高等数学講义

下册

（供79、80、81级用）

中国科学技术大学高等数学教研室编

一九八〇年二月

高等数学講义

下册

（供79、80、81级用）

中国科学技术大学高等数学教研室编

一九八〇年二月

編　輯：中国科学技术大学高等数学教研室
印　刷：中 国 科 学 技 术 大 学 印 刷 厂
发　行：中国科学技术大学印刷厂发行組

編　号：791019　　　　单　价：1.88元

目　录

第四章　空間解析几何

第五章　多变量函数的微分学

第六章　多变量函数的积分学

第七章　場　論

第八章 級数和积分所表示的函数

第九章 富 氏 分 析

第十章 常 微 分 方 程

附 录

第四章 空间解析几何

在平面解析几何中，通过建立平面坐标系可以把平面上的图形与数或代数方程式联系起来。当建立了这种联系之后，就能用代数的方法来研究平面图形的性質，同时也使方程式具有直观的几何意义。这种数形結合的方法，貫穿在整个高等数学之中。如果沒有平面解析几何的知識，要理解单变量函数的微积分将有很大的困难。我們即将学习多变量函数的微积分，为此必須先掌握空間解析几何。

空間解析几何，同样是通过建立空間坐标系把空間中的图形与数或方程式联系起来，用代数方法研究图形的性質。这一章的基本內容，是首先建立空間直角坐标系，然后介紹很有用的向量代数，利用向量彻底解决了空間中有关平直图形（平面与直綫）的問題，再討論一些常見的空間曲面，以及空間坐标变换的基本知識。

第一节 空间直角坐标系

过空間某一定点O作三条互相垂直的直线，在这三条直线上都取定一个相同的单位长

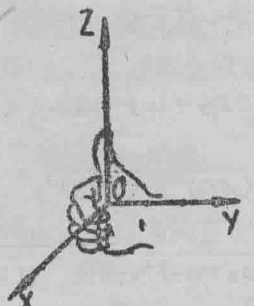

图 1

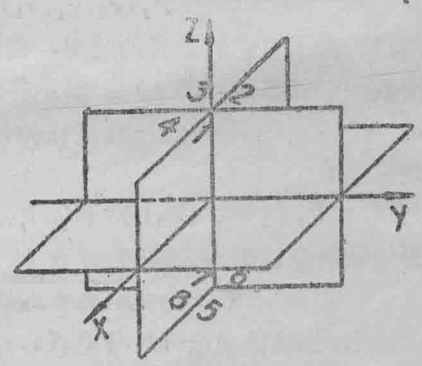

图 2

度，再各选定一个方向作为正向。这样就有了三条坐标軸，分别称为x軸，y軸和z軸。我們还規定x軸，y軸和z軸构成右手系排列：如果用右手握住z軸，且大拇指指向z軸的正向，則其它四指的方向表示从x軸到y軸的轉动方向（图1）。这样就建立了一个空間直角坐标系，記为$Oxyz$，称O点为此坐标系的坐标原点。x軸和y軸所张成的平面，記为Oxy平面；还有Oyz和Ozx共三张平面，它們都称为坐标平面。三张坐标平面把空間划分成八部分，称为八个卦限（图2）。

建立了一个空間直角坐标系后，空間一点就可以用它的三个坐标表示出来。方法是这样的：設P为空間一点，过P分别作垂直于x軸，y軸和z軸的三张平面，它們与三个坐标軸分别交于点A,B,C(图3)。如果A,B,C三点在x,y,z軸上的坐标分别是a,b,c，則称这三

个数 a,b,c 为 P 点的 x,y,z 坐标，記为 $P(a,b,c)$。反过来，任意給定一組有次序地排列的三个数 (a,b,c)，空間中必有唯一的一点 P 以它們为坐标。这样，空間的点 P 和有序三数組 (a,b,c) 之間就建立了一一对应关系。

显然，坐标原点的坐标为 $(0,0,0)$；在 x 軸，y 軸，z 軸上点的坐标分别是 $(a,0,0)$，$(0,b,0)$，$(0,0,c)$ 的形式；在坐标平面 Oxy，Oyz，Ozx 上点的坐标分别是 $(a,b,0)$，$(0,b,c)$，$(a,0,c)$ 的形式。容易看到在八个卦限中，有一个卦限中的每一点的坐标都非負，通常称这个卦限为第 1 卦限。

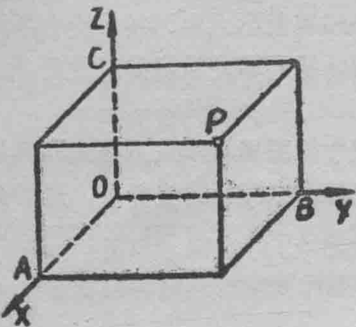

图 3

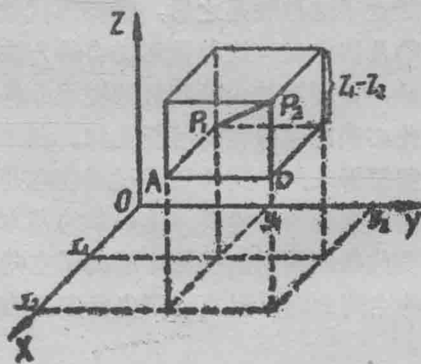

图 4

有了点的坐标，我們可以計算空間两点之間的距离。設

$$P_1(x_1,y_1,z_1), \quad P_2(x_2,y_2,z_2)$$

是空間两点。为了求它們之間的距离，我們过 P_1,P_2 分别作平行于坐标平面的平面，这六个平面围成一个长方体（图 4）。易見各段距离是

$$P_1A=|x_2-x_1|, \quad AD=|y_2-y_1|, \quad DP_2=|z_2-z_1|,$$

根据勾股定理有

$$P_1P_2=\sqrt{(P_1D)^2+(DP_2)^2}=\sqrt{(P_1A)^2+(AD)^2+(DP_2)^2},$$

于是得到空間两点的距离公式：

$$P_1P_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{1}$$

例 1. 求点 $P_1(1,0,-1)$ 与 $P_2(4,3,-1)$ 之間的距离。

解：$P_1P_2=\sqrt{(4-1)^2+(3-0)^2+(-1+1)^2}=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$.

例2. 求 z 軸上一点，要求它与点 $A(-4,1,7)$ 和点 $B(3,5,-2)$ 的距离相等。

解：設所求 z 軸上的点为 M，它的坐标为 $(0,0,z)$，其中 z 待定。由公式（1），

$$AM=\sqrt{4^2+(-1)^2+(z-7)^2}=\sqrt{17+(z-7)^2}=\sqrt{66-14z+z^2},$$

$$BM=\sqrt{(-3)^2+(-5)^2+(z+2)^2}=\sqrt{34+(z+2)^2}=\sqrt{38+4z+z^2}.$$

由題設 $AM=BM$ 可得

$$66-14z+z^2=38+4z+z^2,$$

即

$$18z=28, \quad 得\ z=\frac{14}{9}.$$

故所求之点为 $M\left(0,0,\frac{14}{9}\right)$.

第二节 向 量 代 数

§2.1 向量的概念

在生产实践、科学技术以至日常生活中，我們經常遇到这样一些量，它們不仅有大小，而且还有方向。例如速度、加速度、力等等。数学上把这种既有大小又有方向的量抽象成为向量。向量可以用几何表示，也可以用坐标表示。

向量的几何表示 决定一个向量有两个因素：大小和方向。我們可以在空間取一从点 A 到点 B 的有向线段，使它的长度 AB 等于所討論的向量的大小，使从 A 到 B 的指向表示該向量的方向（图5）。我們就用带箭头的記号 $\overrightarrow{AB}$ 或一个黑体小写字母如 $\mathbf{v}$ 来表示这个向量。由于我們只考虑大小和方向，所以如果有两个向量大小相等、方向相同，即使它們的图形的位置不同，我們就認为这两个向量相等。图5所示的向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{A'B'}$，由于它們大小相等、方向相同，因此它們相等，表示同一向量 $\mathbf{v}$. 按照这样的意义，就是說一个向量的图形可以自由平移。今后为討論需要常常把几个向量移到同一出发点。

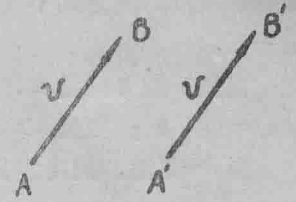

图 5

表示向量大小的数称为向量的模，即向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模等于线段 AB 的长度，用記号 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\mathbf{v}|$ 表示。也常用小写体 v 表示向量 $\mathbf{v}$ 的模。

§2.2 向量的加法与数乘

基于速度的合成、力的合成等客观事实，我們規定向量 $\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}$ 和 $\mathbf{b}=\overrightarrow{OB}$ 的加法如下：以 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 为邻边作一平行四边形（图6）.記 O 的对頂点为 C，我們就把向量 $\mathbf{c}=\overrightarrow{OC}$ 定义为 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 两向量的和，記作

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}. \tag{2}$$

这种用平行四边形的对角线来求出两个向量之和的方法称为平行四边形規則。由于 $\mathbf{b}=\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$，因此还可以这样来作出 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$：作向量 $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$，以 OA 的終点 A 为 $\mathbf{b}$ 的起点作 $\overrightarrow{AC}=\mathbf{b}$，連接 OC，即得 $\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$. 这一方法称为向量加法的三角形規則。当要求多个向量之和时，使用三角形規則比較方便（图7）。

在实际中还經常見到大小相等、方向相反的两个向量，如作用力与反作用力。我們規定用 $-\mathbf{v}$ 表示大小与 $\mathbf{v}$ 相等但方向与 $\mathbf{v}$ 相反的向量，称为 $\mathbf{v}$ 的負向量。例如在图6中有 $\overrightarrow{CB}=-\mathbf{a}$.

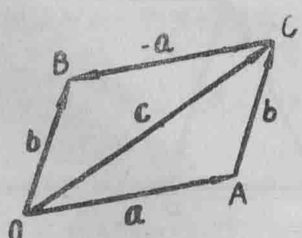

图 6

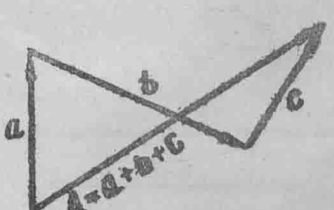

图 7

根据三角形規則，从图 6 的 $\triangle OBC$ 得到

$$\mathbf{c}+(-\mathbf{a})=\mathbf{b},$$

这个式子可以用来規定向量的减法，記为

$$\mathbf{c}-\mathbf{a}=\mathbf{c}+(-\mathbf{a})=\mathbf{b}. \tag{3}$$

也就是說，**减去一个向量等于加上它的負向量。**

若一向量的模等于 0，这种向量談不上有方向，或看成具有任意的方向，它在图形上退縮为一点，称这种向量为**零向量**，記作 $\mathbf{o}$. 显然，

$$\mathbf{v}+(-\mathbf{v})=\mathbf{o}, \quad 或 \quad \mathbf{v}-\mathbf{v}=\mathbf{o}. \tag{4}$$

如果向量 $\mathbf{a}$ 的模 $|\mathbf{a}|=1$，称它为**单位向量**，常以 $\mathbf{a}^{\circ}$ 来表示。

向量的数乘 在应用中还經常遇到向量与数相乘的情况。如速度或力增大一倍，这表示保持速度或力的方向不变，而使其大小增加一倍。由此引出向量与数相乘（簡称数乘）的一般定义。

定义. 設有向量 $\mathbf{a}$ 和数 λ，則 $\lambda\mathbf{a}$ 表示一个向量，它的模等于 $\mathbf{a}$ 的模的 $|\lambda|$ 倍，即 $|\lambda\mathbf{a}|=|\lambda||\mathbf{a}|$；如果 $\lambda>0$，則 $\lambda\mathbf{a}$ 的方向与 $\mathbf{a}$ 相同；如果 $\lambda<0$，則 $\lambda\mathbf{a}$ 的方向与 $\mathbf{a}$ 相反（图8）。

当 $\lambda=0$ 时，則由定义可知 $|\lambda\mathbf{a}|=|\lambda||\mathbf{a}|=0$，所以

$$0\mathbf{a}=\mathbf{o}.$$

利用向量的数乘，向量 $\mathbf{a}$ 可表示为

$$\mathbf{a}=|\mathbf{a}|\mathbf{a}^{\circ}. \tag{5}$$

其中模 $|\mathbf{a}|$ 管 $\mathbf{a}$ 的大小，单位向量 $\mathbf{a}^{\circ}$ 管 $\mathbf{a}$ 的方向，各司其职。在运动学中討論向量的变化时，这种表示有很多方便。

若有数 λ、使得 $\mathbf{a}=\lambda\mathbf{b}$，根据数乘定义，則 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的方向或者相同，或者相反，因此总是平行的，或称 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 是**共綫的**。反之，如果 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 共綫，即它們同向或反向，那么令 $\mu=\dfrac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|}$（当 $\mathbf{b}\neq 0$），就有 $\mathbf{a}=\pm\mu\mathbf{b}=\lambda\mathbf{b}$. 如約定零向量与任何向量都共綫，則当 $\mathbf{b}=0$ 时，必有 $\mathbf{b}=0\mathbf{a}$. 于是我們得出如下結論：

两个向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 共綫的充分必要条件，是其中有一向量可以表示为另一向量的某个 λ 倍，例如

$$\mathbf{a}=\lambda\mathbf{b}. \tag{6}$$

如果三个向量 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 平行于同一张平面，称为三向量**共面**。很明显，若有数 λ 和 μ，使得

$$\mathbf{c}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b},$$

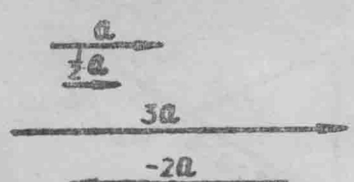

图 8

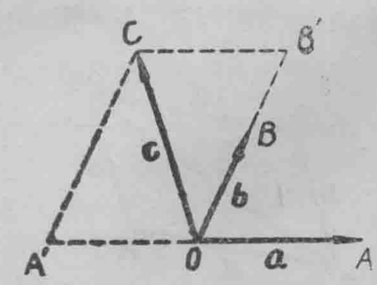

图 9

那末 c 必在向量 a、b 所决定的平面上，从而这三向量共面。反过来，若 a、b、c 共面，我們把它們移到同一起点 O，分别記为 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$，并如图 9 所示作出一个平行四边形 $OA'CB'$. 由（6）式知道，必有数 λ 和 μ 使 $\overrightarrow{OA'}=\lambda\mathbf{a}$，$\overrightarrow{OB'}=\mu\mathbf{b}$（当 a、b 不是 o）于是 $\mathbf{c}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}$. 又約定零向量总与任意两个向量共面，則当 $\mathbf{a}=\mathbf{o}$ 时，可以写出 $\mathbf{a}=0\mathbf{b}+0\mathbf{c}$.

因此三向量 a、b、c 共面的充分必要条件是：其中一个向量可以表成另二个向量的倍数之和，例如

$$\mathbf{c}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}. \tag{7}$$

§ 2.3 向量的坐标

向量的几何表示虽然很直观，也很清楚。但用来具体运算是不方便的。有了空間直角坐标系，我們就能将空間向量用一組数来表示。

設取定一空間直角坐标系 $Oxyz$，对任一空間向量 a，由于向量可以平行移动，我們可以把 a 的起点移到坐标原点 O，假定这时 a 的終点是 A，即 $\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}$（图10）。設 A 点的坐标是 (a_x,a_y,a_z)，它是由 a 唯一确定的，于是向量 a 就唯一地对应于数組 (a_x,a_y,a_z). 反过来，任給一个三数組 (a_x,a_y,a_z)，在空間唯一确定了一点 $A(a_x,a_y,a_z)$，于是便确定了一个向量 $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$. 这样，向量 a 与数組 (a_x,a_y,a_z) 之間成立一一对应的关系，我們称 (a_x,a_y,a_z) 为**向量 a 的坐标**，有时也称 a_x,a_y,a_z 为 **a 的分量**。記为

$$\mathbf{a}=(a_x,a_y,a_z), \tag{8}$$

这就是向量的坐标表示。

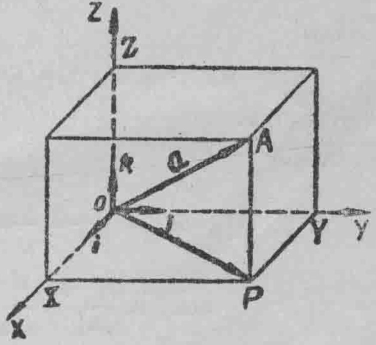

图 10

有时为了便于計算，还可把上式改写成下述的按基本向量的分解式：分别記 x,y,z 軸上指向正方向的单位向量为 $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$，称它們为坐标系 $Oxyz$ 的基本向量。过 A 作三平面分别与三坐标平面平行，并与三坐标軸交于 X,Y,Z 三点（图 10）。易知

$$\overrightarrow{OX}=a_x\mathbf{i},\quad \overrightarrow{OY}=a_y\mathbf{j},\quad \overrightarrow{OZ}=a_z\mathbf{k}.$$

由向量加法的三角形規則可得

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{XP}+\overrightarrow{PA}$$
$$=\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{OY}+\overrightarrow{OZ},$$

即

$$\mathbf{a}=(a_x,a_y,a_z)=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}. \tag{9}$$

这就是 a 按基本向量的分解式。

向量的加减与数乘的坐标表示 設 λ 是数，向量 $\mathbf{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\mathbf{b}=(b_x,b_y,b_z)$，則显然有：

$$\mathbf{a}\pm\mathbf{b}=(a_x\pm b_x)\mathbf{i}+(a_y\pm b_y)\mathbf{j}+(a_z\pm b_z)\mathbf{k}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z), \tag{10}$$

$$\lambda\mathbf{a}=\lambda a_x\mathbf{i}+\lambda a_y\mathbf{j}+\lambda a_z\mathbf{k}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z). \tag{11}$$

也就是說，向量的加、减与数乘可以归結为它們的坐标的加、减与数乘。

例 1. 已知 $\mathbf{a}=(4,-1,3)$，$\mathbf{b}=(5,2,-2)$，求 $2\mathbf{a}+3\mathbf{b}$.

解： 由于 $2\mathbf{a}=(2\cdot4,2\cdot(-1),2\cdot3)=(8,-2,6)$,

$$3\mathbf{b}=(3\cdot5,3\cdot2,3\cdot(-2))=(15,6,-6),$$

所以 $$2\mathbf{a}+3\mathbf{b}=(8+15,-2+6,6+(-6))=(23,4,0).$$

例 2. 已知两点 $A(a_1,a_2,a_3)$，$B(b_1,b_2,b_3)$，求向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标。

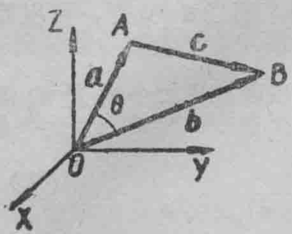

图 11

解：如图 11，$\overrightarrow{OA}=(a_1,a_2,a_3)$，$\overrightarrow{OB}=(b_1,b_2,b_3)$，故有

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3). \tag{12}$$

因此，**向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标就是終点 B 的坐标減去起点 A 的坐标。**

例 3. 已知向量 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 平行，求它們的坐标所应滿足的关系。

解：由 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 平行可知存在数 λ，使 $\mathbf{a}=\lambda\mathbf{b}$，写成坐标式就是

$$(a_1,a_2,a_3)=\lambda(b_1,b_2,b_3)=(\lambda b_1,\lambda b_2,\lambda b_3),$$

即有

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\lambda. \tag{13}$$

反过来也对。所以**两向量平行的充分必要条件是它們的对应坐标成比例。**

向量的模的坐标表示式　設向量 $\mathbf{a}=(a_x,a_y,a_z)$，由空間两点的距离公式可知

$$|\mathbf{a}|=OA=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}. \tag{14}$$

向量的方向余弦　設向量 $\mathbf{a}=(a_x,a_y,a_z)$，則由 $\mathbf{a}$ 的坐标不仅能計算 $\mathbf{a}$ 的模，还应能計算 $\mathbf{a}$ 的方向。$\mathbf{a}$ 的方向可以由这个向量与三坐标軸正向的夹角 α,β,γ 完全确定，从图 12 可以看出

$$a_x=|\mathbf{a}|\cos\alpha,\quad a_y=|\mathbf{a}|\cos\beta,\quad a_z=|\mathbf{a}|\cos\gamma.$$

其中三个数 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 叫做向量 $\mathbf{a}$ 的**方向余弦**，它可以表为

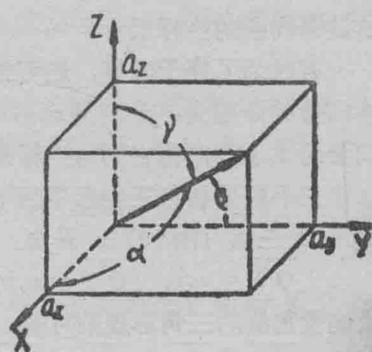

图 12

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{a_x}{|\mathbf{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\\ \cos\beta&=\frac{a_y}{|\mathbf{a}|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\\ \cos\gamma&=\frac{a_z}{|\mathbf{a}|}=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

由此可見对任何向量，有

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. \tag{16}$$

同时看到，**$\mathbf{a}$ 的方向余弦就是 $\mathbf{a}$ 的单位向量 $\mathbf{a}^0=\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ 的坐标。**

例 4. 已知 $P_1(1,-2,3)$，$P_2(4,2,-1)$，求 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的方向余弦。

解：$\overrightarrow{P_1P_2}=(3,4,-4)$，$|\overrightarrow{P_1P_2}|=\sqrt{3^2+4^2+(-4)^2}=\sqrt{41}$，所以 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{41}},\quad \cos\beta=\frac{4}{\sqrt{41}},\quad \cos\gamma=\frac{-4}{\sqrt{41}}.$$

例 5. 設向量 $\mathbf{a}$ 与三个坐标軸的夹角相等，求 $\mathbf{a}$ 的方向余弦。

解：因为 $\alpha=\beta=\gamma$，故由 (16) 式

$$3\cos^2\alpha=1, \quad 得 \quad \cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}。$$

因此 **a** 的方向余弦是$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$或$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

§ 2.4 向量的数量积

設有物体受重力 **f** 的作用沿斜面下滑（图 13)。重力方向垂直向下，而物体的位移 **s** 的方向与斜面平行，两方向間夹角 θ. 力学上規定重力所作的功W可表为

$$W=|\mathbf{f}||\mathbf{s}|\cos\theta.$$

外力作功是重要的物理現象，它促使我們定义新的向量运算，这就是向量的数量积。

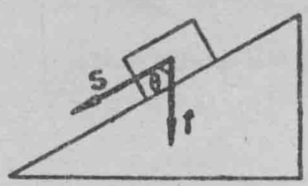

图 13

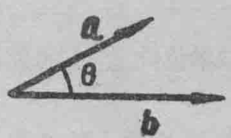

图 14

定义. 設有向量 **a**, **b**，它們的夹角为 θ（图 14）。則数 $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$ 称为向量 **a** 和 **b** 的**数量积（或称內积）**，記为 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$，即

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta. \tag{17}$$

这里夹角 θ 是指 **a**, **b** 間不大于 180° 的正角，即 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$.

按定义，$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ 是由 **a** 与 **b** 完全决定的一个数。当 θ 是銳角时它是正数，当 θ 是鈍角时它是負数，当 $\theta=90°$，即 **a** 与 **b** 相互垂直时它等于 0. 此外，$\mathbf{o}\cdot\mathbf{b}=0$.

为了便于运算，我們需要向量数量积的坐标表示式。設有

$$\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}, \qquad \mathbf{b}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}.$$

在图 11 中，設$\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$, $\mathbf{c}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\mathbf{b}-\mathbf{a}$. 根据三角形的余弦定理得到

$$|\mathbf{c}|^2=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta,$$

而在另方面，

$$\begin{aligned}|\mathbf{c}|^2&=(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2\\&=a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2-2(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)\\&=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-2(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3).\end{aligned}$$

比較上面两式，得到

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3. \tag{18}$$

这就是說，两向量的数量积等于它們对应坐标乘积之和。

利用向量的数量积，可以計算向量的模及两向量間的夹角：

$$|\mathbf{a}|^2=\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}, \quad |\mathbf{a}|=\sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}; \tag{19}$$

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}. \tag{20}$$

若約定零向量与任何向量垂直，則两向量 **a**、**b** 垂直的充分必要条件是：

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0. \tag{21}$$

利用（18）式还容易得出数量积运算的基本規律：

i）交换律 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$；

ii）分配律 $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$；

iii）与数乘的結合律 $(\lambda\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$.

例如，对于分配律

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})&=a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)+a_3(b_3+c_3)\\&=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}.\end{aligned}$$

另外，若简記 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}^2$，对基本向量 $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$，則有

$$\mathbf{i}^2=\mathbf{j}^2=\mathbf{k}^2=1,\qquad \mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}=0. \tag{22}$$

向量 **a** 与单位向量 $\mathbf{l}^0$ 的数量积

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{l}^0=|\mathbf{a}|\cos\theta \tag{23}$$

称为向量 **a** 在 $\mathbf{l}^0$ 方向上的投影，其中 θ 是 **a** 与 $\mathbf{l}^0$ 間的夹角。

特别，向量 $\mathbf{a}=(a_x,a_y,a_z)$ 在三个坐标軸方向上的投影为

$$\begin{cases}\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}=|\mathbf{a}|\cos\alpha=a_x,\\\mathbf{a}\cdot\mathbf{j}=|\mathbf{a}|\cos\beta=a_y,\\\mathbf{a}\cdot\mathbf{k}=|\mathbf{a}|\cos\gamma=a_z.\end{cases} \tag{24}$$

也就是說，向量的坐标等于該向量在对应坐标軸上的投影。

例 1. 已知三点 $A(1,1,-1)$，$B(2,2,-1)$ 和 $C(2,1,0)$，求 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 間的夹角 θ.

解： 由已知点的坐标得到

$$\overrightarrow{AB}=(1,1,0),\quad \overrightarrow{AC}=(1,0,1).$$

因此，

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}|}=\frac{1\cdot1+1\cdot0+0\cdot1}{\sqrt{1^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2}.$$

所以

$$\theta=60^\circ.$$

例 2. 已知 $|\mathbf{a}|=2$，$|\mathbf{b}|=1$，夹角 $\theta=\frac{\pi}{3}$，求向量 $\mathbf{A}=2\mathbf{a}+3\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{B}=3\mathbf{a}-\mathbf{b}$ 的夹角 φ.

解： φ 可由下式得到：

$$\cos\varphi=\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{|\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|}.$$

由数量积的运算規律，

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}&=(2\mathbf{a}+3\mathbf{b})\cdot(3\mathbf{a}-\mathbf{b})=6(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})-2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})+9(\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})-3(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})\\&=6|\mathbf{a}|^2+7(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})-3|\mathbf{b}|^2=6\cdot2^2+7\cdot2\cdot1\cos\frac{\pi}{3}-3\cdot1^2=24+7-3=28.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}=|\mathbf{A}|^2&=(2\mathbf{a}+3\mathbf{b})\cdot(2\mathbf{a}+3\mathbf{b})=4(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})+12(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})+9(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})\\&=4\cdot2^2+12\cdot2\cdot1\cos\frac{\pi}{3}+9\cdot1^2=37.\end{aligned}$$

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}=|\mathbf{B}|^2=(3\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot(3\mathbf{a}-\mathbf{b})=9(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})-6(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}$$
$$=9\cdot 2^2-6\cdot 2\cdot 1\cos\frac{\pi}{3}+1^2=31.$$

因此，

$$\cos\varphi=\frac{28}{\sqrt{37}\sqrt{31}}\approx 0.8268,$$

$$\varphi\approx 34°14'.$$

例 3. 已知 $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$，$\mathbf{b}=-3\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$，求向量 $\mathbf{a}$ 在向量 $\mathbf{b}$ 方向上的投影 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}^0$.

解： 由于
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}^0=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}.$$

而
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=2(-3)+3(-1)+(-1)\cdot 1=-6-3-1=-10.$$
$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}=(-3)^2+(-1)^2+1^2=11.$$

因此，

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}^0=\frac{-10}{\sqrt{11}}\approx -3.03.$$

例 4. 求一个单位向量，使它与向量 $\mathbf{a}=\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}$，$\mathbf{b}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ 都垂直。

解： 設所求单位向量为 $\mathbf{x}=x_1\mathbf{i}+x_2\mathbf{j}+x_3\mathbf{k}$. 由于要求 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 都垂直，并且它的大小为 1，因此有

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}=0,\qquad \mathbf{x}\cdot\mathbf{b}=0,\qquad \mathbf{x}\cdot\mathbf{x}=1,$$

用坐标写出，即得方程組：

$$\begin{cases} x_1-3x_2+x_3=0,\\ 2x_1-x_2+3x_3=0,\\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=1.\end{cases}$$

从前两个方程消去 x_3 得

$$x_1-8x_2=0,\quad 即\quad x_1=8x_2.$$

代入第一方程得

$$x_3=-5x_2,$$

将 x_1, x_2 代入第三个方程，得

$$90\ x_2^2=1,\ 即\ x_2=\pm\frac{1}{3\sqrt{10}}.$$

于是所求的单位向量为

$$\mathbf{x}=\pm\frac{1}{3\sqrt{10}}(8\mathbf{i}+\mathbf{j}-5\mathbf{k})\quad(两个解).$$

例 5. 証明 Cauchy 不等式

$$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2).$$

証： 設 $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\mathbf{b}=(b_1,b_2,b_3)$，那么，

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3,$$
$$|\mathbf{a}|^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2,\qquad |\mathbf{b}|^2=b_1^2+b_2^2+b_3^2.$$

由数量积的定义知道

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta,$$

由于

$$|\cos\theta|\leqslant 1,$$

故有

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2\leqslant|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2.$$

即得

$$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2).$$

§ 2.5 向量的向量积

我們来考察刚体以角速度 ω 繞定軸轉动时，M 点的速度 v. 設 M 到轉动軸线的距离是 R，那么轉动时 M 是在半径为 R 的圆周上。所以速度向量 $\mathbf{v}$ 在 M 点圆周的切线上（图 15）。图中位于轉动軸线上的向量 $\boldsymbol{\omega}$ 称为角速度向量，它的大小就等于轉动的角速度 ω；它的方向按照右手螺旋規定，$\mathbf{r}$ 是考察点 M 的位置向量。那么 $\mathbf{v}$ 垂直于 $\boldsymbol{\omega}$、$\mathbf{r}$ 所在的平面，而且三向量 $\boldsymbol{\omega}$、$\mathbf{r}$、$\mathbf{v}$ 构成右手系；以及

$$|\mathbf{v}|=\omega R=|\boldsymbol{\omega}||\mathbf{r}|\sin\theta,$$

其中 θ 是向量 $\boldsymbol{\omega}$、$\mathbf{r}$ 間的夹角。

三向量 $\boldsymbol{\omega}$、$\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{v}$ 的这类关系，不仅在力学现象中存在，在电磁学和其它現象中也存在。

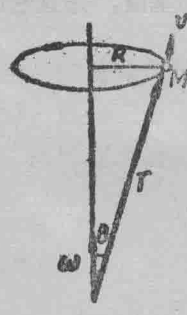

图 15

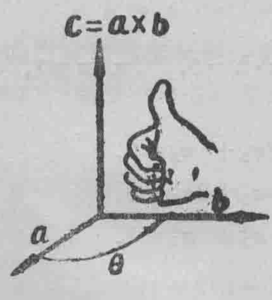

图 16

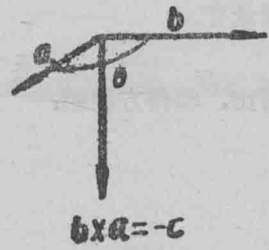

图 17

由于物理上的这类需要，我們还要建立一种向量运算，这就是下面所定义的向量积。

定义．設有向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$，它們的夹角为 θ．現規定另一个向量 $\mathbf{c}$ 如下：$\mathbf{c}$ 的大小为

$$|\mathbf{c}|=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta, \tag{25}$$

$\mathbf{c}$ 的方向要与 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 都垂直，而且 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ 三向量构成右手系。称这样确定的向量 $\mathbf{c}$ 为向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 的向量积（或称外积），記作 $\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$（图 16）．

注意，两个向量的向量积仍然是一个向量，而两个向量的数量积則是一个数．它們各自的名称也說明了这一点。

向量积有下述几何意义。如图 18，以 $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$，$\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$ 为两邻边作一平行四边形 $OADB$，它的面积等于 $OA=|\mathbf{a}|$ 与高 h 的乘积。因为

$$h=|\mathbf{b}|\sin\theta,$$

所以

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$$