现代数学译丛

# 非线性微分方程

〔意〕 G. 桑森 R. 康蒂 著

黄启昌 金成桴 史希福 译



科学出版社

## 内 容 简 介

本书叙述非线性微分方程的定性理论. 内容大致分为三个主要部分：二维自治系统相图的详细分析；寻求周期系统周期解的定性方法的综述；对于一般 $n$ 维系统解的渐近性态，特别是稳定性的研究的综合探讨.

读者对象为大学数学系高年级学生、研究生、教师和研究工作者，也可供物理、力学、天文以及无线电工作者参考.

G. Sansone and R. Conti

NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

Pergamon Press, 1964

现代数学译丛

非线性微分方程

〔意〕G. 桑森 R. 康蒂 著

黄启昌 金成桴 史希福 译

责任编辑 刘嘉善 张鸿林

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1983年8月第一版 开本：850×1168 1/32

1983年8月第一次印刷 印张：18

印数：0001—10,650 字数：470,000

统一书号：13031·2335

本社书号：3196·13—1

定价： 3.30 元

# 中 文 版 前 言

G. 桑森教授为了科学和人类的利益献出了漫长的生命岁月之后，于1979年10月13日与世长辞，享年九十一岁.

现在我们合写的这一著作被译为中文出版，这表明中国同行对他的工作的赞赏. 若他仍然在世，他必定会因此而深受感动并引以为荣.

为此，我作为合著者，谨表示我最深切的感激，并且在科学方面，对于世界人民的团结和进步，能进一步地起一份作用，表示我由衷的满意.

R. 康蒂

于佛罗伦萨1980年4月29日

# 序

本书内容大致可以分为三个主要部分：二维自治系统相图的详细分析；寻求周期系统周期解的定性方法的综述；对于一般 $n$ 维系统解的渐近性态，特别是稳定性的研究的综合探讨.

这个英文版仍然保留了意大利文版（1956）的基本内容. 但是，微分方程定性理论最近五年所取得的进展，已经要求对它进行某些修改，其中有些是实质性的修改. 因此，几乎在每一章的末了，都加上了几项补充，参考文献也有相当多的增加.

作者感谢 Stevens 工学院的 Ainsley H. Diamond 博士和 Fairleigh Dickinson 大学的 Maria Castellani 博士为出版本书的英文版所做的工作，感谢 Pergamon 出版社的关心与合作，最后还要感谢科学研究所空军署对我们的工作的支持.

G. 桑森，R. 康蒂

# 目　　录

# 第一章　微分方程组解的一般定理

为了理解本书所讨论的问题所必需的一般定理，可以在任何一本微分方程的现代教科书中找到.

然而，为了使读者免于查阅与所考虑的问题并不紧密相关的繁冗文献，在这一章里，我们将介绍某些一般定理以及一些有用的补充讨论.

## §1. 积 分 曲 线

### 1. 积分曲线. 正向终极时间 $t^+$

(a) 通常我们将讨论常微分方程组(系统)*：

$$dx_i/dt = f_i(t, x_1, \cdots, x_n)\ (i = 1, \cdots, n), \qquad (1.1.1)$$

其中 $(t, x_1, \cdots, x_n)$ 为实欧几里得空间 $S_{n+1}$ 中的点，它在"高"为 $b-a$，"底"为 $D$ 的柱体

$$K:\ a < t < b,\ (x_1, \cdots, x_n) \in D$$

上变化，此处 $D$ 为所有点 $(x_1, \cdots, x_n)$ 所组成的超平面 $S_n$ 的一个区域[1].

特别是，我们可能有 $a = -\infty$ 或者 $b = +\infty$，或者 $D$ 可能是整个超平面. 可能出现这些情形中的两个或三个同时都满足的情形. 因此，$K$ 甚至可能就是点 $(t, x_1, \cdots, x_n)$ 所在的整个空间 $S_{n+1}$.

变量 $t$ 将认为是时间.

除非另做假设，我们假定 $f_i$ 为 $K$ 上的实连续函数.

---

*) 我们一般把常微分方程组译为"系统". ——译者注

1) 区域＝开的连通集.

(b) 设 $P_0=(t_0, x_1^0, \cdots, x_n^0)$ 为$K$中给定一点. 由微分方程基础理论(参看 Sansone [1], 第一卷, 第一章)可知, 应用熟知的存在定理之一,在区间 $t_0\leqslant t<t_1$ (此处 $t_1\leqslant b$) 上,至少可以找到一组 $n$ 个连续函数 $\varphi_i(t)$, 满足方程组 (1.1.1),所以

$$d\varphi_i(t)/dt=f_i(t, \varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t)),$$
$$(t_0\leqslant t<t_1;\ i=1, \cdots, n), \tag{1.1.2}$$

且适合

$$\varphi_i(t_0)=x_i^0 \quad (i=1, \cdots, n). \tag{1.1.3}$$

既然函数 $\varphi_i(t)$ 满足 (1.1.2), 它们在开区间 $(t_0, t_1)$ 内就有连续的导数,而在 $t_0$ 处右导数连续.

这样的一组 $\varphi_i$ 称为 (1.1.1) 在 $[t_0, t_1)$ 上的一个解. 而$K$中由参数方程

$$x_i=\varphi_i(t), \quad t_0\leqslant t<t_1$$

所表示的点集,称为(1.1.1)的经过$P_0$或者由$P_0$出发的积分曲线弧.

(c) 当 $t_1=b$ 时, 我们就称 $t_1$ 为 (b) 中所考虑的曲线弧 $x_i=\varphi_i(t)$ 的正向终极时间. 假如不然, $t_1<b$, 则有两种可能.

第一种情形是: 对于任一有界闭集 $H\subset D$, 存在依赖于$H$的 $\bar{t}$, $t_0<\bar{t}<t_1$, 使得点 $(\varphi_1(\bar{t}), \cdots, \varphi_n(\bar{t}))$ 属于 $D-H$. (甚至, 我们可以证明: 在这种情形, 存在 $\bar{t}$: $t_0<\bar{t}<t_1$, 使得对于区间 $[\bar{t}, t_1)$ 上的所有的 $t$,点 $(\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t))$ 都属于 $D-H$. 参看 K. Mayrhofer [1], I. P. Eroughin [1]). 在这种情形,我们也称 $t_1$ 是积分曲线弧的正向终极时间.

第二种可能则不然. 这时存在有界闭集 $H\subset D$, 使得对于 $t_0\leqslant t<t_1$, 有 $(\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t))\in H$. 在这种情形下,设 $F_i$ 为柱体: $t_0\leqslant t\leqslant t_1$, $(x_1, \cdots, x_n)\in H$ 上的 $\max|f_i(t, x_1, \cdots, x_n)|$。对于 $t$ 在区间 $[t_0, t_1]$ 上的任何一对值 $t'$, $t''$, 将 (1.1.2) 积分,即得 $|\varphi_i(t'')-\varphi_i(t')|\leqslant F_i|t''-t'|$. 由此可知当 $t\to t_1-0$ 时,每个 $\varphi_i$ 的极限是有限的,我们把它记为 $x_i^1$.

由于点 $P_1=(t, x_1^1, \cdots, x_n^1)$ 属于$K$, 再一次应用已知的方法,在某区间 $[t_1, t_2)$ $(t_1<t_2)$ 上,我们至少可以找到一组 $n$ 个连