. 应用可能位移原理解决平衡问题的步骤(107) | |
| 4. 哈密顿原理..... | 108 |
| 4.1. 达朗伯原理及物体运动时的可能位移原理(108) | |
| 4.2. 哈密顿原理的推导(109) | |
| 4.3. 变分学中的欧拉方程式(111) | |

| | |
|---------------------------------------|---|
| 5. 拉格朗日方程式及其积分..... | 112 |
| 5.1. 质点及质点系的拉格朗日方程式(112) | 5.2. 拉格朗日方程式的几种特殊形式(115) |
| 5.3. 拉格朗日方程式的积分(117) | |
| 6. 罗兹方程式..... | 119 |
| 第三章 两自由度进动陀螺的动力学..... | 121 |
| § 3.1. 引言..... | 121 |
| 1. 基本陀螺..... | 121 |
| 2. 框架系统..... | 122 |
| 3. 基本陀螺的进动规律及进动自由度..... | 123 |
| 4. 陀螺力矩..... | 125 |
| 5. 基本陀螺的两个主要特性及其应用..... | 126 |
| 6. 本章的内容..... | 128 |
| § 3.2. 陀螺的运动方程式..... | 128 |
| 1. 基本陀螺的欧拉方程式..... | 128 |
| 1.1. 动坐标系(128) | 1.2. 动坐标系的角速度及陀螺的动量矩(128) |
| 1.3. 基本陀螺的运动方程式(129) | |
| 2. 用绕内、外两个框架轴的转角为广义坐标时基本陀螺的运动方程式..... | 130 |
| 2.1. 应用欧拉方程式求基本陀螺的运动方程式(130) | 2.2. 考虑了轴承的约束力矩、摩擦力矩和外加力矩时陀螺的运动方程式(131) |
| 2.3. 应用拉格朗日方程式求基本陀螺的运动方程式(136) | |
| 3. 用欧拉角为广义坐标时基本陀螺的运动方程式..... | 137 |
| 4. 考虑内、外框架质量时陀螺的运动方程式..... | 138 |
| 4.1. 应用欧拉方程式推导陀螺的运动方程式(138) | 4.2. 应用拉格朗日方程式求陀螺的运动方程式(139) |
| 5. 陀螺运动方程式的简化..... | 140 |
| 5.1. 陀螺运动方程式的线性化(140) | 5.2. 用角速度沿动坐标轴的分量为参数时陀螺的简化运动方程式(143) |
| 5.3. 分析含有陀螺的力学系统的一种简化方法(144) | |
| § 3.3. 基本陀螺的传递函数、章动及进动运动..... | 145 |
| 1. 简化了的陀螺运动方程式..... | 145 |
| 2. 基本陀螺的传递函数及方块图..... | 146 |
| 2.1. 运动方程式的拉氏变换(146) | 2.2. 基本陀螺的传递函数..... |
| 2.2. 基本陀螺的传递函数..... | 149 |
| 3. 基本陀螺的章动运动..... | 150 |
| 4. 基本陀螺的进动运动..... | 151 |
| 4.1. 输入为正弦函数时陀螺的稳定状态解(151) | 4.2. 输入为阶跃函数时陀螺的稳定状态解(153) |
| 4.3. 陀螺的进动运动方程式(154) | 4.4. 用欧拉角为广义坐标时陀螺的进动运动方程式(156) |
| § 3.4. 基本陀螺对几种典型输入的动态反应..... | 158 |
| 1. 动态分析..... | 158 |
| 1.1. 典型输入(158) | 1.2. 陀螺运动轨迹图(158) |
| 2. 输入为脉冲函数时陀螺的运动..... | 159 |

| | |
|---|--|
| 3. 输入为阶跃函数时陀螺的运动 | 163 |
| 4. 输入为正弦函数时陀螺的运动 | 165 |
| 5. 输入为方波函数时陀螺的运动 | 167 |
| 6. 框架轴承的摩擦力矩对陀螺章动运动的影响 | 169 |
| 7. 由于静不平衡及动不平衡而引起陀螺的运动 | 170 |
| 7.1. 由于静不平衡而引起陀螺的运动(170) | 7.2. 由于陀螺转子的动不平衡而引起陀螺的运动(171) |
| 8. 沿着转子轴方向作用的力矩对陀螺进动运动的影响 | 173 |
| § 3.5. 陀螺对中间动坐标系的相对运动 | 174 |
| 1. 用矢量方程式表示陀螺的进动运动 | 174 |
| 1.1. 采用中间动坐标系时陀螺的进动运动方程式(174) | 1.2. 陀螺对动坐标系的相对进动角速度的表达式(175) |
| 1.3. 保持陀螺对动坐标系没有相对进动运动的条件(176) | |
| 2. 用陀螺绕内、外两个框架轴的转角来表示它对动坐标系的相对进动运动 | 177 |
| 2.1. 中间动坐标系及其角速度(177) | 2.2. 陀螺对中间动坐标系的相对进动运动方程式(178) |
| 2.3. 绕框架轴的转角 α 及 β 都很小时, 陀螺的相对进动运动方程式及方块图(179) | |
| 3. 陀螺对中间动坐标系的视运动 | 181 |
| 3.1. 动坐标系绕空间固定方向转动时, 陀螺对动坐标系的视运动(181) | 3.2. 用陀螺绕内、外两个框架轴的转角来表示它对地理坐标系的视运动(182) |
| § 3.6. 由于运动方程式中非线性项目的整流作用而引起陀螺的漂移 | 185 |
| 1. 引言 | 185 |
| 2. 由于章动运动而引起的漂移 | 186 |
| 2.1. 用逐步求近法来研究陀螺受冲击后的运动(186) | 2.2. 根据内、外两个框架的运动来研究陀螺在章动运动过程中的漂移现象(188) |
| 3. 由于物体的转动运动而引起陀螺的漂移 | 189 |
| 3.1. 内、外两个框架的运动规律(190) | 3.2. 内、外两个框架的运动方程式(191) |
| 3.3. 运动物体作等速转动时陀螺的漂移(192) | 3.4. 运动物体作一般转动运动时陀螺的漂移(193) |
| 第四章 两自由度进动陀螺的应用——指示地理坐标系坐标轴方向的陀螺仪表 | 195 |
| § 4.1. 引言 | 195 |
| § 4.2. 在运动物体中用单自由度复摆作铅垂线方向的指示仪表 | 199 |
| 1. 支点无加速度时摆的运动 | 199 |
| 1.1. 复摆的运动方程式(199) | 1.2. 有初始偏差时复摆的运动(201) |
| 2. 支点在水平方向有加速度时摆的运动 | 202 |
| 3. 支点在水平方向振荡时摆的运动 | 204 |
| 4. 增长复摆振荡周期所存在的问题 | 205 |
| § 4.3. 垂直陀螺 | 206 |
| 1. 垂直陀螺的运动方程式及其方块图 | 206 |
| 1.1. 垂直陀螺的运动方程式(206) | 1.2. 地理坐标系的转动角速度及其分量(207) |
| 1.3. 修正力矩(208) | 1.4. 垂直陀螺的方块图(213) |
| 2. 陀螺摆 | 216 |

| | | | |
|-------------------------------------|---|--------------------------------|------------|
| 2.1. 用欧拉角为广义坐标来分析陀螺摆的运动(216) | 2.2. 用绕内、外两个框架轴的 转角为广义坐标来分析陀螺摆的运动(219) | 2.3. 具有液体阻尼器的陀螺摆(220) | |
| 3. 典型修正装置的构造及其工作原理 | | | 222 |
| 3.1. 气动修正装置(223) | 3.2. 倒立摆摩擦轮式修正装置(224) | 3.3. 气泡水准仪 式修正装置(225) | |
| | 3.4. 磁铁涡流式修正装置(226) | 3.5. 旋转水银摆式修正装 置(227) | |
| | 3.6. 滚珠式修正装置(229) | | |
| 4. 采用线性控制方案时垂直陀螺的性能 | | | 231 |
| 4.1. 比例控制方案(231) | 4.2. 比例加积分控制方案(233) | 4.3. 摆线的偏差角对垂 直陀螺性能的影响(234) | |
| | 4.4. 例题(235) | | |
| 5. 采用非线性控制方案时垂直陀螺的性能 | | | 238 |
| 6. 垂直陀螺的盘旋误差及其补偿方法 | | | 242 |
| 6.1. 具有比例控制特性的垂直陀螺的盘旋误差(242) | 6.2. 具有开关控制特性的垂直 陀螺的盘旋误差(245) | 6.3. 盘旋误差的补偿方法(249) | |
| 7. 垂直陀螺的框架误差 | | | 252 |
| § 4.4. 航向陀螺仪表 | | | 254 |
| 1. 航向陀螺仪表的功用、运动方程式及方块图 | | | 254 |
| 1.1. 航向陀螺仪表的功用(254) | 1.2. 航向陀螺仪表的运动方程式及方块图(256) | | |
| 1.3. 保证陀螺转子轴在子午面内的几种方法(256) | | | |
| 2. 方向陀螺仪或陀螺半罗盘 | | | 258 |
| 3. 陀螺磁罗盘 | | | 260 |
| 3.1. 工作原理及方块图(260) | 3.2. 陀螺磁罗盘的构造举例(262) | 3.3. 陀螺磁铁(265) | |
| 4. 陀螺罗盘 | | | 266 |
| 4.1. 陀螺罗盘对于地球坐标系的相对进动运动方程式及方块图(266) | 4.2. 具有阻尼 作用的陀螺罗盘(272) | 4.3. 干扰力矩对陀螺罗盘的影响(278) | |
| | 4.4. 陀螺罗盘对于 地理坐标系的相对进动运动(279) | | |
| 5. 航向陀螺仪表的框架误差 | | | 287 |
| 第五章 单自由度进动陀螺及其应用 | | | 290 |
| § 5.1. 引言 | | | 290 |
| 1. 单自由度进动陀螺的工作原理 | | | 290 |
| 2. 单自由度进动陀螺的功用 | | | 291 |
| 3. 内容 | | | 294 |
| § 5.2. 单自由度进动陀螺的运动方程式及其主要类型 | | | 295 |
| 1. 单自由度陀螺运动的描述 | | | 295 |
| 2. 单自由度陀螺的运动方程式 | | | 295 |
| 3. 单自由度陀螺的三种主要类型 | | | 297 |
| 3.1. 积分陀螺(297) | 3.2. 测速陀螺(297) | 3.3. 两次积分陀螺(298) | |
| § 5.3. 浮子式积分陀螺 | | | 298 |
| 1. 浮子式积分陀螺的构造和它的方块图 | | | 298 |
| 2. 浮子式积分陀螺的性能 | | | 300 |
| 2.1. 静态性能(300) | 2.2. 动态性能(301) | | |

| | |
|-------------------------------|-----|
| § 5.4. 测速陀螺 | 302 |
| 1. 引言 | 302 |
| 2. 角位移式单自由度测速陀螺 | 302 |
| 2.1. 角位移式测速陀螺的构造及方块图(302) | 302 |
| 2.2. 角位移式测速陀螺的性能(303) | 303 |
| 3. 力平衡式测速陀螺 | 306 |
| 4. 力平衡式与角位移式两种测速陀螺性能的比较 | 307 |
| § 5.5. 浮子式积分陀螺的应用 | 309 |
| 1. 引言 | 309 |
| 2. 速度平衡式测角系统 | 310 |
| 3. 力平衡式单轴空间稳定平台 | 312 |
| 4. 空间积分器 | 314 |
| 4.1. 空间积分器的构造及其工作原理(314) | 314 |
| 4.2. 空间积分器的简化运动方程式及方块图(315) | 315 |
| 4.3. 空间积分器的运动方程式及方块图(317) | 317 |
| § 5.6. 浮子式积分陀螺的几个主要部件 | 318 |
| 1. 引言 | 318 |
| 2. 陀螺电机 | 319 |
| 3. 角度转换器 | 320 |
| 4. 微动同步器式力矩马达 | 322 |
| 5. 浮子式陀螺的框架支承方法 | 324 |
| 5.1. 宝石轴承(324) | 324 |
| 5.2. 空气静压轴承(325) | 325 |
| 5.3. 电磁轴承(326) | 326 |
| 5.4. 静电轴承(328) | 328 |
| 6. 悬浮液 | 328 |
| 7. 高速轴承 | 328 |
| § 5.7. 浮子式陀螺的漂移和影响漂移的一些因素 | 329 |
| 1. 漂移的定义 | 329 |
| 2. 几种典型的系统对陀螺漂移速度的要求 | 330 |
| 3. 作用在陀螺上干扰力矩的分类 | 331 |
| 3.1. 与加速度无关的干扰力矩(332) | 332 |
| 3.2. 与加速度成比例的干扰力矩(332) | 332 |
| 3.3. 与加速度平方成比例的干扰力矩(335) | 335 |
| § 5.8. 浮子式陀螺的试验 | 336 |
| 1. 引言 | 336 |
| 2. 测试方法及测试设备 | 337 |
| 2.1. 测试方法(337) | 337 |
| 2.2. 测试设备(340) | 340 |
| 3. 陀螺的安装方位与试验结果的关系 | 342 |
| 3.1. 采用转台反馈法时几种典型的陀螺安装方法(343) | 343 |
| 3.2. 采用力矩反馈法时几种典型的陀螺安装方法(345) | 345 |
| 3.3. 绕地球自转轴的滚转试验方法(346) | 346 |
| 4. 浮子式单自由度陀螺性能的一种表示方法 | 347 |
| 4.1. 相对精确度及相对百分误差(347) | 347 |
| 4.2. 相对输入(348) | 348 |
| 4.3. 表示陀螺性能的特性曲线(348) | 348 |
| 4.4. 绝对误差(349) | 349 |
| 5. 浮子式积分陀螺的典型试验结果 | 349 |

| | |
|---|-------------------------------------|
| § 5.9. 用两自由度及单自由度陀螺组成其他类型测量物体运动的陀螺仪表····· | 350 |
| 1. 引言····· | 350 |
| 2. 用两自由度陀螺来组成测量角速度的陀螺仪表····· | 351 |
| 2.1. 系统的结构示意图及方块图(351) | 2.2. 用一个两自由度陀螺组成两轴的测速陀螺(353) |
| 3. 用一个两自由度陀螺同时来测量运动物体的角速度及角加速度····· | 354 |
| 4. 用浮子式积分陀螺组成积分缝加速度计····· | 355 |
| 第六章 新型陀螺····· | 358 |
| § 6.1. 引言····· | 358 |
| § 6.2. 振动陀螺····· | 359 |
| 1. 音叉振动陀螺····· | 359 |
| 1.1. 音叉振动陀螺的构造及工作原理(359) | 1.2. 音叉振动陀螺的运动方程式(361) |
| 1.3. 误差分析(364) | 1.4. 音叉振动陀螺与单自由度测速陀螺的比较(367) |
| 2. 转子振动陀螺····· | 369 |
| 2.1. 用单自由度弹簧支承的转子振动陀螺(369) | 2.2. 用两自由度弹簧支承的转子振动陀螺(373) |
| 2.3. 二次谐波转子振动陀螺(376) | 2.4. 转子振动陀螺的优缺点(377) |
| § 6.3. 粒子陀螺····· | 378 |
| 1. 基本粒子的陀螺磁效应····· | 378 |
| 1.1. 单个基本粒子的磁矩及动量矩(378) | 1.2. 单个基本粒子在磁场中的进动运动及核磁共振现象(379) |
| 1.3. 大量质子在磁场中进动运动的平均特性(380) | 1.4. 大量质子对于动坐标系的相对进动运动(381) |
| 2. 粒子两自由度陀螺····· | 381 |
| 3. 粒子单自由度测速陀螺····· | 382 |
| 3.1. 顺磁共振式单自由度测速陀螺(382) | 3.2. 磁感应式单自由度粒子测速陀螺(383) |
| § 6.4. 低温超导体陀螺····· | 385 |
| 1. 低温超导现象····· | 385 |
| 2. 采用超导轴承的自由转子陀螺····· | 387 |
| 3. 低温超导粒子陀螺····· | 388 |
| § 6.5. 流体转子陀螺····· | 389 |
| 1. 流体转子陀螺的工作原理····· | 389 |
| 2. 容器转动的流体转子陀螺····· | 391 |
| 2.1. 流体的压力分布(391) | 2.2. 用压力转换器或差压转换器作为流体转子陀螺的输出装置(392) |
| 2.3. 流体自转轴与容器自转轴之间的夹角的其他几种测量方法(394) | 2.4. 流体转子陀螺的应用(394) |
| 3. 电磁流体陀螺····· | 396 |
| 3.1. 电磁流体陀螺的构造及工作原理(396) | 3.2. 其他结构形式的电磁流体陀螺(398) |
| § 6.6. 自由转子陀螺····· | 399 |
| 1. 自由转子陀螺的工作原理····· | 399 |
| 2. 静电式自由转子陀螺····· | 400 |
| 3. 气压支承式自由转子陀螺····· | 401 |

第一章 运动学

§ 1.1. 质点运动学

1. 质点对固定坐标系的运动

1.1. 运动的描述

运动学是从几何学的观点来研究物体的运动，它包括质点运动学及刚体运动学两个主要内容。在运动学中，只是讨论物体运动的几何性质，而不牵涉到产生运动以及改变运动的原因。因而在运动学所讨论的问题中，只包括时间与空间两个因素，而不包括作用力、质量、动量等物理概念。所以有人称运动学为运动几何学。

为了说明物体的位置变化情形，在运动学中引用了一些专门名词。这些名词的意义，在这里只作简略的说明。

参考系及运动相对性 一个物体在空间的位置只能相对于另一个物体而确定，这样，后一个物体就构成了描述前一个物体运动时的参考系。当物体对于参考系的位置有了改变时，我们就说这个物体已经发生了运动；反之，如果一个物体对于参考系没有任何位置的改变，我们就说这个物体是静止的。所谓运动或是静止，都是指一个物体对于另一个物体的相对位置而言。因此，物体的运动和静止都只具有相对的意义。在描述物体运动时，必须说明所采用的参考系，这样才使所描述的运动具有正确的意义。

坐标系 要精确地说明一个物体对于另一个物体的相对位置，我们需要应用解析几何学中的方法，选用坐标系。把坐标原点及一组坐标轴都固定在作为参考系的物体上，其它物体对于参考系有运动时，则用来确定这个物体对于参考系相对位置的坐标将发生变化。所以坐标系可以看成是参考系的数学抽象。亦可以说，我们用坐标系代替了参考系。在图 1.1 中， $IXYZ$ 是一组直角坐标系，它固定在作为参考系的物体上。假设：在某一瞬时，有一个质点位于图中 P 点处，直线 IP 沿三根坐标轴的投影分别是 X 、 Y 及 Z ； Q 点是 P 点在 XY 平面上的投影， $\angle XIQ = \theta$ ； $\angle QIP = \varphi$ ； $IQ = \rho$ 及 $IP = R$ 。我们就可以用三套不同的坐标参数来表示 P 点的位置：(1) 直角坐标系，坐标参数是 (X, Y, Z) ；(2) 柱面坐标系，坐标

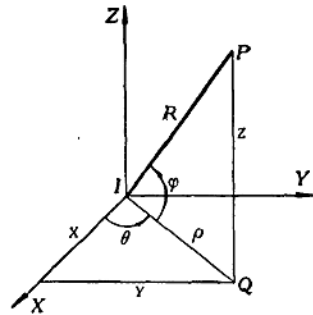


图 1.1 描述质点在空间位置的坐标系

参数是 (ρ, θ, Z) ; 及(3)球面坐标系或称极坐标系, 坐标参数是 (R, θ, φ) .

自由度及广义坐标 在任意坐标系中, 要确定一个物体的位置所需要独立坐标的数目, 称为这个物体的运动自由度. 例如: 质点作直线运动或者沿着空间已知曲线运动时, 只要知道质点沿弧线所走过的路程, 就可以完全确定了它在空间的位置, 这种运动属于单自由度运动; 在空间作任意运动的质点具有三个自由度; 确定一个刚体在空间的位置, 则需要六个参数, 因而刚体作一般运动时具有六个运动自由度.

为了完全确定物体的位置而选定的任意一组彼此独立的坐标参数, 称为这个物体的广义坐标. 在选取坐标时, 除去直角坐标 X, Y, Z 之外, 我们亦可以用角度 φ, θ 及从物体中的一点到某些固定点的距离等参数来确定物体在空间的位置. 当一个质点在空间作任意运动时, 在一般情形时, 需要三个广义坐标 q_1, q_2 及 q_3 才能完全确定这个质点在空间的位置. 图 1.1 中的三种坐标系可以看成是描述质点运动的广义坐标的三种具体形式. 此外, 在确定一个飞行物体的位置时, 有时在地面上三个不同的地点各建立一个雷达站, 来测量物体到这三点的直线距离, 从而确定物体在空间的位置. 在这种情形, 飞行物体到三个雷达站的距离, 就成为确定这个物体在空间位置的三个广义坐标了.

运动方程式及运动轨迹 质点对参考系有相对运动时, 则其坐标的数值将随时间而变化. 假设描述质点运动的三个广义坐标随时间而变化规律为已知时, 即已知下列三个时间函数:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= f_1(t), \\ q_2 &= f_2(t), \\ q_3 &= f_3(t); \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

则质点的其他运动特性亦就因而确定. 这三个方程式被称为质点在空间的运动方程式.

质点在空间运动时所画出的曲线被称为这个质点的运动轨道, 或称轨迹. 在坐标系中, 描述这个曲线的方程式, 被称为这个质点的轨道方程式. 显然, 式(1.1)所表示的运动方程式可作为运动轨道的参数方程式. 我们当然亦可以从参数方程式中消去时间, 从而得到只含有广义坐标 q_1, q_2 及 q_3 的轨道方程式.

1.2. 矢径、位移、速度及加速度

质点 m 在一个坐标系中的位置固然可以用广义坐标 q_1, q_2 及 q_3 来表示, 我们亦可以用由坐标系的原点 I 到质点所在位置的矢量 \mathbf{R} 来表示, 这称为质点的位置矢量, 或称矢径. 在图 1.2(a) 中, $IXYZ$ 是固定在参考系上的坐标系, 当时间为 t 时, 一个质点位于图中 P_1 点处, 我们用矢径 $\mathbf{R}(t)$ 表示 P_1 点在坐标系中的位置. 经过一段时间 Δt 以后, 质点运动到图中的 P_2 点处, 而 P_2 点的位置则用矢径 $\mathbf{R}(t + \Delta t)$ 来表示. 在这一段时间内, 质点沿着轨迹曲线所移动的实际距离被称为质点所走过的路程; 而 $\mathbf{R}(t + \Delta t)$ 与 $\mathbf{R}(t)$ 两个矢径之差则等于另一个矢量 $\overline{P_1P_2}$, 我们用 $\Delta \mathbf{R}$ 来表示这个矢量, 即:

$$\Delta \mathbf{R} = \overrightarrow{P_1 P_2} = \mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t), \quad (1.2)$$

这个矢量 $\Delta \mathbf{R}$ 被称为质点在从 t 到 $t + \Delta t$ 这一段时间内的位移。所以，质点所走过的路程是一个标量，而位移则是一个矢量。

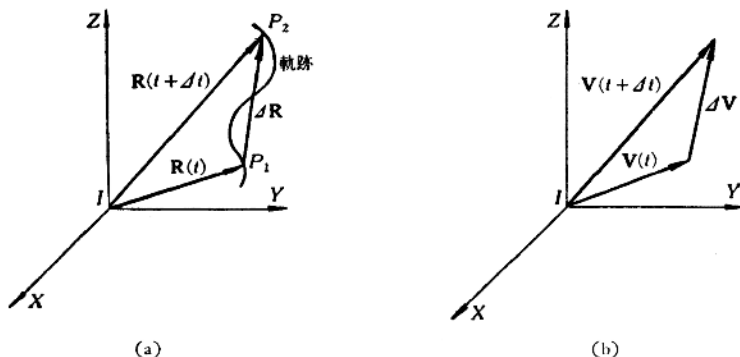


图 1.2 质点运动的矢径、位移、速度及加速度之间的关系

用时间标量 Δt 来除位移 $\Delta \mathbf{R}$ ，得到另一个矢量，这就是质点在 Δt 一段时间内的平均速度。如果时间间隔 Δt 趋近于零时，可以求得平均速度的瞬时极限值，这代表质点的运动速度，即：

$$\mathbf{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{R}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{R}}{dt}. \quad (1.3)$$

显然，平均速度这个矢量的方向与 $\Delta \mathbf{R}$ 的方向相同，而速度矢量 \mathbf{V} 的方向则与 $\Delta \mathbf{R}$ 极限的方向相同。因此，质点的速度方向是沿着运动轨迹的切线方向。

应用同样的方法，我们亦可以说明质点的加速度的意义。在图 1.2(b) 中， $\mathbf{V}(t)$ 及 $\mathbf{V}(t + \Delta t)$ 分别代表在时间 t 及 $t + \Delta t$ 时，质点的速度矢量。这两个速度矢量之差，即 $\Delta \mathbf{V}$ ，代表在 Δt 一段时间内质点速度的改变情形。根据矢量 $\Delta \mathbf{V}$ ，可以得到质点的平均加速度及加速度：

$$\mathbf{W} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{V}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{V}}{dt}, \quad (1.4)$$

因为 Δt 是一个标量，所以加速度 \mathbf{W} 亦是一个矢量，它的方向与矢量 $\Delta \mathbf{V}$ 的方向相同。因此：不但速度矢量的大小改变时，使质点具有加速度；而且速度矢量的方向改变时，同样亦使质点具有加速度。前者被称为质点运动的切线加速度，它是沿着运动轨迹的切线方向；后者被称为质点运动的向心加速度，它是在运动轨迹的密切平面内，并沿着主法线的方向。因此，沿着轨迹副法线方向的加速度为零。

1.3. 在直角坐标系中，矢径、速度与加速度之间的关系

在图 1.2(a) 中，设 (X, Y, Z) 是 P_1 点的直角坐标，并用 \mathbf{i}_r 、 \mathbf{j}_r 及 \mathbf{k}_r 分别表示沿直角

坐标轴 IX 、 IY 及 IZ 的单位矢量, 则 P_1 点的矢径可用直角坐标参数来表示, 如式 (1.5) 所示:

$$\mathbf{R} = \mathbf{i}_I X + \mathbf{j}_I Y + \mathbf{k}_I Z. \quad (1.5)$$

既然 \mathbf{i}_I 、 \mathbf{j}_I 及 \mathbf{k}_I 都是沿着空间固定坐标轴的单位矢量, 它们的大小及方向都是固定不变的, 因此, 在质点的运动过程中, \mathbf{i}_I 、 \mathbf{j}_I 及 \mathbf{k}_I 都不是时间的函数, 因而 $\frac{d\mathbf{i}_I}{dt}$ 、 $\frac{d\mathbf{j}_I}{dt}$ 及 $\frac{d\mathbf{k}_I}{dt}$ 都等于零. 将式(1.5)代入式(1.3)中, 并进行微分, 即可求得在直角坐标系中速度的表达式:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{i}_I \frac{dX}{dt} + \mathbf{j}_I \frac{dY}{dt} + \mathbf{k}_I \frac{dZ}{dt} + \frac{d\mathbf{i}_I}{dt} X + \frac{d\mathbf{j}_I}{dt} Y + \frac{d\mathbf{k}_I}{dt} Z = \\ &= \mathbf{i}_I \frac{dX}{dt} + \mathbf{j}_I \frac{dY}{dt} + \mathbf{k}_I \frac{dZ}{dt}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

如果用 V_x 、 V_y 及 V_z 分别表示速度矢量沿着 IX 、 IY 及 IZ 三根坐标轴的分量时, 则:

$$\left. \begin{aligned} V_x &= \frac{dX}{dt}, \\ V_y &= \frac{dY}{dt}, \\ V_z &= \frac{dZ}{dt}, \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

这就是说, 对矢径 \mathbf{R} 的三个分量 X 、 Y 及 Z 分别对时间进行微分时, 即可求得速度矢量沿着这三根坐标轴的分量.

同理, 将式(1.6)代入式(1.4), 并进行微分, 即可求得加速度的表达式:

$$\mathbf{W} = \mathbf{i}_I \frac{dV_x}{dt} + \mathbf{j}_I \frac{dV_y}{dt} + \mathbf{k}_I \frac{dV_z}{dt} = \mathbf{i}_I \frac{d^2X}{dt^2} + \mathbf{j}_I \frac{d^2Y}{dt^2} + \mathbf{k}_I \frac{d^2Z}{dt^2}, \quad (1.8)$$

所以对速度矢量 \mathbf{V} 的三个分量 V_x 、 V_y 及 V_z 分别进行一次微分, 或者对位置矢量 \mathbf{R} 的三个分量 X 、 Y 及 Z 进行两次微分, 就可以求得加速度沿着三根坐标轴的分量.

这里要注意, 式(1.6)及(1.8)所表示的矢径、速度及加速度沿坐标轴三个分量之间的简单关系式, 是根据单位矢量 \mathbf{i}_I 、 \mathbf{j}_I 及 \mathbf{k}_I 在空间的方向并不受质点运动的影响而求得的. 如果坐标系本身有转动运动, 因而改变了坐标轴的方向, 或者我们不是沿着固定的方向来把一个矢量分解为分量时, 那么沿着这些方向的单位矢量的大小虽然永远是常数, 可是它们的方向将是时间的函数, 因而这些单位矢量对时间的微分, 都不会恒等于零. 在这种情形时, 矢径分量、速度分量与加速度分量之间的关系式, 就要变得比较复杂. 例如: 当我们选用广义坐标 q_1 、 q_2 及 q_3 来描述质点的位置时, $\frac{dq_1}{dt}$ 、 $\frac{dq_2}{dt}$ 及 $\frac{dq_3}{dt}$ 就不一定分别地代表质点的速度沿着 q_1 、 q_2 及 q_3 三根广义坐标轴方向的分量; 而 $\frac{d^2q_1}{dt^2}$ 、 $\frac{d^2q_2}{dt^2}$ 及 $\frac{d^2q_3}{dt^2}$ 亦不一定代表质点的加速度沿着这三根广义坐标轴方向的分量. 这个问题, 属于采用曲线坐标系来描述物体的运动问题, 将在下面第四小节中再进行讨论.

2. 相对运动及牵联运动

2.1. 动坐标系

在前一小节里,我們研究了质点相对于某个坐标系的运动;并且求得了在这个坐标系中,质点的矢径、速度及加速度之間的关系式。現在我們进而研究一种较为复杂的情形,即是:一个质点对于某一个坐标系有相对运动,而这个作为运动参考的坐标系本身对于另一个参考系亦有相对运动,我們希望求得质点对于后一个坐标系的运动情形。在实际問題中,后面这个参考系本身仍然可以有运动。为了便于說明問題起見,我們称前一个参考坐标系为动坐标系,后一个参考坐标系为固定坐标系。我們希望通过质点对于动坐标系的相对运动以及动坐标系本身的运动,来間接地求得质点对于固定坐标系的运动。

在第一小节中所求得的公式,只代表质点对于动坐标系的相对运动。当一个质点对于动坐标系沒有相对运动时,我們只能說这个质点对于选取作为参考的动坐标系的相对运动为零,而不能說这个质点对于固定坐标系亦沒有运动。因为动坐标系本身运动时,将带动质点一起运动,因而引起质点对于固定坐标系的运动,这被称为质点的牵联运动。因此,在一般情形时,一方面质点对于动坐标系有相对运动,另一方面动坐标系本身的运动又使这个质点具有牵联运动,而质点对于固定坐标系的运动,則由这两种运动組合而成。这样組合而成的运动称为质点对固定坐标系的绝对运动。

在許多工程技术問題中,我們經常会遇到采用动坐标来間接地描述一个质点对于另一个参考系的运动。譬如:一个人在飞机或者任何其他的运动物体上移动时,这个人对于飞机就有相对运动;如果人坐在飞机上不动,則相对运动为零;可是飞机本身对于地球有运动,固定在飞机上的坐标系当然是动坐标系,因而飞机的运动将使人对于地球具有牵联运动。这样,在研究人对于地球的运动时,可以考虑是由人对于飞机的相对运动以及由于飞机运动而产生的牵联运动組合而成。我們可以把問題向前推广一步,进而考虑地球的运动。地球本身一方面围绕太阳作曲綫运动,而本身又有自轉运动,所以固定在地球上的坐标系亦是动坐标系。这样,人对于飞机有相对运动,而飞机对于地球亦有相对运动;飞机的运动使人具有牵联运动,而地球的运动又使飞机具有牵联运动,在这个运动問題中,就包括了两次相对运动以及两次牵联运动。如果把問題更向前推广一步,可以考虑飞机上安装了一个平台,平台上又安装了一个加速度計。那么,加速度計中的質量对于平台、平台对于飞机、飞机对于地球、地球对于太阳、太阳对于惯性坐标系都有相对运动。在这个以及許多类似的問題中,經常要选择几套中間动坐标系,来描述一个物体的运动,因而这个物体的运动是由两次、三次、四次或者更多次的相对运动及牵联运动組合而成。

在这一小节中,我們首先将要分析当动坐标系只有平移运动时所引起的牵联运动;其次討論动坐标系只具有轉动运动时的情形,这里将要証明有关动坐标系的一个基本关系

式,一般称为柯氏转动坐标定理(Coriolis' theorem of rotating axis);最后再讨论动坐标系既有平移运动又有转动运动的情形。关于两次以及两次以上的相对运动问题,将在下面第三小节中进行讨论。

2.2. 动坐标系作平移运动

在图 1.3 中, $IXYZ$ 是固定坐标系, $Oxyz$ 是动坐标系, 动坐标系对于固定坐标系只有

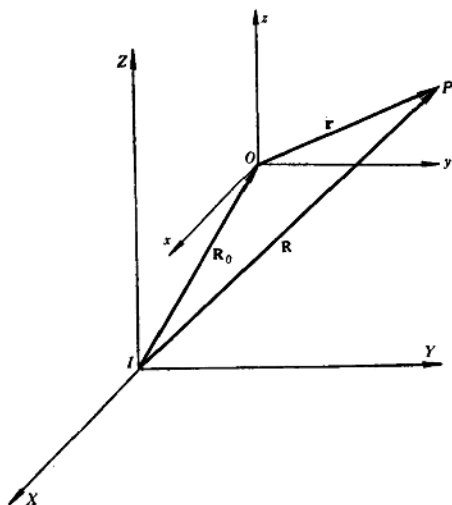


图 1.3 动坐标系作平移运动

平移运动。这个平移运动可以用动坐标系的原点 O 在固定坐标系中的矢径 \mathbf{R}_0 来表示。假设在某一瞬间, 一个质点位于图中 P 点处, 这个质点对于动坐标系的相对运动, 可以用由动坐标系原点 O 到 P 点的矢径 \mathbf{r} 来表示; 而质点对于固定坐标系的绝对运动, 则可以用由 I 到 P 点的矢径 \mathbf{R} 来表示。由图中的三角形 IOP 显然可见:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{r}, \quad (1.9)$$

取上式对时间的微分, 得:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_r, \quad (1.10)$$

对式 (1.10) 的两边, 再进行一次对时间微分, 得:

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_0 + \mathbf{W}_r, \quad (1.11)$$

在上列公式中:

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \text{质点对固定坐标系的速度,}$$

$$\mathbf{V}_0 = \frac{d\mathbf{R}_0}{dt} = \text{动坐标系的平移速度,}$$

$$\mathbf{V}_r = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \text{质点对于动坐标系的相对运动速度,}$$

$$\mathbf{W} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \text{质点对于固定坐标系的加速度,}$$

$$\mathbf{W}_0 = \frac{d\mathbf{V}_0}{dt} = \frac{d^2\mathbf{R}_0}{dt^2} = \text{动坐标系的平移加速度,}$$

$$\mathbf{W}_r = \frac{d\mathbf{V}_r}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \text{质点对于动坐标系的相对加速度.}$$

所以, 当动坐标系只有平移运动时, 质点对于固定坐标系的速度是由质点对于动坐标系的