

现代数学译丛

非线性微分方程

〔意〕 G. 桑森 R. 康蒂 著

黄启昌 金成桴 史希福 译

34115014

科学出版社

内 容 简 介

本书叙述非线性微分方程的定性理论。内容大致分为三个主要部分：二维自治系统相图的详细分析；寻求周期系统周期解的定性方法的综述；对于一般 n 维系统解的渐近性态，特别是稳定性的研究的综合探讨。

读者对象为大学数学系高年级学生、研究生、教师和研究工作者，也可供物理、力学、天文以及无线电工作者参考。

G. Sansone and R. Conti

NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

Pergamon Press, 1964

现代数学译丛

非线性微分方程

〔意〕 G. 桑森 R. 康蒂 著

黄启昌 金成桴 史希福 译

责任编辑 刘嘉善 张鸿林

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1983 年 8 月第 一 版 开本：850×1468 1/32

1983 年 8 月第一次印刷 印张：18

印数：0001—10,650 字数：470,000

统一书号：13031·2335

本社书号：3196·13-1

定价：3.30 元

中文版前言

G. 桑森教授为了科学和人类的利益献出了漫长的生命岁月之后,于1979年10月13日与世长辞,享年九十一岁。

现在我们合写的这一著作被译为中文出版,这表明中国同行对他的工作的赞赏。若他仍然在世,他必定会因此而深受感动并引以为荣。

为此,我作为合著者,谨表示我最深切的感激,并且在科学方面,对于世界人民的团结和进步,能进一步地起一份作用,表示我由衷的满意。

R. 康蒂

于佛罗伦萨1980年4月29日

序

本书内容大致可以分为三个主要部分：二维自治系统相图的详细分析；寻求周期系统周期解的定性方法的综述；对于一般 n 维系统解的渐近性态，特别是稳定性的研究的综合探讨。

这个英文版仍然保留了意大利文版（1956）的基本内容。但是，微分方程定性理论最近五年所取得的进展，已经要求对它进行某些修改，其中有些是实质性的修改。因此，几乎在每一章的末了，都加上了几项补充，参考文献也有相当多的增加。

作者感谢 Stevens 工学院的 Ainsley H. Diamond 博士和 Fairleigh Dickinson 大学的 Maria Castellani 博士为出版本书的英文版所做的工作，感谢 Pergamon 出版社的关心与合作，最后还要感谢科学研究所空军署对我们的工作的支持。

G. 桑森, R. 康蒂

目 录

第一章 微分方程组解的一般定理	1
§ 1. 积分曲线	1
1. 积分曲线, 正向终极时间 t^+	1
2. $t^+ = b$ 的条件, $n = 1$ 的情形	4
3. $t^+ = b$ 的条件, 一般情形	7
4. 积分曲线的有界性	9
5. Carathéodory 意义下的积分曲线	11
§ 2. Lipschitz 系统和 Carathéodory 系统	12
1. 推广的 Gronwall 引理	12
2. Lipschitz 系统, 对于两个积分曲线弧的 $ x(t) - y(t) $ 的估值	13
3. 唯一性定理, 对初值点 P_0 及 f 的连续相依性	15
4. Carathéodory 系统	16
§ 3. 系统 (1.1.1) 的解 $\varphi(t, t_0, x^0)$	17
1. 函数 $\varphi(t, t_0, x^0)$ 的唯一性情形	17
2. $\varphi(t, t_0, x^0)$ 的连续性	19
3. 稳定性	19
4. 线性系统的函数 $\varphi(t, t_0, x^0)$	23
5. $\varphi(t, t_0, x^0)$ 的可微性	25
6. 含参数的系统	26
§ 4. 周期解	27
1. 周期积分曲线, 周期轨道	27
2. 例外周期解	28
§ 5. 自治系统	31
1. 自治系统及其积分曲线的性质	31
2. 轨线, 相空间	32
3. 奇点, 环, 开轨线	34

补充	35
参考文献	38
第二章 特殊的平面自治系统	40
§ 1. 线性系统	40
1. 奇点	40
2. 线性系统的孤立奇点的标准型	42
3. 相平面的仿射变换	45
4. 奇点类型的分类	47
§ 2. 齐次系统	53
1. 齐次系统	53
2. 不变射线. 星形结点	54
3. 中心与焦点	55
4. 孤立不变射线. 正规角域	57
5. 轨线在正规角域中的性态	61
6. 例子	68
§ 3. 解析系统	70
1. 引言	70
2. 例子	72
3. 函数 $Z(x, y), N(x, y)$	75
4. 引理	78
5. 趋于 O 的轨线. 焦点	79
6. 方程 $N(\theta) = 0$. 临界点	82
7. 对 $Z(x, y)$ 的研究. $Z(x, y)$ 定号的情形	85
8. Z -扇形域的分类	86
§ 4. 中心问题	90
1. 中心问题	90
2. $N(\theta) \neq 0$ 时的中心问题	90
3. $m = 1$ 的情形. Poincaré 方法	93
4. $m = 1$ 的情形. 关于中心的 Poincaré 定理. E. Picard-J. Chazy 的证明	97
5. $m = 1$ 的情形. 周期的计算	101
6. 关于中心的 Poincaré 充分条件. 应用于月球运动的	

Delaunay 方程	101
7. 有关中心问题的文献	102
§ 5. 无穷远奇点	105
1. Poincaré 球面. 无穷远奇点	105
2. 例子	110
3. 齐次系统的无穷远奇点	112
补充	114
参考文献	118
第三章 Briot-Bouquet 奇点	120
§ 1. 解析情形的 Briot-Bouquet 定理	120
1. 引言	120
2. p 不为正整数时的 Briot-Bouquet 方程. 全纯解的研究 ...	122
3. p 为正整数的情形. 全纯解的存在性	124
4. $p = 0$ 时方程的解	126
§ 2. 在解析情形下, 把具有一个孤立奇点的微分方程 化为标准型. 关于第二类简化方程的轨线性态的 Bendixson 定理	128
1. 第一类和第二类简化型式	128
2. I. Bendixson 关于第二类简化方程的轨线性态的结果	134
§ 3. 在实数域内 Briot-Bouquet 方程的结点情形. Wintner 定理	137
1. A. Wintner 引理	137
2. A. Wintner 第一定理	141
3. A. Wintner 第二定理	143
补充	145
参考文献	150
第四章 平面自治系统	152
§ 1. 极限集	152
1. 轨线 r 的极限集 $A(r)$, $\Omega(r)$. 一般性质	152
2. 轨线的分类	155
3. 常点与常轨线	157
4. (平面)闭轨线, 平面环的稳定性	159

5. (平面)常极限轨线	161
6. 有界极限集 $Q(r)$ 的结构	164
7. 由一个奇点构成的极限集	166
8. 无界集 $Q(r)$ 的结构	169
§ 2. 平面环	170
1. 极限环	170
2. 极限环的分类. 轨道稳定性	173
3. 例子	173
4. Bendixson 定理	175
5. C^1 类系统. 环的特征指数	177
6. 解析系统的环	182
7. 右端为多项式的系统的极限环	186
8. 无平面环的区域	187
9. 平面自治系统的周期解. 极限环的存在性	188
10. (极限)环的唯一性	189
§ 3. 孤立奇点	189
1. 孤立奇点的分类. 第一类奇点(中心-焦点). 中心	189
2. 第二类奇点的邻域	191
3. 焦点	193
4. 例外方向	193
5. 正规扇形域	195
§ 4. 指标	200
1. Kronecker 指标	200
2. 点的指标	205
3. 特殊奇点的指标的计算	206
4. 球面和亏格为 p 的曲面的指标	208
§ 5. 相空间是柱面的情形	209
1. 相空间是柱面的情形	209
2. 一个例子	211
§ 6. 相空间为环面的情形	212
1. 相空间为环面的情形	212
2. 例子	213
3. 环面上无奇点的系统	214

4. 其它结果	216
§ 7. 动力系统的简单介绍	216
参考文献	220
第五章 具有扰动项的平面自治系统	224
§ 1. 齐次扰动系统	224
1. 一般问题	224
2. $N(\theta) \neq 0$ 的情形	226
3. 趋于 O 的轨线. 例外方向	229
4. 正规扇形域的不变性. 第一类正规扇形域	231
5. 第二类正规扇形域. 第一判定问题	232
6. 第三类正规扇形域. 第二判定问题	237
7. $N(\theta)$ 恒等于零的情形	240
8. 一些说明	241
§ 2. C^1 类系统的孤立奇点. 初等奇点	241
1. 引言	241
2. 焦点与弱焦点	242
3. 吸引点. 星形结点	243
4. 单切结点	245
5. 双切结点	246
6. 鞍点	248
7. 注	249
§ 3. H. Weyl 对双切结点和鞍点的渐近性研究	250
1. 问题的叙述. 记号	250
2. 结点情形 ($0 < l < k$). H. Weyl 第一定理	252
3. 关于 $ e^{it}y(t) - b $, $ x(t) - x^0e^{-kt} $ 的上界	258
4. $X(r) = Cr^k$ 的情形. 关于 $ y(t) - be^{-it} $, $ x(t) $ 的上界	259
5. $k \geq l$, $k > 0$ 的情形. H. Weyl 第二定理	261
6. 参数化系统	265
7. 双切结点情形. H. Weyl 第三定理	267
8. 鞍点情形 ($l < 0 < k$). H. Weyl 第四定理	271
§ 4. C^1 类系统的孤立奇点. 非初等奇点	272

1. 引言	272
2. 对于系统 $\dot{x} = x + f(x, y), \dot{y} = g(x, y)$ 的 K. A. Keil 第一定理	273
3. 关于等倾线的引理	276
4. 关于系统 $\dot{x} = x + f(x, y), \dot{y} = g(x, y)$ 的 K. A. Keil 第二定理与第三定理	279
5. K. A. Keil 对于系统 $\dot{x} = y + f(x, y), \dot{y} = g(x, y)$ 的 进一步结果	284
6. 1, 2, 4 节的文献注记	286
§ 5. 结构稳定系统. 含参数的系统	286
1. 结构稳定系统	286
2. 结构不稳定系统. 极限环的产生	288
3. 含参数系统的极限环	290
参考文献	292
第六章 某些具单自由度的自治系统	295
§ 1. 在粘性阻尼作用下, 质点的线性运动方程的轨线 ...	295
1. 在粘性阻尼作用下质点的线性运动方程的轨线	295
§ 2. 方程 $\ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} + \sin\theta - \beta = 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$	296
1. 引言	296
2. $\beta > 1$ 的情形. (6.2.3) 的周期解 $z = z(\theta)$ 的存在性 ...	297
3. $0 < \beta < 1$ 的情形. 奇点的分类	299
4. 极限情形 $\alpha = 0$ 时的轨线	301
5. $\alpha > 0, 0 < \beta < 1$ 的情形. (6.2.3) 的周期解和临界值 $\alpha(\theta_0)$	303
6. $\theta_0 = \pi/2 (\beta = 1)$ 的情形	309
7. $0 < \theta_0 < \pi/2 (\alpha > 0, 0 < \beta < 1)$ 时的轨线	311
8. 关于临界值 $\alpha(\theta_0)$ 的不等式	317
9. M. Urabe 计算 $\alpha(\theta_0)$ 的方法	321
§ 3. 张弛振荡的 van der Pol 方程和 Liénard 方程	322
1. 预备知识	322
2. Liénard 方程周期解的存在性	324
3. Liénard 方程周期解的唯一性的充分条件	326

4. Liénard 方程的周期解不唯一的情形	328
5. $f(x)$ 有第一类间断点时, Liénard 方程周期解的存在定理	330
6. Liénard 方程的比较定理	332
7. 周期的计算	333
8. van der Pol 方程. 轨线在无穷远处的性态	335
9. 当参数趋近于无穷时, van der Pol 方程的极限环的性态. D. A. Flander 和 J. J. Stoker 定理	337
10. 含有大参数的 van der Pol 方程的周期解的周期与振幅的渐近估值	339
11. R. Gomory 和 D. E. Richmond 关于极限环的不等式	339
§ 4. 广义 Liénard 方程的周期解	342
1. A. F. Filippov 的第一个定理	342
2. A. F. Filippov 的第二个定理	350
3. 唯一性定理	350
4. 对方程 $\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0$ 的研究	351
§ 5. 方程 $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$ 在不作 $xg(x) > 0$ ($ x > 0$) 的假定时的周期解	355
1. 引言	355
2. 奇点	356
3. 环及其性质	357
4. 一种不存在周期解的情形	360
5. 环的存在性	361
6. 环的唯一性的一个准则	362
§ 6. 衰减振动方程 $A\ddot{x} + f(\dot{x})\dot{x} + Cx = 0$	362
1. 引言	362
2. 原点为稳定点的条件	363
3. G. Malgarini 的一个定理	364
§ 7. 一个关于绳索动力学与空气动力学的方程	365
1. 奇点	365
2. 系统(6.7.2)所确定的方向场	366
3. 当参数 p 充分小时, 周期解的存在性	369

补充	371
参考文献	376
第七章 具单个自由度的非自治系统	382
§ 1. 强迫振荡问题. 线性情形	382
1. 调和情形的强迫振荡	382
2. 非调和情形的强迫振荡	384
3. 强迫振荡问题	386
§ 2. L. E. J. Brouwer 不动点定理, M. L. Cartwright J. E. Littlewood 定理及 J. L. Massera 定理	386
1. Brouwer 不动点定理	386
2. 用 Brouwer 定理证明周期解的存在性	389
3. M. L. Cartwright-J. E. Littlewood 定理	390
4. J. L. Massera 定理	391
§ 3. T. Yoshizawa 定理	394
1. 最终有界性准则	394
2. 周期解存在定理	401
3. 解的稳定性	401
4. 关于周期解的唯一性与稳定性的一个定理	407
5. 个别解的有界性准则	408
6. 由 Massera 定理推导周期解的存在性的一个准则. Mizohata 和 Yamaguti 定理	411
§ 4. 方程 $\ddot{x} = F(x, \cos \omega t)$ 的异相调和解. F. John 定理	412
1. 解在整个 $(-\infty, +\infty)$ 上存在的问题	412
2. 关于异相调和解存在的 F. John 定理	417
§ 5. 方程式 $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = p(t)$	422
1. S. Lefschetz, N. Levinson, M. L. Cartwright 和 J. E. Littlewood 等人的结果	422
2. N. Levinson 的一条存在性定理和一条关于渐近稳定性的定理	424
3. 方程 $\ddot{x} + g(x) = p(t)$, $p(t)$ 为偶函数. G. R. Morris 定理	428

4. 奇周期调和解. 关于具强迫项的 Duffing 方程的 W. S. Loud 定理.....	429
5. 关于方程式 $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + \lambda^2 x = F \sin \omega t$ ($\lambda > 0, \omega > 0, F > 0$) 的周期解的 D. Grafti 不等式.....	430
§ 6. 方程式 $\ddot{x} + F(\dot{x}) + x = p(t)$	432
1. R. Caccioppoli, A. Ghizzetti 和 A. Ascari 关于周期解的存在性、唯一性与稳定性的准则	432
2. 关于绳索力学的一个微分方程. J. Cecconi 和 F. Stopelli 的结果.....	435
§ 7. 关于方程式 $\ddot{x} + kf(x)\dot{x} + g(x) = kp(t)$ 和 $\ddot{x} + kF(\dot{x}) + g(x) = kp(t)$ 的 G. E. H. Reuter 定理...	437
1. 方程 $\ddot{x} + kf(x)\dot{x} + g(x) = kp(t)$	437
2. 方程 $\ddot{x} + kF(\dot{x}) + g(x) = kp(t)$	441
§ 8. 方程 $\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = p(t)$	442
1. H. A. Antosiewicz 关于解的正向有界性的准则	442
2. N. Levinson 和 C. E. Langenhop 关于周期解的存在性的准则	443
§ 9. 具有次调和解的非线性系统	447
1. 次调和解	447
2. D 类系统	448
3. D 类系统的变换的不动点的分类	449
4. N. Levinson 和 J. L. Massera 关于次调和解的个数的定理	451
§ 10. 关于周期解的一般讨论	452
1. 自治系统	452
2. 周期的非自治系统	453
补充.....	454
参考文献.....	460
第八章 线性系统	466
§ 1. 伴随系统. T. Wazewski 不等式	466
1. 伴随系统	466
2. Wazewski 不等式	467

§ 2. 常系数线性自治系统	469
1. 标准基本解矩阵	469
2. 齐次系统解的形式. 特征指数, 型数	470
3. 实系统的奇点	472
4. $n = 3$ 的(实)情形	474
§ 3. 线性周期系统	477
1. 标准基本解矩阵. Floquet 定理和 Lyapunov 定理	477
2. 特征指数. 型数	478
§ 4. 可约系统	481
1. 可约系统. 特征指数和型数	481
§ 5. 函数的型数. t -相似关系	482
1. 函数的型数	482
2. t -相似关系 (或运动相似)	483
3. 非零解的型数	484
4. 正规解组. 数 $S_{\min}$	485
5. 关于 $S_{\min}$ 的不等式. 非正则常数	487
§ 6. 正则系统	488
1. 正则系统	488
2. Peiron 定理	490
3. 三角形矩阵	490
§ 7. 周期解	491
1. 线性齐次系统	491
2. 线性非齐次系统	492
3. 拟线性周期系统调和解的存在性	495
补充	498
参考文献	499
第九章 稳定性	502
§ 1. V 函数方法	502
1. 引言	502
2. V 函数	503
3. T. Wazewski 引理	505
4. 稳定性的充分条件	506

5. 稳定的必要条件。逆问题	508
6. 渐近稳定性	509
7. 全局渐近稳定性	511
8. 其它类型的稳定性	512
9. 不稳定性	513
10. 用 V 函数研究有界性	514
§ 2. 线性系统的稳定性	516
1. 稳定的和不稳定的线性系统	516
2. 一致稳定的线性系统	518
3. 一致稳定性与 t_0 -相似	519
4. 一致稳定性的准则	521
5. 与零可约的线性系统和限制稳定性	523
6. 线性系统的渐近稳定性	527
7. 常系数线性系统的 V 函数	530
§ 3. 按一次近似判定稳定性	530
1. 引言	530
2. 按线性一次近似决定稳定性	532
3. 几个推广与注释。 $L(\nu, N)$ 性质	535
4. 渐近稳定性。非线性一次近似的情形	537
5. 解析系统。临界情形	538
6. 轨道(渐近)稳定性。积分流形近傍的解的性态	539
§ 4. 渐近等价性	542
1. 渐近等价性	542
2. H. Weyl 定理	542
3. 关于渐近等价性的其它结果	547
补充与问题	548
参考文献	552

第一章 微分方程组解的一般定理

为了理解本书所讨论的问题所必需的一般定理，可以在任何一本微分方程的现代教科书中找到。

然而，为了使读者免于查阅与所考虑的问题并不紧密相关的繁冗文献，在这一章里，我们将介绍某些一般定理以及一些有用的补充讨论。

§1. 积分曲线

1. 积分曲线. 正向终极时间 t^+

(a) 通常我们将讨论常微分方程组(系统)*:

$$dx_i/dt = f_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (1.1.1)$$

其中 $(t, x_1, \dots, x_n)$ 为实欧几里得空间 S_{n+1} 中的点，它在“高”为 $b - a$ ，“底”为 D 的柱体

$$K: a < t < b, (x_1, \dots, x_n) \in D$$

上变化，此处 D 为所有点 $(x_1, \dots, x_n)$ 所组成的超平面 S_n 的一个区域¹⁾。

特别是，我们可能有 $a = -\infty$ 或者 $b = +\infty$ ，或者 D 可能是整个超平面。可能出现这些情形中的两个或三个同时都满足的情形。因此， K 甚至可能就是点 $(t, x_1, \dots, x_n)$ 所在的整个空间 S_{n+1} 。

变量 t 将认为是时间。

除非另做假设，我们假定 f_i 为 K 上的实连续函数。

*) 我们一般把常微分方程组译为“系统”。——译者注

1) 区域=开的连通集。

(b) 设 $P_0 = (t_0, x_1^0, \dots, x_n^0)$ 为 K 中给定一点. 由微分方程基础理论(参看 Sansone [1], 第一卷, 第一章)可知, 应用熟知的存在定理之一, 在区间 $t_0 \leq t < t_1$ (此处 $t_1 \leq b$) 上, 至少可以找到一组 n 个连续函数 $\varphi_i(t)$, 满足方程组 (1.1.1), 所以

$$\begin{aligned} d\varphi_i(t)/dt &= f_i(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)), \\ (t_0 \leq t < t_1; i &= 1, \dots, n), \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

且适合

$$\varphi_i(t_0) = x_i^0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1.1.3)$$

既然函数 $\varphi_i(t)$ 满足 (1.1.2), 它们在开区间 (t_0, t_1) 内就有连续的导数, 而在 t_0 处右导数连续.

这样的一组 φ_i 称为 (1.1.1) 在 $[t_0, t_1)$ 上的一个解. 而 K 中由参数方程

$$x_i = \varphi_i(t), \quad t_0 \leq t < t_1$$

所表示的点集, 称为 (1.1.1) 的经过 P_0 或者由 P_0 出发的积分曲线弧.

(c) 当 $t_1 = b$ 时, 我们就称 t_1 为 (b) 中所考虑的曲线弧 $x_i = \varphi_i(t)$ 的正向终极时间. 假如不然, $t_1 < b$, 则有两种可能.

第一种情形是: 对于任一有界闭集 $H \subset D$, 存在依赖于 H 的 $\bar{t}$, $t_0 < \bar{t} < t_1$, 使得点 $(\varphi_1(\bar{t}), \dots, \varphi_n(\bar{t}))$ 属于 $D - H$. (甚至, 我们可以证明: 在这种情形, 存在 $\bar{t}$: $t_0 < \bar{t} < t_1$, 使得对于区间 $[\bar{t}, t_1)$ 上的所有的 t , 点 $(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ 都属于 $D - H$. 参看 K. Mayrhofer [1], I. P. Eroughin [1]). 在这种情形, 我们也称 t_1 是积分曲线弧的正向终极时间.

第二种可能则不然. 这时存在有界闭集 $H \subset D$, 使得对于 $t_0 \leq t < t_1$, 有 $(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \in H$. 在这种情形下, 设 F_i 为柱体: $t_0 \leq t \leq t_1$, $(x_1, \dots, x_n) \in H$ 上的 $\max |f_i(t, x_1, \dots, x_n)|$. 对于 t 在区间 $[t_0, t_1]$ 上的任何一对值 t', t'' , 将 (1.1.2) 积分, 即得 $|\varphi_i(t'') - \varphi_i(t')| \leq F_i |t'' - t'|$. 由此可知当 $t \rightarrow t_1 - 0$ 时, 每个 φ_i 的极限是有限的, 我们把它记为 x_i^1 .

由于点 $P_1 = (t_1, x_1^1, \dots, x_n^1)$ 属于 K , 再一次应用已知的方法, 在某区间 $[t_1, t_2)$ ($t_1 < t_2$) 上, 我们至少可以找到一组 n 个连