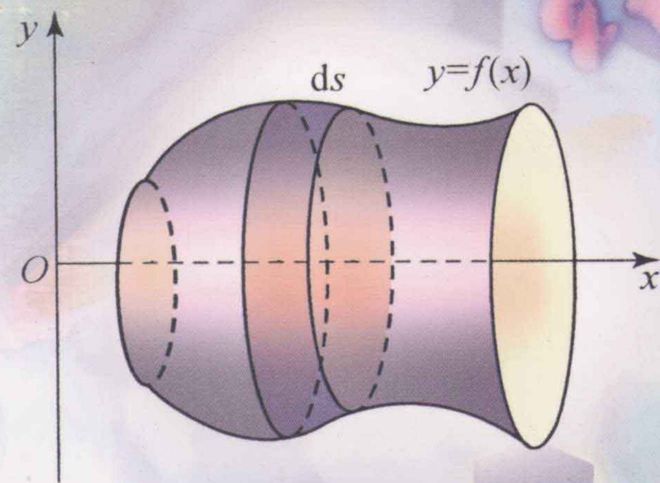
21世纪高等院校数学规划系列教材

主编 肖筱南

高等数学（下册）

GAODENG SHUXUE

编著者 林建华 杨世廞 高琪仁 庄平辉 许清泉 林应标



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

21 世纪

高等院校数学规划系列教材／主编　肖筱南

高等数学

（下　册）

编著者　林建华　杨世廞　高琪仁
　　　　庄平辉　许清泉　林应标

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学·下册/林建华等编著. —北京：北京大学出版社,2011.1
(21世纪高等院校数学规划系列教材)
ISBN 978-7-301-18325-0

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①林…　Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第255015号

书　　名：高等数学(下册)
著作责任者：林建华　杨世廞　高琪仁　庄平辉　许清泉　林应标　编著
责 任 编 辑：曾琬婷
标 准 书 号：ISBN 978-7-301-18325-0/O·0832
出 版 发 行：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区成府路205号　100871
网　　址：http://www.pup.cn　　电子信箱：zpup@pup.pku.edu.cn
电　　话：邮购部62752015　发行部62750672　理科编辑部62767347　出版部62754962
印　刷　者：北京鑫海金澳胶印有限公司
经　销　者：新华书店
787mm×980mm　16开本　17.75印张　375千字
2011年1月第1版　　2011年1月第1次印刷
印　　数：0001—4000册
定　　价：32.00元

前　　言

随着我国高等教育改革的不断深入,根据2009年教育部关于要求全国高等学校认真实施本科教学质量与教学改革工程的通知精神,为了更好地适应21世纪对高等院校培养复合型高素质人才的需要,北京大学出版社计划出版一套对国内高等院校本科大学数学课程教学质量与教学改革起到积极推动作用的《21世纪高等院校数学规划系列教材》.应北京大学出版社的邀请,我们这些长期在教学第一线执教的教师,经过统一策划、集体讨论、反复推敲、分工执笔编写了这套教材,其中包括:《高等数学(上册)》、《高等数学(下册)》、《微积分》、《线性代数》、《新编概率论与数理统计(第2版)》.

在结合编写者长期讲授本科大学数学课程所积累的成功教学经验的同时,本套教材紧扣教育部本科大学数学课程教学大纲,紧紧围绕21世纪大学数学课程教学改革与创新这一主题,立足大学数学课程教学改革新的起点、新的高度狠抓了教材建设中基础性与前瞻性、通俗性与创新性、启发性与开拓性、趣味性与科学性、直观性与严谨性、技巧性与应用性的和谐与统一的"六突破".实践将会有力证明,符合上述先进理念的优秀教材,将会深受广大学生的欢迎.

本套教材的特点还体现在:在编写过程中,我们按照本科数学基础课要"加强基础,培养能力,重视应用"的改革精神,对传统的教材体系及教学内容进行了必要与精心的调整和改革,在遵循本学科科学性、系统性与逻辑性的前提下,尽量注意贯彻深入浅出、通俗易懂、循序渐进、融会贯通的教学原则与直观形象的教学方法.既注重数学基本概念、基本定理和基本方法的本质内涵的辩证、多侧面的剖析与阐述,特别是对它们的几何意义、物理背景、经济解释以及实际应用价值的剖析,又注意学生基本运算能力的训练与综合分析问题、解决问题能力的培养,以达到便于教学与自学之目的;既兼顾教材的前瞻性,注意汲取国内外优秀教材的优点,又注意到数学基础课与相关专业课的联系,为各专业后续课程打好坚实的基础.

为了帮助各类学生更好地掌握本课程内容,加强基础训练和基本能力的培养,本套教材紧密结合概念、定理和运算法则配置了丰富的例题,并做了深入的剖析与解答.每节配有适量习题,每章配有综合例题,以供读者复习、巩固所学知识;书末附有习题答案与提示,以便读者参考.

本套规划系列教材的编写与出版,得到了北京大学出版社及厦门大学嘉庚学院的大力支持与帮助,刘勇副编审与责任编辑曾琬婷为本套教材的出版付出了辛勤劳动,在此一并表示诚挚的谢意.

本书第八章由杨世廞编写,第九章由高琪仁编写,第十章由林应标编写,第十一章由林建华编写,第十二章由庄平辉编写,许清泉参与全书习题的编写.全书先由林建华负责修改与统稿,最后由肖筱南负责审稿、定稿.

限于编者水平,书中难免有不妥之处,恳请读者指正!

编　者

2010 年 8 月

目　　录

第八章 空间解析几何与向量代数

空间解析几何的产生是数学史上一个划时代的成就，它开创了人们用代数方法研究几何问题的新时代. 空间解析几何通过坐标系的建立，完美地把数学研究的两个基本对象——形与数统一结合起来.

本章作为学习多元函数微积分学的预备知识，将介绍空间解析几何与向量代数有关的内容.

§8.1 向量代数

一、向量的概念

在实际问题中所遇到的量有两类：一类由数值完全确定，例如温度、质量、面积等，这一类量叫做**数量**（或**纯量**）；另一类既有大小，又有方向，例如速度、力、位移、电场强度等，这一类量叫做**向量**（或**矢量**）.

在几何上，向量可以用空间中一条带有箭头的线段，即有向线段来表示，其中线段的长度表示向量的大小，线段的方向表示向量的方向. 以 A 为起点，B 为终点的有向线段所表示的向量记做 $\overrightarrow{AB}$（见图 8-1），也可以用黑体字母如 $\boldsymbol{a}$ 或者字母加箭如 $\vec{a}$ 表示.

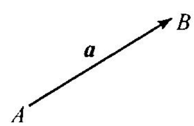


图 8-1

这里只讨论与起点无关的向量，即所谓的**自由向量**. 也就是说，若两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等且方向相同就规定向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是**相等**的，记做 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 换句话说，两向量经过平移到同一起点后，能完全重合就是相等的.

向量的大小叫做向量的**模**，记做 $|\overrightarrow{AB}|$（或 $|\boldsymbol{a}|$，$|\vec{a}|$）. 模等于 1 的向量称为**单位向量**. 模等于零的向量称为**零向量**，记为 $\mathbf{0}$（或 $\vec{0}$）. 规定零向量的方向是任意的.

设有两个非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，任取空间一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，称

$\angle AOB=\varphi$(规定 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$)为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**夹角**(见图 8-2),记做$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$或$(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$.

如果$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$ 或 π,则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **平行**,记做 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

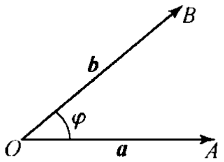


图 8-2

如果$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\pi/2$,则称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **垂直**,记做 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量时,规定它们的夹角可以取 0 到 π 之间的任意值.因此,可以认为零向量与任意向量都平行,也可以认为零向量与任意向量都垂直.

由于我们只讨论自由向量,因此若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,当任取一定点作为共同的起点时,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的终点与起点就落在同一条直线上,所以也称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **共线**. 设有 n 个向量($n\geqslant3$),当取定一共同的起点时,若这 n 个向量的终点和起点落在一个平面上,则称这 n 个向量**共面**.

向量的大小和方向是组成向量的不可分割的部分,也是向量与数量的根本区别所在,因此在讨论向量时,必须把它的大小和方向统一起来考虑.

二、向量的线性运算

下面定义向量的加、减法和向量与数的乘法,它们统称为向量的**线性运算**.

1. 向量的加法

向量的**加法**规定如下:

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,在空间中任取一点 A,作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,再以 B 为起点作 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,连接 AC,那么向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和**,记做 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(见图 8-3(a)),即

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

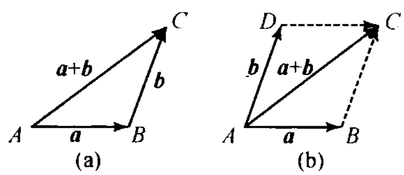


图 8-3

上述作两向量之和的方法,叫做向量相加的**三角形法则**. 此外,也可以仿照力的合成法则,用**平行四边形法则**规定向量的和. 这就是:当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时,作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,以 AB,AD 为边作平行四边形 $ABCD$,连接对角线 AC,显然向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(见图 8-3(b)).

由上述向量加法的定义,容易验证向量加法满足下列运算规律:

(1) **交换律**:$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$(见图 8-4(a));

(2) **结合律**:$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$(见图 8-4(b)).

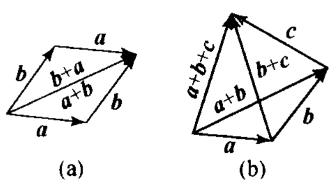


图 8-4

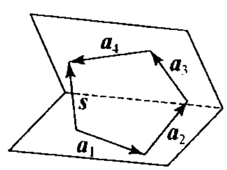


图 8-5

由于向量加法满足交换律和结合律，因此 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n(n\geqslant 3)$ 相加可记为

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n,$$

并可按向量相加的三角形法则作这 n 个向量之和，即以任意次序相继作向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，并以前一向量的终点作为后一向量的起点，再由第一个向量的起点为起点，最后一个向量的终点为终点作出一个向量 $\boldsymbol{s}$，这个向量就是所求的和向量（见图 8-5，其中 $n=4$），即

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n.$$

2. 向量的减法

作为加法的逆运算，向量的**减法**规定如下：设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量，与 $\boldsymbol{a}$ 的模相等而方向相反的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**（**逆向量**或**反向量**），记做 $-\boldsymbol{a}$. 规定两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的**差**为

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a}),$$

即将向量 $-\boldsymbol{a}$ 加到向量 $\boldsymbol{b}$ 上，便得 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$（见图 8-6）. 特别地，当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时，有

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}.$$

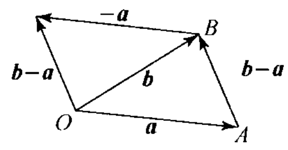


图 8-6

向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差也可按下面的方法作图得到：任取点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$（见图 8-6）.

由向量和与差的作图法，可得到向量模的不等式

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,\quad |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$$

这就是三角形两边之和不小于第三边的向量表示形式，其中第一个式子仅当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同向时等号成立，第二个式子仅当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 反向时等号成立.

3. 向量与数相乘

向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积记做 $\lambda\boldsymbol{a}$，规定其模

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|,$$

它的方向为：当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 同向，当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 反向. 当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量 $\boldsymbol{0}$.

容易验证，向量与数的乘积满足下列运算规律：

(1) **结合律**：$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}\ (\lambda,\mu\in\mathbf{R})$;

(2) **分配律**：$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}\ (\lambda,\mu\in\mathbf{R})$.

设 $\boldsymbol{a}$ 是一个非零向量，记 $\boldsymbol{e}_a=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$. 按向量与数的乘积的规定，显然 $\boldsymbol{e}_a$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向，且 $|\boldsymbol{e}_a|=1$，也就是说 $\boldsymbol{e}_a$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量. 若我们规定当 $\lambda\neq 0$ 时，$\dfrac{\boldsymbol{a}}{\lambda}=\dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{a}$，则与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量可以写成 $\boldsymbol{e}_a=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$，因此有 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$. 更一般地，有下述结论：

定理 设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是：存在唯一的实数 λ，使得

$$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}.$$

证 由向量与数乘积的定义，立即推出条件的充分性. 下面证明条件的必要性.

设 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$，取 $|\lambda|=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，且当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时，取 $\lambda>0$；当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时，取 $\lambda<0$. 可以证明 $b=\lambda\boldsymbol{a}$. 这是因为 $\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 同向，且

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|.$$

下面证明 λ 的唯一性. 设 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，又设 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$，两式相减得

$$(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0},\quad 即\quad |\lambda-\mu||\boldsymbol{a}|=0.$$

因为 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$，所以 $|\lambda-\mu|=0$，即 $\lambda=\mu$.

例 1 设 $\triangle ABC$ 的三边 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，三边的中点依次为 D,E,F. 试证：

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\boldsymbol{0}.$$

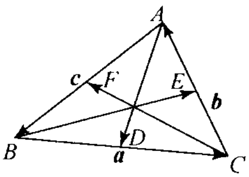


图 8-7

证 如图 8-7 所示，有

$$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{\boldsymbol{a}}{2},\quad \overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\frac{\boldsymbol{b}}{2},\quad \overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{\boldsymbol{c}}{2},$$

于是

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{c}+\frac{\boldsymbol{a}}{2},\quad \overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=\boldsymbol{a}+\frac{\boldsymbol{b}}{2},$$

$$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF}=\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{c}}{2}.$$

所以

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\boldsymbol{c}+\frac{\boldsymbol{a}}{2}+\boldsymbol{a}+\frac{\boldsymbol{b}}{2}+\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{c}}{2}$$

$$=\frac{3}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0}.$$

4. 向量在轴上的投影

给定一个点 O 及一个单位向量 $\boldsymbol{e}$ 就确定一数轴，记为 u 轴，其中 O 称为 u 轴的**原点**（见图 8-8）. 对于 u 轴上任一点 P，对应一个向量 $\overrightarrow{OP}$. 因为 $\overrightarrow{OP}/\!/\boldsymbol{e}$，由定理 1，存在唯一的实数 λ，使 $\overrightarrow{OP}=\lambda\boldsymbol{e}$（实数 λ 称为 u 轴上有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 的值）. 因此（u 轴上）点 P 与实数 λ 之间也有一一对应的关系，即

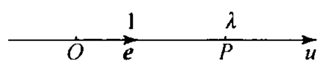


图 8-8

$$点\ P\longleftrightarrow 向量\ \overrightarrow{OP}=\lambda\boldsymbol{e}\longleftrightarrow 实数\ \lambda.$$

我们定义实数 λ 是 u 轴上点 P 的**坐标**.

任给一个向量 $\boldsymbol{a}$，作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$，过点 M 作与 u 轴垂直的平面交 u 轴于 M'（点 M' 叫做**点 M 在 u 轴上的投影**）. 向量 $\overrightarrow{OM'}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}$ 在 u 轴上的**分向量**. 设 $\overrightarrow{OM'}=\lambda\boldsymbol{e}$，则称 λ 为**向量 $\boldsymbol{a}$ 在 u 轴上的投影**，记做 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$（或 $(\boldsymbol{a})_u$），即 $\lambda=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$（见图 8-9）.

由定义不难验证向量在 u 轴上的投影具有下列性质：

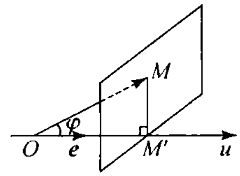


图 8-9

(1) $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$，其中 φ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 u 轴的夹角（即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 的夹角）；

(2) $\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b}$；

(3) $\mathrm{Prj}_u(\mu\boldsymbol{a})=\mu\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$，其中 μ 为实数.

例 2 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的模 $|\boldsymbol{a}|=2$，它与 u 轴的夹角为 $\frac{\pi}{6}$，求 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$.

解 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\frac{\pi}{6}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

三、空间直角坐标系

由空间一个定点 O 和三个两两垂直的单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 就确定了三条都以 O 为原点的互相垂直的数轴，分别叫做 x **轴**（横轴）、y **轴**（纵轴）、z **轴**（竖轴），统称为**坐标轴**，并规定它们的正方向符合右手法则，即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从 x 轴正向以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向 y 轴正向时，大拇指所指的方向就是 z 轴的正向（见图 8-10）. 这样的三条坐标轴就组成一个**空间直角坐标系**，称为 $Oxyz$ **坐标系**，记做 $[O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$.

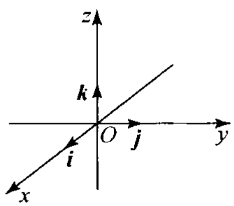


图 8-10

任意两条坐标轴，可以确定一个平面，如 x 轴和 y 轴确定 Oxy **面**，y 轴和 z 轴确定 Oyz **面**，z 轴和 x 轴确定 Ozx **面**，这三个平面统称为**坐标面**. 三个坐标面把空间分为八个部分，每一个部分称为一个**卦限**. 把含三个坐标轴正向的那个卦限叫做**第一卦限**，第二、三、四卦限在 Oxy 面的上方，按逆时针方向确定；第五至第八卦限在 Oxy 面的下方，在第一卦限正下方的是第五卦限，其余按逆时针方向确定. 这八个卦限分别用字母 I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII 表示（见图 8-11）.

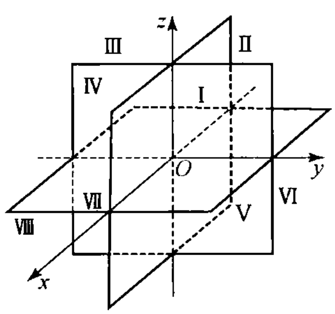


图 8-11

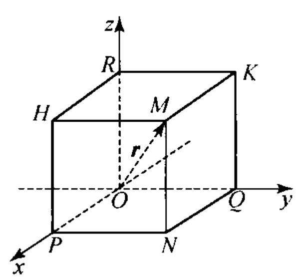


图 8-12

任给向量 $\boldsymbol{r}$，作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$，过点 M 作三个平面分别垂直三条坐标轴，它们与 x 轴、y 轴、z 轴的交点依次记为 P,Q,R（见图 8-12），于是有

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}.$$

设$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$,$\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$,$\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$,则

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

上式称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**坐标分解式**,$x\boldsymbol{i}$,$y\boldsymbol{j}$,$z\boldsymbol{k}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 沿三个坐标轴的**分向量**,其中

$$x=\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{r},\quad y=\mathrm{Prj}_y\boldsymbol{r},\quad z=\mathrm{Prj}_z\boldsymbol{r}.$$

显然给定向量 $\boldsymbol{r}$,就唯一确定点 M 及$\overrightarrow{OP}$,$\overrightarrow{OQ}$,$\overrightarrow{OR}$三个分向量,从而就确定了 x,y,z 三个有序数;反之,给定三个有序数 x,y,z,也就确定了向量 $\boldsymbol{r}$ 与点 M. 于是点 M,向量 $\boldsymbol{r}$ 与三个有序数 x,y,z 之间有一一对应关系,即

$$M\longleftrightarrow\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}\longleftrightarrow(x,y,z).$$

因此,将三个有序数 x,y,z 称为**向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标**,记做 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$(或$\{x,y,z\}$);有序数 x,y,z 也称为**点 M 的坐标**,并依次称为**横坐标**、**纵坐标**和**竖坐标**,记做 $M(x,y,z)$. 向量$\overrightarrow{OM}$称为点 M 关于原点 O 的**向径**. 由上述定义,一个点与该点的向径具有相同的坐标. 因此记号(x,y,z)既表示点 M,又表示向量$\overrightarrow{OM}$.

坐标轴和坐标面上的点,其坐标有一定的特殊性. 例如 x 轴上的点,其坐标为$(x,0,0)$,y 轴上点的坐标为$(0,y,0)$,z 轴上点的坐标为$(0,0,z)$;Oxy 面上点的坐标为$(x,y,0)$,Oyz 面上点的坐标为$(0,y,z)$,Ozx 面上点坐标为$(x,0,z)$.

设点 $M(x,y,z)$为空间上的一点,则点 M 关于坐标面 Oxy 的对称点的坐标为$(x,y,-z)$,关于 x 轴的对称点的坐标为$(x,-y,-z)$,关于原点的对称点的坐标为$(-x,-y,-z)$. 可见,这些对称点的坐标是有一定规律的. 按照相应的规律,容易得到点 M 关于其他坐标面和坐标轴的对称点坐标.

四、利用坐标做向量的线性运算

利用向量的坐标,可以把向量的几何运算转化为代数运算.

设

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=(a_x,a_y,a_z),\quad \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}=(b_x,b_y,b_z).$$

由向量线性运算的运算规律有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k}=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z),$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x)\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\boldsymbol{k}=(a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z),$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)\quad(\lambda\in\mathbf{R}).$$

由定理 1,当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时,向量 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$ 等价于 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,用坐标表示为

$$(b_x,b_y,b_z)=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z).$$

这等价于向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的对应坐标成比例,即

$$\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z},$$

其中若 a_x,a_y,a_z 中有一个为零，例如 $a_x=0$，则相应的 $b_x=0$，即上式应理解为$\begin{cases}b_x=0,\\ \dfrac{b_y}{a_y}=\dfrac{b_z}{a_z};\end{cases}$又若 $a_x=a_y=0$，则上式应理解为$\begin{cases}b_x=0,\\ b_y=0.\end{cases}$

例 3 已知两点 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，求向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标.

解 作向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$(见图 8-13). 因为 $\overrightarrow{OB}=(x_2,y_2,z_2)$，$\overrightarrow{OA}=(x_1,y_1,z_1)$，所以

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).$$

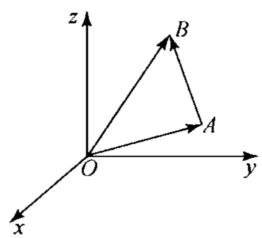


图 8-13

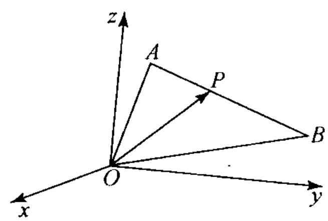


图 8-14

例 4 已知两定点 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$及实数 $\lambda\neq-1$，在直线 AB 上求点 P，使得 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$($P$ 叫做有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的 λ 分点).

解 按定义，求点 P 的坐标等价于求向径 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标. 如图 8-14 所示，有

$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA},\quad \overrightarrow{PB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP},$$

所以由 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$ 得 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})$，即

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}).$$

由 $\overrightarrow{OA}=(x_1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{OB}=(x_2,y_2,z_2)$，即有

$$\overrightarrow{OP}=\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right).$$

特别地，当 $\lambda=1$ 时，得线段 AB 的中点为 $P\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$.

五、向量的模、方向角与方向余弦

1. 向量的模与两点间的距离公式

设向量 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$，如图 8-12 所示，有

$$|\boldsymbol{r}|=|\overrightarrow{OM}|=|OM|=\sqrt{|OP|^2+|OQ|^2+|OR|^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

设有两定点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B(x_2,y_2,z_2)$. 由例 3 知 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$，因此 A,B 两点间的距离为

$$|AB|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

例 5 在 y 轴上求与两点 $A(1,-3,7)$ 和 $B(5,7,-5)$ 等距离的点 M.

解 因为所求点 M 在 y 轴上，故设 $M(0,y,0)$. 由 $|AM|=|MB|$ 得

$$\sqrt{(0-1)^2+(y+3)^2+(0-7)^2}=\sqrt{(0-5)^2+(y-7)^2+(0+5)^2}.$$

两边平方，解得 $y=2$，故所求的点 $M(0,2,0)$.

例 6 已知点 $A(2,-1,-5)$，向量 $\boldsymbol{a}=(2,-3,6)$，求一点 B，使得向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同方向，且 $|\overrightarrow{AB}|=14$.

解 由于 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}=7$，与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量为

$$\boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\left(\frac{2}{7},-\frac{3}{7},\frac{6}{7}\right).$$

设点 B 的坐标为 (x,y,z)，则 $\overrightarrow{AB}=(x-2,y+1,z+5)$. 由题设得

$$(x-2,y+1,z+5)=\frac{14}{7}(2,-3,6),$$

于是有

$$x-2=4,\ y+1=-6,\ z+5=12,\quad 即\quad x=6,\ y=-7,\ z=7.$$

所以点 B 的坐标为 $(6,-7,7)$.

2. 向量的方向角与方向余弦

非零向量 $\boldsymbol{r}$ 分别与 x 轴、y 轴、z 轴正向的夹角 α,β,γ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**方向角**；$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**方向余弦**. 设 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，由向量在数轴上投影的性质有

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{r}|},\quad \cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{r}|},\quad \cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{r}|},$$

所以向量 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{x}{|\boldsymbol{r}|},\frac{y}{|\boldsymbol{r}|},\frac{z}{|\boldsymbol{r}|}\right)=\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}=\boldsymbol{e}_r$，从而有

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

即以 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦为坐标的向量是与 $\boldsymbol{r}$ 同方向的单位向量 $\boldsymbol{e}_r$.

例 7 已知两点 $A(4,\sqrt{2},1)$ 和 $B(3,0,2)$，求向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模、方向余弦和方向角.

解 由已知有 $\overrightarrow{AB}=(-1,-\sqrt{2},1)$，于是 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1+2+1}=2$，且 $\overrightarrow{AB}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\quad \cos\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos\gamma=\frac{1}{2}.$$

所以

$$\alpha=\frac{2}{3}\pi,\quad \beta=\frac{3}{4}\pi,\quad \gamma=\frac{\pi}{3}.$$