# 水资源系统分析

上 册

〔美〕 Y.Y.Haimes 著

陈 益 秋 译

中国环境问题研究会

# 水资源系統分析

## 上　册

〔美〕 Y.Y.Haimes 著

陈　益　秋　　译

中国环境问题研究会

Hierarchical Analyses of Water Resources Systems

Y.Y. Haimes

McGraw Hill 1977

中国环境问题研究会
北京市 939 信箱
华北水利水电学院印刷厂印刷
河北省邯郸市中华路
1981年7月

# 前　　言

从事水资源工作的人都知道水资源及其有关土地系统的复杂性。复杂的原因在于：水资源问题的动态变化和随机性，水资源工程的多目标和多宗旨性，以及水资源网络内部地表水和地下水以及水量和水质等因素的相互耦合。复杂的原因还在于：获得、传递和处理数据的困难，以及决策过程的技术、环境、社会、体制、政治、经济等因素。

本书介绍这种复杂系统的模型化、分析和最优化的系统方法论，特别是对系统的不同组成部分的多宗旨和多目标（它们往往是相互竞争或相互矛盾，并且只能以不可公度的单位量度）进行计量分析。

这里提供大规模水资源系统中系统工程方法论的许多最新研究成果及其应用。特别是由简到繁地介绍谱系多级法在大规模复杂水资源系统中的应用。本书完整地介绍了谱系多级法，因而不要求读者具备谱系多级理论的基础知识。

本书分两大部分。第一部分为数学和系统工程的基础知识，以助理解和应用第二部分的内容。在附录中列举某些数学知识，供读者参考。书中列举了大量例题，示证所介绍的方法论和技术的应用（每种新的方法论至少有一个例题），以提高学习的效果。第二部分介绍用于大规模水资源系统的模型化、分析和最优化的系统方法论和分析手段，并详细介绍了涉及全国各地（俄亥俄州、北大西洋区域、大湖流域、加利福尼亚州等）的地下水、供水系统区域规划、水质控制和管理等问题的案例研究。这些例题对无师自学的读者特别重要。此外，还附有大量专题参考文献目录。显然，这里的结果可以应用于现代生活的许多方面，如运输、保健、通讯、城建、环境和能源等。

本书对象是大学生、教授、工程师、经理和其他涉及水资源系统规划、设计、运行和管理决策过程的专业人员。大部分材料原来是为 *Case Western Reserve* 大学水资源研究生课程和许多一至二周水资源短训班准备的。本书以文献中发表的最新研究成果以及 *Case Western Reserve* 大学1972年以来开设的“水资源规划和管理中的谱系法”课程的笔记为基础。

Yacov Y. Haimes

1977年2月于俄亥俄州克利夫兰

# 目　　录

# 目　　录

# 第一章 最优化技术

## 1.1 模型化和最优化

系统工程应用数学模型和(或)物理模型对一个系统(结构的和非结构的)及其环境的各个方面进行研究和分析。它应用模拟技术和最优化技术，在有关的约束条件下，选择最佳比较方案，作出最好的决策。

数学模型是一组描述和代表真实系统的方程。这组方程揭示问题的不同方面，判别系统的各个组成成分和组成因子及其与环境之间的函数关系，确定其有效性和约束条件，从而指出为了定量地处理问题，需要收集那些数据。随系统的特性而定，这些方程可以是 代 数 方程、微分方程或其他方程。

为了控制和管理一个物理系统，我们建立一个能逼真地反映物理系统的数学模型。然后求解这个数学模型，并把其解施加到物理系统上。

图1.1表示系统模型化和最优化的过程。真实的系统用一个数学模型代表。在真实系统和数学模型上施加同样的输入，产生两个不同的响应，即系统的输出和模型的输出。两个响应的逼真性反映数学模型的精确度和真实性。用最优化技术和模拟技术解数学模型。然后把最优决策施加在物理系统上。

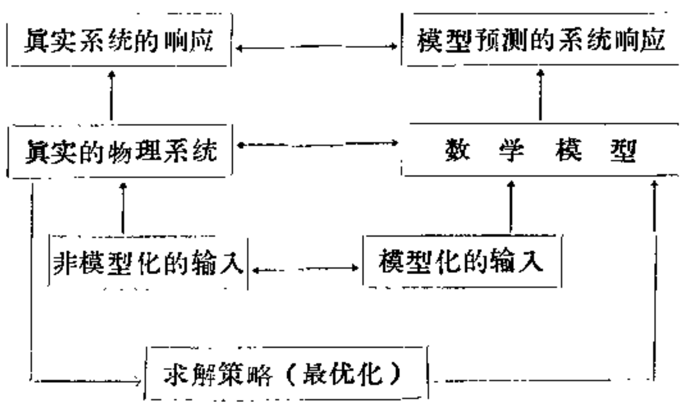


图1.1 系统模型化和最优化过程

在本书中，尽量应用向量符号表示法。

选择一组决策变量(又称控制变量)，在系统的约束条件下，使目标函数达到极大值的过程，称为最优化过程。

下面是一般最优化问题。

选择一组决策变量$x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*$，使目标函数$f(x_1,x_2,\cdots x_n)$极大(极小)；

$$\max_{x_1,\cdots,x_n} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

约束条件

$$\left.\begin{aligned} & g_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant b_1 \\ & g_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant b_2 \\ & \vdots \\ & g_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant b_m \end{aligned}\right\} \qquad (1.1)$$

其中$b_1$，…，$b_m$为已知值。

令 $\mathbf{X}^T=[x_1,x_2\cdots,x_n]$ 表示一个$n$维行向量。上标T表示转置。这样，系统(1.1)可以改写成

$$\left.\begin{aligned} & \max_{\mathbf{X}} f(\mathbf{X}) \\ & \text{约束条件} \\ & g_j(\mathbf{X})\leqslant b_j \quad j=1,2,\cdots,m \end{aligned}\right\} \qquad (1.1')$$

式(1.1)提出的一般最优化问题，可以根据目标函数和约束条件的性质加以分类。下面是数学模型的一种分类法：

1. 线性模型和非线性模型
2. 确定性模型和概率(随机)模型
3. 静态模型和动态模型
4. 集中参数模型和分布参数模型

1. 线性模型和非线性模型：线性模型是用线性方程表示的模型，即所有约束条件和目标函数都是线性的。

非线性模型用非线性方程代表，即部分或全部约束条件和(或)目标函数是非线性的。

例：　　线性方程：　$y=5x_1+6x_2+7x_3$

　　非线性方程：　$y=5x_1^2+6x_2x_3$

$y=\log x_1$

$y=\sin x_1+\log x_2$

2. 确定性模型和概率模型：确定性模型或模型因子，是在任何给定条件的组合下，其各个变量和参数都可以指定一个有限的固定值或一系列的固定值。

在概率(随机)模型中，引入不确定性原理。描述输入输出关系和约束结构的变量或参数都不确切地知道。

例：　"$x$具有90%概率的数值为$(a\pm b)$"，是指在长系列中，有10%的$x$值大于$(a+b)$或小于$(a-b)$。

3. 静态模型和动态模型：静态模型是不明显地考虑时间变量的模型。静态模型一般具有式(1.1)的形式。

动态模型是包含有差分或微分方程的模型，如式(1.2)：

$$\min_{u_1,\cdots,u_M}\int_{t_0}^{t} F(x_1,\cdots,x_N,u_1,\cdots,u_M,t)\,dt \qquad (1.2)$$

约束条件

$$\frac{d}{dt}x_i=G_i(x_1,\cdots,x_N,u_1,\cdots,u_M,t) \quad i=1,2,\cdots,N$$

$$x_i(t_0)=x_i^0 \quad i=1,2,\cdots,N$$

静态最优化问题常称为数学规划问题，而动态最优化问题常称为最优控制问题。

4．分布参数模型和集中参数模型：集中参数模型是指对变化忽略不计，在整个系统中，各个参数和因变量可以认为是均匀的。

分布参数模型考虑系统中逐点的变化。

物理系统多数是分布参数系统。例如，扩散方程

$$T\left[\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\gamma\frac{\partial p}{\partial\gamma}\right)\right]=S\frac{\partial p}{\partial t}\pm Q \tag{1.3}$$

它代表一种分布参数系统，将在第四章中讨论。

有几种最优化技术可以用于求解上述最优化问题，如：

1．微分法

2．线性规划

3．非线性规划

1）直接寻优

2）拉格朗日乘子

3）罚函数

4）梯度法（*Fletcher－Powell* 等）

5）几何规划

6）其他

4．动态规划

5．模拟

6．分解和多级分析法

7．其他

动态系统的有关理论和技术：

1．排队论

2．博奕论

3．网络理论

4．变分法

5．极大值原理

6．拟线性化

7．分解和多级分析法

8．其他

本章简单地介绍一下部分上述技术。

模拟是系统工程中使用的一种方法，在水资源和水文研究中大量应用。[1]模拟是建立一个反映真实情况的模型，然后在模型上进行实验，回答"如果…，则…"的问题。模拟技术可以分成三大类。它以使用数字计数机、模拟计算机或混合计算机（数字和模拟相结合）来区分。用数字计算机模拟比用模拟计算机模拟来得正确，但后者比较快，而且建立模型比较容易。

[1] 参阅 Maass 等（1962年），Hufschmidt 和 Fiering（1966）。

数学模型对确定真实物理问题的最优解起着极其重要的作用。因此，必须科学地和系统地选择模型结构及其参数。[2]

对输入和输出进行观测，据此确定结构参数，这样的工作称为系统识别(见第三章)。

如果真实系统和数学模型对同一信号输入的响应相等（理想的情况），则认为数学模型对系统的模拟是真正“完善”的。但是，一般说来，两者的响应是不等的，存在有误差。因此，建立数学模型应使误差越小越好。

综合以上讨论，可以把系统工程的研究归纳为以下几个方面：

1．详细分析系统的组成成分和收集有关的数据。

2．建立全面的数学模型，集中在一种或几种选定的技术；分析子系统的互相联系(即系统中的耦合）。

3．求解所建立的模型，并检验其有效性，包括：

1）研究计算上面第2步建立的问题的算法。

2）编制最优化技术的计算机程序。

3）确定模型的变量，研究解的稳定性，建立对解的控制。

4．解的执行。

### 1.1.1 数学规划问题的分类

数学规划问题，常称静态最优化问题，可以分成以下类型：

1．无约束问题

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$$

2．经典的等式约束问题

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \qquad g_j(\mathbf{x})=b_j \qquad j=1,2,\cdots,m$$

(特别是当所有函数都是可微的)。

3．非线性规划

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \qquad g_j(\mathbf{x})\geqslant 0 \qquad j=1,2,\cdots,m$$

其中 $f(\mathbf{x})$ 和（或）$g_j(\mathbf{x})$ 为非线性函数。

4．线性规划

$$\min_{x\geqslant 0} \mathbf{C}^T\mathbf{x} \qquad \mathbf{A}\mathbf{x}\geqslant \mathbf{b}$$

其中$\mathbf{A}$为系数矩阵，$\mathbf{b}$为约束向量。

5．二次规划

$$\min_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}+\mathbf{C}^T\mathbf{x} \qquad \mathbf{A}\mathbf{x}\geqslant \mathbf{b}$$

其中 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{Q}$ 为系数矩阵。

6．可分规划

$$\min_{\mathbf{x}} \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \qquad \mathbf{A}\mathbf{x}\geqslant \mathbf{b} \qquad \mathbf{x}\geqslant 0$$

---

[2] 关于模型结构的详细讨论，参阅第四章“模型化和系统识别”。

7. 离散规划

以上各项加上某些变量为整数的要求。

下面将顺序讨论某些上述类型及其最优化技术。

## 1.2 經典的无約束最优化问题

一般的无约束问题可以表述为

$$\min_{x} f(x)$$

其中 $f(x)$ 为任何线性或非线性函数。如 $f(x)$ 是可微的，则通过微分可以导出极小的必要和充分条件。不动性条件是函数局部极小的必要条件，但不是充分条件。驻点是函数极小、极大或反曲的地方。

**不动性的必要条件**　对于函数 $f(x)$，点 $x=x^{\circ}$ 是驻点的必要条件，是 $f(x)$ 在 $x=x^{\circ}$ 的梯度等于零：

$$\nabla_x f(x^{\circ})=0,\qquad \text{其中} \nabla_x f(x)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

由于这在函数的极小、极大和反曲点都适用，因此这个条件是极小的必要条件，但不是充分条件。

**极小的充分条件**　点 $x=x^{\circ}$ 是函数 $f(x)$ 的局部极小的充分条件是海森矩阵 $H[f(x)]$ 是正定的，此处

$$H[f(x)]=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

注意，海森矩阵是对称的。海森矩阵 H 是正定的必要和充分条件，是 H 的主子式是正的（*Sylvester* 定理）。

类似地，极大的充分条件是海森矩阵 $H[f(x)]$ 是负定的。海森 H 是负定的必要和充分条件，是所有奇数主子式是负的，而所有偶数主子式是正的（*Sylvester* 定理）。

例：　$$\min f(x)=(x_1-2)^2+(x_2-1)^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=2(x_1-2)\qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}=2(x_2-1)$$

驻点在 $\partial f/\partial x_1=0$， $\partial f/\partial x_2=0$，或 $x_1^0=2$， $x_2^0=1$。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}=0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}=2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}=2$$

因此海森矩阵 $\mathbf{H}$ 为

$$\mathbf{H}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

第一主子式为 $2>0$，第二主子式为 $4>0$。

因此，海森是正定的，函数 $f(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x}^0=(2，1)$ 处极小。

上述极小或极大的必要和充分条件，对于有约束的最优化问题不适用。例如，给定约束条件 $x_1\leqslant 0$，则从上述产生极小的条件获得的正值 $x_1$ 是不可行的。有约束的最优化问题将在第1·7节中讨论。

## 1.3 經典的等式約束问题

**拉格朗日表述**　经典的等式约束问题的一般表述可以给定如下：

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$$

约束条件

$$g_j(\mathbf{x})=0 \qquad j=1,2,\cdots,m$$

其中 $f(\mathbf{x})$ 是一个连续函数(可微)，$g_j(\mathbf{x})$，$j=1,2,\cdots,m$，有连续一阶导数。这一般表述为

$$f(\mathbf{x})\in C^1 \qquad g_j(\mathbf{x})\in C^2 \qquad j=1,2,\cdots,m$$

其中 $C^1$ 表示所有连续函数的集合，

$C^2$ 表示具有连续一阶导数的函数的集合。

如果约束集是线性的，即如所有 $g_j(\mathbf{x})=0$，$j=1,2,\cdots,m$，为线性函数，则这些函数可以代入目标函数 $f(\mathbf{x})$，得出无约束的最优化问题。

### 1·3·1 拉格朗日函数

对于非线性等式约束，可以利用拉格朗日表述。考察下列具有两个决策变量 $x_1$ 和 $x_2$ 的简单最优化问题：

$$\min_{x_1,x_2} f(x_1,x_2)$$

等式约束条件

$$g(x_1,x_2)=b$$

其中

$$f(x_1,x_2)\in C^1$$
$$g(x_1,x_2)\in C^2$$

把约束写成

$$g(x_1,x_2)-b=0$$

定义下列称为拉格朗日的函数 $L$：

$$L(x_1,x_2,\lambda)=f(x_1,x_2)+\lambda[g(x_1,x_2)-b]$$

其中 $\lambda$ 是拉格朗日乘子。注意，如果在 $(x_1^*, x_2^*)$ 处约束得到满足，则 $g(x_1^*, x_2^*)=b$，$g(x_1^*, x_2^*)-b=0$；因此，$L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)=f(x_1^*, x_2^*)$，其中 $\lambda^*$ 是最优的拉格朗日乘子，即拉格朗日的数值和目标函数的数值相同。

$L$的驻点的必要条件是：

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=\frac{\partial L}{\partial x_2}=\frac{\partial L}{\partial \lambda}=0$$

或展开成：

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=\frac{\partial f}{\partial x_1}+\lambda\frac{\partial g}{\partial x_1}=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=\frac{\partial f}{\partial x_2}+\lambda\frac{\partial g}{\partial x_2}=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=g-b=0$$

这是具有三个未知数 $x_1$，$x_2$，$\lambda$ 的三个方程；其解产生驻点 $x_1^*$，$x_2^*$和 $\lambda^*$。如满足极小的充分条件，则 $(x_1^*, x_2^*, \lambda)$ 产生 $f(x_1, x_2)$的极小值。

### 1.3.2 拉格朗日函数的一般表述

考察下列一般的等式约束的非线性最优化问题：

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$$

等式约束：

$$g_j(\mathbf{x})=b_j \qquad j=1,2,\cdots,m$$

其中

$$f(\mathbf{x})\in C^1$$

$$g_j(\mathbf{x})\in C^2 \qquad j=1,2,\cdots,m$$

列出拉格朗日$L$：

$$L(\mathbf{x},\lambda)=f(\mathbf{x})+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j[g_j(\mathbf{x})-b_j]$$

其中 $\lambda^T \triangle (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)$

$L$ 的驻点的必要条件为：

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}=0\text{，得}\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\frac{\partial g_j(\mathbf{x})}{\partial x_i}=0 \qquad i=1,2,\cdots,n$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_k}=0\text{，得}\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \lambda_k}+\sum_{j=1}^{m}[g_j(\mathbf{x})-b_j]\frac{\partial \lambda_j}{\partial \lambda_k}=0 \qquad k=1,2,\cdots,m$$

注意

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial \lambda_k}=\delta_{jk}$$

其中

$$\delta_{jk}=\begin{cases}1 & j=k\\ 0 & j\neq k\end{cases}$$

格拉朗日函数$L$具有许多重要的特性，将在以后进行讨论。

1·3·2·1 例 题

有一封闭园柱形水箱，其体积给定为 $V_0$，具有最小的表面积，试求其半径 $r$ 和高度 $h$：

$$V_0=\pi r^2h$$

令$S$＝表面积＝$2\pi rh$，目标函数为

$$\min_{r,h}\left\{f(r,h)=2\pi rh+2\pi r^2\right\}$$

约束条件：

$$g(r,h)=\pi r^2h=V_0$$

列出拉格朗日$L$：

$$\begin{aligned}L(r,h,\lambda)&=f(r,h)+\lambda[g(r,h)-V_0]\\&=2\pi rh+2\pi r^2+\lambda(\pi r^2h-V_0)\end{aligned}$$

最优的必要条件：

$$1.\ \frac{\partial L}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial r}+\lambda\frac{\partial g}{\partial r}=0$$

$$2.\ \frac{\partial L}{\partial h}=\frac{\partial f}{\partial h}+\lambda\frac{\partial g}{\partial r}=0$$

$$3.\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=\pi r^2h-V_0=0$$

代入下列导数：

$$\frac{\partial f}{\partial r}=2\pi(h+2r);\quad \frac{\partial f}{\partial h}=2\pi r;\quad \frac{\partial g}{\partial r}=2\pi rh;\quad \frac{\partial g}{\partial h}=\pi r^2$$

得下列三个方程：

1．$2\pi(h+2r)+2\lambda\pi rh=0$

2．$2\pi r+\lambda\pi r^2=0$

3．$\pi r^2h-V_0=0$

或

4．$h+2r+\lambda rh=0$

5．$2r+\lambda r^2=0$

6．$\pi r^2h-V_0=0$

联解后面三个方程，得

$$\lambda^*=-\frac{2}{r}$$

$$r^*=\sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}$$

$$h^*=\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}V_0}$$

和

$$f(r^*,h^*)=2\pi\sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}V_0}+2\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}\right)^2$$

### 1.3.3 拉格朗日乘子和不等式约束

上述拉格朗日方法适用于具有等式约束的非线性规划问题。导入广义拉格朗日乘子（也称 $Kuhn-Tucker$[3]乘子），处理具有不等式约束的非线性问题。为了便于讨论非线性规划中的 $Kuhn-Tucker$ 理论，先讨论不等式约束的经典方法。

考察问题

$$\min_{x_1,x_2} f(x_1,x_2)$$

约束条件

1. $g(x_1,x_2)=b$

和 2. $x_1\geqslant a$

导入变量 $\theta$，把它变换成等式。变量 $\theta$ 定义为

$$\theta^2=x_1-a$$

要求 $\theta$ 为实数，如 $x_1\geqslant a$，则 $\theta^2\geqslant 0$（如 $x_1<a$，则 $\theta^2<0$，$\theta$ 是虚数）。因此，两个约束条件可改写为：

1. $g(x_1,x_2)-b=0$
2. $\theta^2-x_1+a=0$

列出拉格朗日 $L$：

$$L(x_1,x_2,\theta,\lambda_1,\lambda_2)=f(x_1,x_2)+\lambda_1[g(x_1,x_2)-b]+\lambda_2[\theta^2-x_1+a]$$

驻点的必要条件：

1. $\dfrac{\partial L}{\partial x_1}=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}+\lambda_1\dfrac{\partial g}{\partial x_1}-\lambda_2=0$

2. $\dfrac{\partial L}{\partial x_2}=\dfrac{\partial f}{\partial x_2}+\lambda_1\dfrac{\partial g}{\partial x_2}=0$

3. $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1}=g-b=0$

4. $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2}=\theta^2-x_1+a=0$

5. $\dfrac{\partial L}{\partial \theta}=2\lambda_2\theta=0$

分析条件（5），对 $2\lambda_2\theta=0$，可以区分两种情况：

情况 I　$\theta=0$，则 $x_1=a$

这种情况的解在边界上，即约束是制约的。制约约束常称为主动约束。$x_2$ 不一定等于零。

情况 II　$\lambda_2=0$，则 $\theta\neq 0$

这种情况的解不在边界上，即约束是非制约的。非制约的约束常称为非主动约束。

#### 1.3.3.1 例 题

有一个海水淡化厂，在三个连续时段中生产淡水。淡水的需要量在第一时段末为 5 单位（英亩-英尺），第二时段末为 10 单位，第三时段末为 15 单位。在任一时段生产 $x$ 单位的费用为

[3] 根据第1·7节讨论的Kuhn－Tucker条件，参阅Kuhn和Tucker（1950）。