高等数学教程

第二卷　第一分册

В. И. 斯米尔诺夫著
孙　念　增　译

人民教育出版社

简装本说明

目前 850×1168 毫米规格纸张较少，本书暂以 787×1092 毫米规格纸张印刷，定价相应减少 20%。希鉴谅。

高 等 数 学 教 程

第二卷 第一分册

B. И. 斯米尔诺夫著

孙 念 增 译

人民教育出版社出版（北京景山东街）

黄 冈 县 印 刷 厂 印 装

新 华 书 店 北 京 发 行 所 发 行

各 地 新 华 书 店 经 售

统一书号13012·0329 开本787×1092 1/32 印张5

字数147,000 印数69,001—169,000 定价0.40元

1957年12月新1版 1958年10月新2版

1979年5月湖北第12次印刷

原書第六版序

第二卷的这一版与以前的版本有很大的出入。以前的版本中，講复数理論、高等代数初步及函数积分法的整个第一章，現已放在第一卷中了。而第一卷中关于向量代数基础的材料則已移到第二卷中，与向量分析一起組成本卷第四章。

其余各章的叙述也有重大改动，特别是第三，六，七，章。在第三章中还补充了特殊的一节，專門叙述度量的理論以及重积分的严格理論。在第六章中，有一些材料重新安排了，并且补充了关于封閉性方程的証明。这个証明根据的是維尔史特拉斯的关于用多項式来逼近連續函数的定理。在第七章中补充了球面波与柱面波的傳播問題以及关于波动方程的解的克希荷夫公式。常系数綫性微分方程的叙述，开始时沒有应用記号方法。

每一章的第一节保存了以前的叙述的特征。例題与补充的理論材料印成小号字。 全部叙述是这样作的，可以只学習印成大号字的主要材料。

Г. М. 費赫金哥尔茨教授看过这一版的全部原稿，并且在叙述方面提了很多宝貴的意見，为此，我对他表示深深的謝意。

B. 斯米尔諾夫

1937 年 6 月 13 日

原書第十四版序

第二卷的这一版总的布置与前一版相同。但在很多地方有些小改动，其目的是使叙述明确，而且更清楚些。

改动最多的地方，是第三章的第九节"关于重积分理論的补充知識"。

在第七章里，講述了数学物理的最簡單問題，把解一些主要問題时的条件叙述得更确切些。

在这一章的个别地方，也对將要在第四卷里詳細叙述的一些問題作了一些提示。

B. 斯米尔諾夫

1955 年 10 月 4 日

第一分册目次

第一章　常微分方程 ……………………………………………1

§1. 一阶方程 ……………………………………………1

1. 一般概念(1)　2. 可分离变量的方程(2)　3. 齐次方程(5)　4. 綫性方程及白諾利方程(9)　5. 依照初始条件确定微分方程的解(16)　6. 尤拉-勾犀方法(19)　7. 一般积分(22)　8. 克列罗方程(27)　9. 拉格朗日方程(29)　10. 曲綫族的包絡及奇解(31)　11. y' 的二次方程(35)　12. 等角軌綫(36)

§2. 高阶微分方程及方程組 ……………………………………………39

13. 一般概念(39)　14. 二阶微分方程的圖解法(42)　15. 方程 $y^{(n)}=f(x)$ (45)　16. 梁的弯曲(47)　17. 微分方程的降阶法(51)　18. 常微分方程組(55)　19. 例(58)　20. 方程組与高阶方程(62)　21. 綫性偏微分方程(64)　22. 几何的解釋(67)　23. 例(70)

第二章　綫性微分方程及微分方程論的补充知識 ……………73

§3. 一般理論及常系数方程 ……………………………………………73

24. 二阶齐次綫性方程(73)　25. 二阶非齐次綫性方程(76)　26. 高阶綫性方程(78)　27. 常系数二阶齐次方程(80)　28. 常系数二阶非齐次綫性方程(82)　29. 特殊情形(84)　30. 常系数高阶綫性方程(86)　31. 綫性方程与振动現象(87)　32. 自有振动与强迫振动(90)　33. 正弦量外力与共振(93)　34. 冲力型外力(97)　35. 靜态作用的外力(98)　36. 細的彈性樞軸受縱向力压縮的持久性(100)　37. 旋轉軸(102)　38. 記号方法(103)　39. 常系数高阶齐次綫性方程(107)　40. 常系数非齐次綫性方程(110)　41. 例(111)　42. 尤拉方程(112)　43. 常系数綫性方程組(114)　44. 例(119)

§4. 借助于幂級数求积分 ……………………………………………122

45. 借助于幂級数求綫性方程的积分(122)　46. 例(125)　47. 解的展开为广义幂級数的形狀(127)　48. 貝塞尔方程(129)　49. 可以化为貝塞尔方程的方程(132)

§5. 关于微分方程論的补充知識 ……………………………………………134

50. 綫性方程的逐次逼近法(134)　51. 非綫性方程的情形(142)　52. 一阶微分方程的奇点(147)　53. 流体的平面共綫运动的流綫(149)

第一章　常微分方程

§1. 一阶方程

1. 一般概念　除含自变量及这些自变量的未知函数外，还含有未知函数的导数或微分的方程，叫做微分方程[I, 51]。若微分方程中的函数只依赖于一个自变量，则这方程叫做常微分方程。若在方程中有未知函数对几个自变量的偏导数，则这方程叫做偏微分方程。在这一章中我們將只考慮常微分方程，并且大部分專講含一个未知函数的一个方程的情形。

設 x 是自变量，y 是 x 的未知函数。微分方程的一般形狀是：

$$\Phi(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)})=0。$$

在方程中出現的各阶导数的最高阶数 n，叫做这微分方程的阶。在这一节中我們考慮一阶常微分方程。这种方程的一般形狀是：

$$\Phi(x, y, y')=0 \tag{1}$$

或者，写成解出 y' 的形式：

$$y'=f(x, y)。\tag{2}$$

若某一函数

$$y=\varphi(x) \tag{3}$$

适合一个微分方程，就是說，当用 $\varphi(x)$ 及 $\varphi'(x)$ 代入作 y 及 y' 时，这方程成为恒等式，則函数 $\varphi(x)$ 叫做这个微分方程的解。

微分方程的解的求法有时叫做微分方程的积分法。

若把 x 与 y 看作平面上点的坐标，則微分方程（1）［或（2）］

表示出某一曲綫上点的坐标与这曲綫在該点的切綫斜率之間的关系。微分方程的解(3),就对应于这样一条曲綫,这曲綫上的点的坐标与切綫的斜率适合該微分方程。这样的曲綫叫做所給微分方程的积分曲綫。

最簡單的情形,是当方程(2)的右边不含 y 时,就得到下面形狀的微分方程。

$$y'=f(x)。$$

这个方程的解的求法就是积分学中的基本問題[I, 86],于是公式

$$y=\int f(x)dx+C,$$

給出全部的解,其中 C 是任意常数。如此,在这最簡單的情形下,我們得到微分方程含有任意常数的解。我們將看到,一般的一阶微分方程,也会有含一个任意常数的解;这样的解叫做方程的一般积分。給任意常数以不同的数値,就得到方程的不同的解——这样的解叫做方程的特解。

以下几段中,我們講几种特殊类型的一阶方程,它們的积分法可以化为不定积分的計算,或者說,它們的积分法可以化为求面积法①。

2. 可分离变量的方程 在微分方程(2)中,用 $\frac{dy}{dx}$ 替代 y',兩边用 dx 乘,再把所有的項都移到左边来,就可以把它化为下面的形狀:

$$M(x, y)dx+N(x, y)dy=0, \tag{4}$$

在某些情形下,写成这样是比較方便的。这时,兩个变量 x 与 y 在方程中具有同样的地位,因为方程(4)沒有規定出我們該选擇那一个作为未知函数。于是我們可以取 y,也可以取 x,作为未知函数。

① 积分的計算与面积的計算有直接連系,故有“求面积法”这个名称。

設函数 $M(x, y)$ 与 $N(x, y)$ 中每一个都可以分解为两个因子之积，而这两个因子中，一个只依赖于 x，另一个只依赖于 y:

$$M_1(x)M_2(y)dx+N_1(x)N_2(y)dy=0。\tag{5}$$

用 $M_2(y)N_1(x)$ 除这方程的两边，就化为下面的形状：

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx+\frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy=0,\tag{6}$$

于是 dx 的系数只依赖于 x，dy 的系数只依赖于 y。方程（5）叫做可分离变量的方程 [I, 93]，化为形状（6）的方法叫做分离变量法。

方程（6）的左边是表达式

$$\int\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx+\int\frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy$$

的微分，而这表达式的微分等于零就相当于这表达式等于一任意常数

$$\int\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx+\int\frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy=C,\tag{7}$$

其中 C 是任意常数。这个公式給出了无穷多个解；就几何意义来說，它表示出积分曲綫族的隐式方程。若計算出方程（7）中的积分，再解出 y，就得到积分曲綫族（微分方程的解）的显式方程：

$$y=\varphi(x, C)。$$

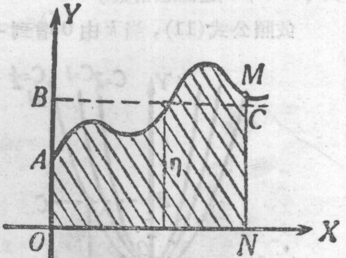

图 1.

例 界于坐标軸，曲綫弧 AM 以及纵坐标 MN 之間的面积 $OAMN$（图 1），与同底 $ON=x$，高为 η 的矩形 $OBCN$ 的面积相等：

$$\int_0^x y\,dx=x\eta;\qquad \eta=\frac{1}{x}\int_0^x y\,dx。\tag{8}$$

η 叫做曲綫在区間 $(0, x)$ 上的纵坐标平均值。

我們来求这样的曲綫，让它們的纵坐标平均值与边端坐标 NM 成正比。根据公

式(8)就有:

$$\int_0^x y\,dx = k\,xy, \tag{9}$$

其中 k 是比例系数。由方程(9)逐項求导数,就得到微分方程

$$y = ky + k\,xy' \quad 或 \quad xy' = ay, \tag{10}$$

其中

$$a = \frac{1-k}{k}。 \tag{11}$$

求导数时,我們可能引入一些外加的解;因为由两边的导数相等,只能推出两边的函数相差为常数項。不过在上述的情形下,并沒有外加的解。实际上,方程(10)是由方程(9)逐項求导数得到的,于是由方程(10)推出,方程(9)的两边只可能差一常数項。但是直接可以看出,当 $x=0$ 时,两边都等于零,于是所説的常数項也得等于零,就是説,方程(10)的任何一个解都是方程(9)的解。現在来求方程(10)的积分。它可以写成

$$x\frac{dy}{dx} = ay,$$

再分离变量:

$$\frac{dy}{y} = a\frac{dx}{x}。$$

求积分,得到:

$$\lg y = a\lg x + C_1 \quad 或 \quad y = Cx^a, \tag{12}$$

其中 $C = e^{C_1}$ 是任意常数。

依照公式(11),当 k 由 0 增到 $+\infty$ 时,a 就由 $+\infty$ 减小到 (-1);因此,我們应当

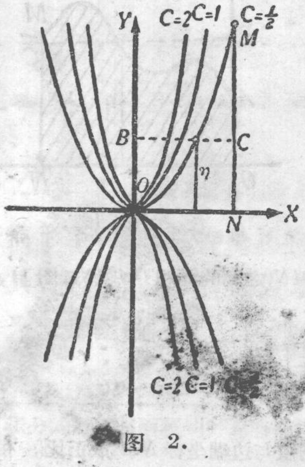

图 2.

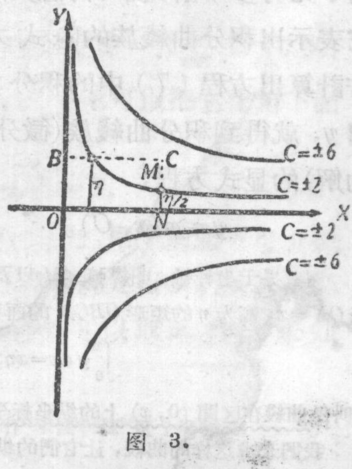

图 3.

設 $a>-1$，以使方程（9）左边的积分在任何情形下总有意义。当 $k=1$ 时，$a=0$，于是方程(12)給出很明显的解——平行于 OX 軸的直綫族。当 $k=\frac{1}{3}$ 时，$a=2$，就得到拋物綫族(圖 2)：

$$y=Cx^2,$$

对于这些拋物綫，縱坐标的平均值等于其边端坐标的三分之一。当 $k=2$ 时，得到曲綫族：

$$y=\frac{C}{\sqrt{x}},$$

这些曲綫的縱坐标的平均值等于其边端坐标的二倍(圖 3)。

3. 齐次方程 下面形狀的方程叫做齐次方程

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right)^{①}。\tag{13}$$

保留原来的自变量 x，引入新的函数 u 以替代 y：

$$y=xu，由此\ y'=u+xu'。\tag{14}$$

变換方程(13)，得到

$$u+xu'=f(u)\ 或\ x\frac{du}{dx}=f(u)-u。$$

分离变量：

$$\frac{dx}{x}+\frac{du}{u-f(u)}=0。$$

用 $\psi_1(u)$ 記 du 的系数，就得到：

$$\lg x+\int\psi_1(u)\,du=C_1,$$

由此

$$x=Ce^{-\int\psi_1(u)du}\ 或\ x=C\psi(u),$$

其中 $C=e^{C_1}$ 是任意常数。

代回原来的变量 y，积分曲綫族的方程可以写成：

① 注意，二元函数 $\varphi(x, y)$ 若只是比 $\frac{y}{x}$ 的函数，必須且仅須，当 x 与 y 同乘以任意乘数 t 时，函数 $\varphi(x, y)$ 的值不变，就是 $\varphi(tx, ty)=\varphi(x, y)$。这个条件相当于 $\varphi(x, y)$ 是 x 与 y 的零次齐次函数[I, 151]。

$$x=C\psi\left(\frac{y}{x}\right)。\tag{15}$$

考虑平面 XOY 的以坐标原点为相似中心的相似变换。这样的变换使得点 $(x,\ y)$ 变到新的位置

$$x_1=kx;\quad y_1=ky\quad (k>0),\tag{16}$$

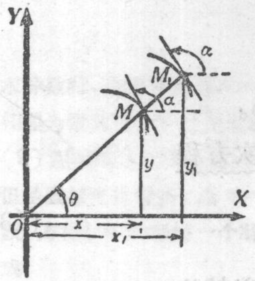

圖 4.

或者說，它使得平面上每点矢徑的長乘上 k，而方向不变。若一点原来的位置是 M，經过变换后的位置是 M_1，則(圖 4)：

$$\overline{OM_1}:\overline{OM}=x_1:x=y_1:y=k。$$

把变换(16)施用于方程(15)，就得到：

$$x_1=kC\psi\left(\frac{y_1}{x_1}\right),\tag{17}$$

由于常数 C 是任意的，这个方程与方程(15)并無区别，就是說，变换(16)并沒有改变了曲綫族(15)的整体，只不过把曲綫族(15)中的一条变到同一曲綫族中的另一条而已。显然，曲綫族(15)中任何一条曲綫，都可以由这族中一条固定的曲綫通过变换(16)得到，只須适当的选擇常数 k 就成了。所得到的結果可以叙述成：齐次方程的所有积分曲綫，都可以由一条积分曲綫借助于以坐标原点为相似中心的相似变換而得到。

方程(13)可以改写成：

$$\operatorname{tg}\alpha=f(\operatorname{tg}\theta),$$

其中 $\operatorname{tg}\alpha$ 是切綫的斜率，θ 是由坐标原点作出的矢徑与 OX 軸正向的夾角。如此，方程(13)建立了 α 角与 θ 角之間的关系，所以，沿着过坐标原点的任何一条直綫，齐次方程的各积分曲綫的切綫应当是互相平行的(圖 4)。

由于切綫的这个性質，使得以原点为中心的相似变换把一条积分曲綫仍变到一条积分曲綫这件事更明显了，因为当曲綫上点的矢徑以相同的比例伸長或縮短时，每一矢徑上的切綫的方向不

变(图5)。

当积分曲綫是通过坐标原点的直綫时,若我們施用上述的相似变換,則变換后所得到的仍是原来的直綫,所以,在这情形下,上述由一条积分曲綫得到其他积分曲綫的方法,是不适用的。

图 5.

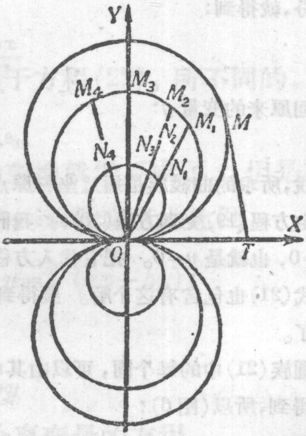

图 6.

例　求一族曲綫,使得:由切綫与 OX 軸的交点 T 到切点 M 的綫段 MT 等于 OX 軸上的截距 OT (图6)。

切綫的方程是

$$Y-y=y'(X-x),$$

其中 (X, Y) 是切綫上的流动坐标,让 $Y=0$, 就得到切綫在 OX 軸上的截距:

$$\overline{OT}=x-\frac{y}{y'},$$

再由条件 $\overline{MT}^2=\overline{OT}^2$, 就得到 [I, 77]

$$\frac{y^2}{y'^2}+y^2=\left(x-\frac{y}{y'}\right)^2,$$

由此得到微分方程:

$$y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}, \quad = 2\cdot\frac{\frac{y}{x}}{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2} \tag{18}$$

这显然是个齐次方程。

依照下面的公式,引入新函数 u 以替代 y:

$$y=xu; \quad y'=xu'+u。$$

代入方程(18),就有:

$$xu'+u=\frac{2u}{1-u^2} \text{ 或 } x\frac{du}{dx}-\frac{u+u^3}{1-u^2}=0, \tag{19}$$

再分离变量:

$$\frac{dx}{x}-\frac{1-u^2}{u+u^3}du=0。 \tag{20}$$

求积分,就得到:

$$\frac{x(u^2+1)}{u}=C,$$

再代回原来的变量 y:

$$x^2+y^2-Cy=0, \tag{21}$$

就是説,所求的曲綫族是通过坐标原点且在这点与 OX 軸相切的一族圓(图 6)。

由方程(19)变到方程(20)时:我們把方程的两边用 $(u+u^3)$ 除了,这可能失去一个解 $u=0$, 也就是 $y=0$。把它代入方程(18)中,我們看出它确是这方程的一个解。不过公式(21)也包含有这个解。要得到它,只須把公式(21)的两边用 C 除,再令 $C=\infty$ 就行了。

圓族(21)中的每个圓,可以由其中一个圓借助于以坐标原点为相似中心的相似变换而得到,所以(图 6):

$$\frac{\overline{OM_1}}{\overline{ON_1}}=\frac{\overline{OM_2}}{\overline{ON_2}}=\frac{\overline{OM_3}}{\overline{ON_3}}=\cdots。$$

我們現在讲,微分方程:

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right) \tag{22}$$

可以化为齐次方程。引入新变量 ξ 与 η 来替代 x 与 y:

$$x=\xi+\alpha,\quad y=\eta+\beta, \tag{23}$$

其中 α 与 β 是我們現在要确定的常数。

代入新变量到方程(22)中,就得到:

$$\frac{d\eta}{d\xi}=f\left(\frac{a\xi+b\eta+a\alpha+b\beta+c}{a_1\xi+b_1\eta+a_1\alpha+b_1\beta+c_1}\right)。$$

我們由下面两个条件来确定 α 与 β:

$$a\alpha+b\beta+c=0,\quad a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0。$$

这样,方程就化为齐次的了:

$$\frac{d\eta}{d\xi}=f\left[\frac{a+b\dfrac{\eta}{\xi}}{a_1+b_1\dfrac{\eta}{\xi}}\right]。$$

变换(23)相当于坐标轴的平移，而坐标原点变到直綫

$$ax+by+c=0 \text{ 与 } a_1x+b_1y+c_1=0 \tag{24}$$

的交点(α, β)。

如此，以前所得到的結果也适用于方程(22)，所不同的，只是点(α, β)起了坐标原点的作用。

若直綫(24)互相平行，則上述的变换就做不成了。但是在这情形下，由解析几何学知道，方程(24)的系数应当成比例：

$$\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\lambda \text{ 于是 } a_1x+b_1y=\lambda(ax+by);$$

引入新变量u:

$$u=ax+by$$

以替代y，不难看出，这样就得到可分离变量的方程。

以后我們要講齐次方程在流体力学中極重要的应用。

4. 綫性方程及白諾利方程 下面形狀的方程叫做一阶綫性方程：

$$y'+P(x)y+Q(x)=0。\tag{25}$$

先考虑对应的沒有自由項$Q(x)$的方程

$$z'+P(x)z=0。$$

分离变量：

$$\frac{dz}{z}+P(x)dx=0,$$

就得到：

$$z=Ce^{-\int P(x)dx}。\tag{26}$$

为要解給定的綫性方程(25)，我們应用改变任意常数法，就是設这方程的解具有类似于(26)中的z的形式：

$$y=ue^{-\int P(x)dx}, \tag{27}$$

不过其中 u 不是常数，而是 x 的一个未知函数。求导数，就得出：

$$y'=u'e^{-\int P(x)dx}-P(x)ue^{-\int P(x)dx}。$$

代入到方程(25)中，得到：

$$u'e^{-\int P(x)dx}+Q(x)=0$$

$$u'=-Q(x)e^{\int P(x)dx},$$

由此

$$u=C-\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx,$$

最后，依照等式(27)，就得到：

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[C-\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx\right]。\tag{28}$$

由这个公式确定 y 时，对于不定积分

$$\int P(x)\,dx \text{ 与 } \int Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx,$$

只須任取一个值就成了，因为它們加上任意常数，只不过改变 C 的值而已。

用上限为变量的定积分 [**I, 96**]，来替代上面兩个不定积分，公式(28)就可以写成：

$$y=e^{-\int_{x_0}^{x}P(x)dx}\left[C-\int_{x_0}^{x}Q(x)e^{\int_{x_0}^{x}P(x)dx}\,dx\right], \tag{29}$$

其中 x_0 是任意选定的一个数。当变上限代入以值 $x=x_0$ 时，上式右边就等于 C，因为上下限相同的积分等于零，就是説公式(29)中的常数 C，是函数 y 在 $x=x_0$ 时的值。我們把这个值記作 y_0，叫做解的初值。

为了表示这种情况，我們写成：

$$y|_{x=x_0}=y_0。\tag{30}$$

如此，若給定了未知解在 $x=x_0$ 时的初值，則公式(29)給出方程的完全确定的解：

$$y=e^{-\int_{x_0}^{x}P(x)dx}\left[y_0-\int_{x_0}^{x}Q(x)e^{\int_{x_0}^{x}P(x)dx}dx\right]。\tag{31}$$

条件(30)叫做初始条件，从几何观点来看，这就相当于所求的积分曲綫要通过給定的点(x_0, y_0)。

若設 $Q(x)\equiv 0$，就得到齐次方程

$$y'+P(x)y=0$$

的适合于条件(30)的解：

$$y=y_0e^{-\int_{x_0}^{x}P(x)dx}。\tag{31_1}$$

由公式(29)推知，綫性微分方程的解有下面的形狀：

$$y=\varphi_1(x)C+\varphi_2(x),\tag{32}$$

就是說，y 是任意常数的綫性函数。

設 y_1 是方程(25)的解，讓

$$y=y_1+z,$$

就得到关于 z 的方程：

$$z'+P(x)z+[y_1'+P(x)y_1+Q(x)]=0。$$

因为假設了 y_1 是方程(25)的解，所以方括号以内的和等于零。因此，z 是对应的沒有自由項的方程的解，它是由公式(26)所确定的，所以：

$$y=y_1+Ce^{-\int P(x)dx}。\tag{33}$$

現在設已知方程(25)的另一个解 y_2，并設它是由公式(33)在 $C=a$ 时得到的：

$$y_2=y_1+ae^{-\int P(x)dx}。\tag{34}$$

由等式(33)与(34)消去 $e^{-\int P(x)dx}$，就得到綫性方程的解通过其两个解 y_1 与 y_2 来表达的公式：

$$y=y_1+C_1(y_2-y_1), \tag{35}$$

其中 C_1 是任意常数，它替代了以上的 $\frac{C}{a}$。由方程 (35) 推出下面的关系式：

$$\frac{y_2-y}{y-y_1}=\frac{1-C_1}{C_1}=C_2, \tag{36}$$

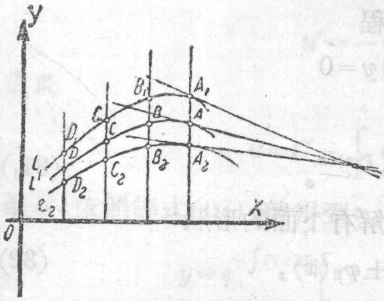

圖 7.

这表明了，比 $\frac{y_2-y}{y-y_1}$ 是个常量，就是說，綫性方程的积分曲綫族是这样一个曲綫族，其中任何一条曲綫，把这族中任意兩条曲綫之間的縱坐标綫段分为定比。

如此，若已知綫性方程的兩条积分曲綫 L_1 与 L_2，則任何一条其他的积分曲綫，可由比(圖 7)

$$\frac{\overline{AA_2}}{\overline{A_1A}}=\frac{\overline{BB_2}}{\overline{B_1B}}=\frac{\overline{CC_2}}{\overline{C_1C}}=\frac{\overline{DD_2}}{\overline{D_1D}}=\cdots$$

的常数值确定出来。

根据上面的等式，弦 A_1B_1, AB 与 A_2B_2 应当是，或者交于一点，或者互相平行，当縱坐标綫段 $\overline{B_1B_2}$ 無限逼近于綫段 $\overline{A_1A_2}$ 时，这些弦的方向变为各曲綫在 A_1, A, A_2 点的切綫方向，于是我們得到下面关于綫性方程的积分曲綫的切綫的性質：在綫性方程的各积分曲綫与一条平行于 OY 軸的直綫的交点处，各曲綫的切綫或者互相平行，或者交于一点。

例 1. 在有自感的电路中，考虑交变电流的暂态过程。設 i 記电流强度，v 記电压，R 記电路的电阻，L 記自感系数。

我們有关系式：

$$v=Ri+L\frac{di}{dt},$$