

经
济
科
学
译
库

Mathematical
Economics
(Second Edition)

数理 数理 经济学

(第二版)

高山晟

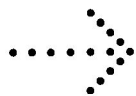
Akira Takayama

/ 著

杨 斌 魏二玲 何宗炎

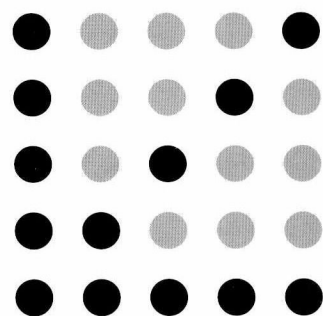
王 鑫 马赞甫

/ 译



经济科学译库

数理 经济学 (第二版)



高山晟

Akira Takayama

/ 著

杨斌 魏二玲 何宗炎

/ 译

王鑫 马赞甫

Mathematical
Economics
(Second Edition)

中国人民大学出版社

• 北京 •

图书在版编目 (CIP) 数据

数理经济学: 第2版/高山晟著; 杨斌等译.

北京: 中国人民大学出版社, 2009

(经济科学译库)

ISBN 978-7-300-10860-5

I. 数…

II. ①高…②杨…

III. 数理经济学

IV. F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 098266 号

经济科学译库

数理经济学 (第二版)

高山晟 著

杨 斌 魏二玲 何宗炎 王 鑫 马赞甫 译

出版发行 中国人民大学出版社

社 址 北京中关村大街 31 号

邮政编码 100080

电 话 010-62511242 (总编室)

010-62511398 (质管部)

010-82501766 (邮购部)

010-62514148 (门市部)

010-62515195 (发行公司)

010-62515275 (盗版举报)

网 址 <http://www.crup.com.cn>

<http://www.ttrnet.com> (人大教研网)

经 销 新华书店

印 刷 涿州星河印刷有限公司

规 格 185 mm×260 mm 16 开本

版 次 2009 年 6 月第 1 版

印 张 40.5 插页 2

印 次 2009 年 6 月第 1 次印刷

字 数 854 000

定 价 69.00 元

版权所有 侵权必究 印装差错 负责调换

第二版序

在本书第一版中，我给自己提出的任务是为数理经济学提供一种系统的处理。这一学科强调的是经济学理论的统一性结构和包含在现代经济学理论中的数学方法。我希望经济学领域的学生能够认识到经济学分析方法的重要性并且熟悉基本的并且是强大的数学工具（然而，只具备最少的预备知识的学生也可以掌握）。经济学是诗和精确逻辑（或分析）的结合体，也是由事实构成的广阔知识。虽然这些都是重要的，但是正如我在第一版开篇所说的，“本书选择讨论分析性的以及数学的方法”。

对于本书第一版获得的肯定，我感到很高兴。无数的信件和口头交流以及大量书评是最令人满意的，对于塑造目前的版本也是最有意义的。书评中由戴森贝格（C. Deissenberg）教授（载于 *Kyklos*, 1975）、格利科潘蒂斯（D. Glycopantis）教授（载于 *Economica*, 1976），以及穆拉塔（Y. Murata）教授（载于 *Economic Studies Quarterly*, 1977）提出的意见和批评尤其令人振奋。比莱拉（L. J. Billera）教授（载于 *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1980）给出的关于本书的一个注记也是鼓舞人心的，虽然他已过世了。作为一个本土的日本人，本书第一版获得日本经济研究中心颁发的 1975 年经济学和管理最佳图书的年奖称号也是令我感到欣慰的。

我很感激有机会准备这个新的版本。除了其他获益，它使我能够纠正一些打印上的错误，同时改进许多地方的解释方式。而且，新的版本给了我机会在第 1 章结尾部分撰写一些新的材料。这些材料试图对约束最大化技巧在经济学问题、灵敏度分析、包络定理、对偶性以及超越对数估计方面的应用提供一个最新的并且经过改进的介绍。在这个相对简短的介绍中，我希望读者能正确地理解约束最大化在经济学中的威力，同时也认识到基本的微观理论分析其实是简单而直接的。

数理经济学中最近的发展是重要并且规模很大的。对于其中一些内容的理解要求感兴趣的经济学家具备相当数学知识。然而在本书中，我并不准备介绍所有这些发展。读者可以参考其他资料，比如阿罗和英特里盖特（K. J. Arrow and M. D. Intriligator）主编的三卷本《数理经济学手册》（*Handbook of Mathematical Economics*）（内容相当多），其中包含了许多关于最新进展的优秀介绍。另一方面，我也相信目前这本书应当提供的是核心的经济学分析方法，这对于大部分现代经济学家是非常有必要的。

对于本书第一版，我从我的朋友、同事和学生那里获得了很多有价值的意见和建议，这对于准备目前的这个版本是非常有用的。特别地，我要提到德拉比奇（John Z. Drabicki）、酒井（Yasuhiro Sakai）和安德森（Richard K. Anderson）。

高山晟

1984年11月

日本京都

第一版序

数理经济学领域在过去的几十年中进步巨大，本书试图提供数理经济学的系统处理方法。它讨论这个领域现有的理论，并试图扩展它们。在这个领域中，本书所涵盖的范围比任何其他最近被使用的书都要宽很多。

数理经济学领域中的文献数量是庞大的。经济学中的传统教育方法——指派很多书和文章给学生读——显然不适用于用来研究数理经济学。这不仅是因为该领域的宽泛和复杂性，同时也因为传统的方法无法使学生意识到经济学理论分析特征的重要性。这里我试图在单一的框架中用一致的方法提供所有的资料，使得书外的阅读量最少，这些资料常常是通过许多不同来源获取的。

本书不仅是对文献的综述，它更是特别强调经济学理论的统一性结构和包含在现代经济学理论中的数学方法，它同时想要提供给读者在这个领域进行独创性研究的技术工具和必要的方法论。

进一步说，本书不是初等微积分和矩阵理论在经济学问题中的应用的介绍，而是一本用数学工具去帮助分析经济学问题的书。本书也不是一个关于更高级别书籍的入门介绍。它从相当基础的级别开始，引导读者恰当地进入当前研究的前沿。注意，每一章节都可以或多或少地独立阅读（也就是说，即使不仔细阅读其他章节，单独阅读每一章也是可以的）。

众所周知，经济学关心的是真实世界的问题，它的发展非常依赖于对这些问题的强烈需求和推动。大量观点是基于各种既定的对于某特殊政策的兴趣，然而这些观点通常模糊了理论上的理解。因此对经济学家而言，找出每一个问题的基本逻辑结构和用主要分析工具充分装备自己是非常重要的，尽管很多重要的经济理论显然既不可数学化，也不可以进行分析性的处理。

本书处理的是经济理论的分析性方面以及数学方面的问题。因此它强调各种各样数学分析工具的系统展现和延伸，这些工具在经济学的各种分支中都是有用的，特别地，对于经济学理论的两个主题，即竞争性均衡和经济增长，由于它们的严格性和理论上的连贯性，可以为许多其他的经济理论提供基本的分析模型和参考框架。很明显，经济学关注的主题在时刻快速改变着，这反映了真实世界所关注的问题的改变。没有哪一本书能够包含所有这些主题。然而，我认为本书所提供的资料对于分析经济学问题，不管是旧的还是新的，都是有用的而必要的。



尽管本书是分析性的和数学性的,它企图把读者引领到数理经济学的前沿,但对于数学知识的要求却保持在最低的水平。在本书几乎所有章节中,都只是要求关于初等微积分学和初等矩阵理论的知识(比如,矩阵乘法的知识),这是目前大部分美国大学的研究生院学生入学的标准要求。

关于经济学理论方面的预备知识,作者想到的是几本优秀的入门教材,它们对于本书将要讨论的很多主题都是有用的。更一般来说,一门标准的大二或者大三的本科课程就提供了他们从事这门学科研究所需要的足够的经济学背景。在阅读本书时,那些熟悉另外一些书,比如《线性规划与经济学分析》(*Linear Programming and Economic Analysis*, Dorfman, Samuelson and Solow, New York, McGraw-Hill, 1958)以及希克斯(Hicks)的《价值与资本》(*Value and Capital*, 2nd ed., Oxford, Clarendon Press, 1946)的读者,将会比那些不熟悉这些书的读者获益更多。但是,熟悉这些著作并不是必需的。

这本书特别适合作为经济学原理和数理经济学的教科书,也可以作为想熟悉这些问题和方法的经济学家的参考书。

此外,在过去的八年中我给明尼苏达大学、罗切斯特大学、夏威夷大学、普渡大学的一年级和二年级的研究生做了关于数理经济学的演讲,这本书代表了这些演讲的记录。尽管在这些年里作了相当多的修订以及更新,这本书仍然不可避免地带着1965—1966年间在明尼苏达州第一次被完成时的风格。

在写手稿的过程中,我发现自己极大地受益于在罗切斯特大学所接受的经济学方面的优秀研究生教育。我也很感激那种存在于明尼苏达大学、普渡大学以及罗切斯特大学的对现代经济学理论研究特别有利的氛围。这种氛围是由那些杰出的学者比如赫维茨(Leonid Hurwicz)、奇普曼(John S. Chipman)、里克特(Marcel K. Richter)、赖特(Stanley Reiter)、巴斯曼(Robert L. Basmann)、麦肯齐(Lionel W. McKenzie)、琼斯(Ronald W. Jones)、罗切斯特的扎贝尔(Edward Zabel)所提倡和培养的,它给了我们很大的激励。

在撰写本书的过程中,给我提供最大帮助的是来自明尼苏达大学、罗切斯特大学、夏威夷大学和普渡大学的那些听我授课的学生们,他们不断地给我激励和批评。很多人,包括那些听我授课的学生,读了我的手稿的一部分或者全部。我想向这些人表示我的感谢:大山(Michihiro Ohyama)、摩尔(James C. Moore)、布洛克(William A. Brock)、艾尔-霍德里(Mohamed A. El-Hodiri)、高桥根岸(Takashi Negishi)、筑井甚吉(Jinkichi Tsukui)、宏桥(Hiroshi Atsumi)、胡胜正(Sheng Cheng Hu)、德拉比奇、久宝(Yuji Kubo)、贾恩(Raj K. Jain)、阿维奥(Kenneth Avio)以及诺德豪瑟(Fred Nordhauser)。此外,我很感谢普林斯顿大学的匡特(Richard E. Quandt)教授,他读了我的全部手稿,给了我无数的意见和鼓励。特别感谢德拉比奇,没有他的帮助和鼓励,这本书可能就会延期出版或者无法出版。还要感谢海茨(Erik Haites)、沃伦(Gene Warren)、帕克斯(Robert Parks)、马里斯(Frank Maris)以及温德尔(James Winder),他们给了我有力的研究援助。感谢考克斯(Gladys Cox)女士、安东尼科(Helen Antonienko)女士,她们给了我优秀的速记服务。感谢其他曾给予我帮助的人。

我要特别感谢赫维茨教授,他允许我引用他的一部没有发表的著作中的结论(“LH-Oct. 1966”,1970年7月2日修订)。我也要表达对允许我引用其著作中许多非常有意思和有启示的章节的其他教授们的感激之情。每次引用的确切来源和作者将分别在引用的部

分给出。感谢 *Metroeconomica* 和 *Quarterly Journal of Economics* 的编辑们，他们允许本书引用一些首次发表在这些杂志上的文章。

我也感谢普渡大学克兰纳特 (Krannert) 管理学院的韦勒 (Deans Emanuel T. Weiler)、戴 (John S. Day)、马内斯 (Rene P. Manes) 和威利 (Jay W. Wiley)，他们给了我慷慨的帮助和有利的研究条件。最后，感谢我的妻子真知子 (Machiko)，她帮助我准备本书的索引，同时也给了我很多鼓励。

高山晟

1973 年 12 月

西拉斐特，印第安纳州



导 论

第 A 节 本书宗旨

现代经济理论的基本特征在于其分析性和数学性。数学作为一种语言，通过明确地给出假设条件，并且使得每一步推导都符合逻辑，从而成为确切表示某种理论的一种方便工具。因此，数学语言为理论的进一步发展和推广提供了基础。更进一步，数学也使得更多更精确的经验检验成为可能。^[1]这不仅是因为那些用言语来表达的理论和所谓的“图形化”经济学流派自身有一些隐含且含糊不清的假设条件^[2]，更重要的是这些方法并没有为精确的经验检验提供机会，这仅是因为这样的检验要求待检验的理论中的相关命题具有显式的数学表达式。

于是，经常被提及的“制度主义学派”（这里表示的是对待经济问题的一种方法论上的态度）已经在很大程度上被逐出了经济学的殿堂^[3]，并且更进一步地，在美国许多大学的经济学系中，图形化方法和数理方法之间的相对权重也正在向后者转移。但是，经济学仍然是一门复杂的学科，其中涉及许多不能够完全用数学语言来表达的方面。在评论马克斯·普朗克（Max Planck）的不学习经济学的决定时，J. M. 凯恩斯（J. M. Keynes）指出，经济学涉及“逻辑、哲学以及大量的经验知识的混合，而其中的绝大部分都是不精确的”^[4]。换句话说，经济学是诗和硬分析的混合体，还伴随着一些制度方面的事实。不过与许多诗人和制度主义者的感觉相反，经济学的这一特征并不意味着硬分析是无用的。相反，硬分析是如实地表达经济学自身的一种最好方式，并且使之不至于被数以百万计的制度方面的事实所淹没。确实，基于分析和数理的方法论的抽象经济学理论为我们研究现实世界中的问题和制度提供了一种完美的途径。这里可以进行类比的例子是第谷和开普勒、伽利略和牛顿之间的差别。^[5]毫无疑问，上面提到的这些方法都是相当重要的，但是本书将要讨论的只是分析和数理的方法。

数理经济学是这样一个领域，它关注的是完整的和硬的分析。其中本质的东西是分析的方法，而不是定理结果的搜集。因为现实中的经济太复杂了，不可能直接应用这些定理。J. M. 凯恩斯曾经指出，“经济学的理论并不是由可以立即应用于政策的已有结论组成的。它是一种方法而不是一种教条，是一种思维方式，一种研究技巧，它可以帮助掌握它的人得出有用的结论。”^[6]

由此可立即得到的一个推论是，定理都是无用的，除非明确地认识到相应的假设条件，并且完全理解其中所涉及的逻辑关系。建立对于定理的一种直觉上的理解是重要的（如有必要可利用图形等工具），但是这种理解也是无用的，除非我们具备关于假设条件和证明过程的完整知识。因此，在本书中，所有的主要定理都以完整的形式陈述，并且给出严格的证明。对于每一个主题，我们都给出一个基本的介绍，这有助于为相关定理提供一种直觉上的理解。我尽力使得定理的证明尽可能简单（至少从概念上讲是基本的），并且不省略其中的步骤（因此这些定理对于那些倾向于非数学化的读者也是可以读懂的）。更进一步地，我还特别使得定理的经济学含义和定理中的相关概念明确而清晰。

现代经济理论既可以按照所使用的分析技巧来讨论，也可以按照所涉及的专题来讨论。经济学家们倾注了大量精力来关注两个主题：竞争市场理论和经济增长理论，特别是它们的一般均衡特征。结果是这两个主题都达到了以严格的、精致的定理为主体的状态，这样一种理论发展上的状态是经济学中的任何其他分支都不可比拟的。这两个理论的这种完美特征也是与各种数学技巧的探索、发展以及完善密不可分的。本书将专注于这两种理论，即竞争市场理论和经济增长理论，以及那些有助于解释和澄清这些理论的数学技巧。本书将采取一种统一的观点，即一般均衡分析。

撰写这种性质的书籍的一个极大的危险是可能使得整本书变成理论的拼凑，即各种不同来源的理论被搜集起来，然后再人为地粘贴在一起。这样一本书的读者可能会困惑于他所获得的知识，因为他并没有意识到理论之间的联系。在本书中，我将通过指出各种理论的共同之处来特别强调理论之间的联系。此外，在允许的范围之内，我将使用一致的术语和记号。

在经济学的专业文献当中，已经有了大量的这方面工作，比如萨缪尔森的《经济分析基础》（*Foundations of Economics Analysis*, 1947）。这表明了大家对于这种方法的偏爱，以及在经济理论中使用数学分析的偏爱。本书将遵循这种模式，并特别专注经济科学在最近的 25 年当中所取得的进展。

对于这种类型的研究，一种吸引人的方式是将数学技巧和经济学理论分开来处理。但是，数学技巧与经济理论有密切联系这一事实似乎使得其自身很难被有效处理。另一方面，如果先处理数学技巧，可能会使得学生在接触到经济理论之前就已近灰心了；而先处理经济理论又不可能让学生利用到数学技巧。本书作者的观点是，这其实并不是一种困难，反而是一个有利的条件，因为经济理论的发展可以给本书提供一个统一的结构。然后数学技巧可以结合理论的发展来解释，其中我们就可以看到数学是如何与经济理论的发展紧密联系的。按照这种方式，数学定理对于经济学家而言就会变得更加有趣和激动人心。

作者充分认识到了本书的某些局限性。举例来说, 尽管本书已经覆盖了相当广泛的主题 (这一范围比当前本领域内的任何其他书籍都要广泛), 但是它至少遗漏了三个重要的主题, 即关于不确定性的理论、关于社会体系和组织的理论^[7], 以及关于冲突和相互作用的理论。^[8]毫无疑问, 这些主题都是重要的, 并且在接下来的数十年中将会获得极大的关注。这些主题被排除在外仅仅是因为如果将它们包括进来的话, 本书的篇幅将会过大, 并且从这些领域当前所得到的研究结果来看, 现在的相关材料等到本书出版时有可能会变得过时。^[9]

更进一步, 即使考虑到了所有相关文献的精致性和重要性, 本书所覆盖的主体仍然具有重要的缺陷。举例来说, 对于竞争性均衡理论, 人们可能会提出如下问题: (1) 证明各种假设条件, 比如固定数量的商品、固定数量的消费者, 以及给定的技术集的合理性的理论基础是什么? (2) 即使接受了所有的假设前提, 我们怎样才能达到一个均衡? 瓦尔拉斯提供了一种卖者叫价的过程, 此过程提供了一种达到均衡的方法, 而不需要知道个体的偏好、技术集等。^[10]但是这样的过程排除了中间交易的可能性。一旦中间交易是允许的, 则均衡将取决于交易路径。(3) 即使我们接受卖者叫价的过程, 均衡的收敛问题仍然是悬而未决的。迄今为止, 关于稳定性的证明都要依赖于某些较强的假设条件, 比如“总量的替代性”。^[11]

尽管非分析性方法论的垄断地位似乎已经结束了, 但是就本书所要阐述的数理经济学而言, 毫无疑问也只是过渡性的。作为未来的经济学家, 已经完全从对数学的偏见当中解脱出来, 并且在数学、计量经济学模型, 以及度量理论方面获得了很好的训练, 同时还具备电子计算和模拟方法方面的技能, 他们将能够成功地处理经济学的制度和政治经济方面的因素。^[12]然而, 在数理经济学中发展起来的基本方法论和思维框架将无疑会被保留下来。未来的经济学家将很少关心那些“大”问题, 比如整个经济的竞争性均衡, 相反, 他们将更多地关心经济当中小的方面。但是, 他们将仍然知道分析方法以及为了正规地和如实地构造模型所需要的扩展分析的模式的重要性。更进一步, 在得到了正确的训练之后, 未来的经济学家将不再会由于忽视了数理模型的一般均衡特征而处于危险境地。

最后必须强调的是, 我们不应该忽略在数理经济学诞生的过程中所发展起来的数学技巧的重要性。尽管我可能是仍然在争论某某人的工作是否“合乎经济学”的最后一人了, 但我将会是捍卫数学工具对于经济学家的重要性的第一人。这些工具对于每一个经济学家都是必需的。因此, 我将毫不犹豫地着重强调数学技巧, 这几乎与我对于经济学的强调一样。

第 B 节 本书概要

本书大致上可分成三个部分。第一部分 (第 0 章) 介绍数学与经济学方面

的背景材料, 这些材料对于阅读本书的其余内容以及对于数理经济学将来的研究都是必需的。第二部分和第三部分构成了本书的主体。大致上来说, 第二部分(从第1章到第4章)主要关注竞争市场理论, 而第三部分(从第5章到第8章)则主要关注增长理论。关于第二部分与第三部分的这种区分只是大体上的, 因为在不同经济学主题之间, 数学的技巧是密切联系的, 而我們也不可能按照经济学的主题来对这些技巧进行分类。举例来说, 非线性规划理论(第1章)作为一种数学技巧, 处于竞争市场理论的中心位置, 然而对于增长理论以及经济学的其他领域而言, 非线性规划也是一种重要的技巧。

第一部分仅仅由一章组成(第0章), 包含三节内容。第A节介绍了一些基本的数学知识, 这些知识对于阅读本书的其余内容以及读者将来的经济理论研究都是必需的。与本书的其余部分不同, 第A节中所介绍的大部分定理都没有给出证明, 因此读者可以掌握基本的数学概念和思想, 而不会迷失在证明的细节当中。但是, 我在介绍过程中尽量地小心以不误导读者, 以免其认为我们的世界总是欧氏的, 从而本节内容的意义就不仅仅在于对本书其余部分所需数学知识进行简单介绍。

第0章第B节介绍分离定理, 这是那些构成了现代经济理论基石的所有数学理论当中尤其重要的一个理论。现代经济理论的一个重要特征在于它是以集合论为理论基础的。第C节给出了关于活动分析的介绍, 这一内容是表示现代经济学理论的集合论特征的最基本材料之一, 其中所用到的最重要的数学技巧正是分离定理。

本书的主要内容从介绍非线性规划理论(第1章)开始, 这一理论可能是现代经济理论中最重要的数学技巧。关于这一理论的介绍可以采取多种方式, 我们的方法是利用凸集分离定理, 因为这一方法不需要引入可微性就可以获得相关的结果, 从而似乎是更自然的(比如说, 与采用隐函数定理的方法相比)。第1章第B节概括了相关的结果。第C节介绍了可微性, 第D节概括了利用导数表示的约束最大值问题的解在特征方面的一些主要结果。第E节提供了一些其他专题(也是重要的)的介绍, 比如拟凹规划、向量最大化、利用海赛矩阵(Hessian matrices)表示的凹函数或者拟凹函数的一些特征以及最优解的二阶条件(必要的或者充分的)。第F节解释了非线性规划理论应用于经济理论的方式。这一节还讨论了包络定理、关于微观经济理论的一些基本结果的简单推导、对偶性以及超越对数(translog)估计。最后, 第G节讨论了线性规划中的对偶定理和戈德曼-塔克定理(Goldman-Tucker theorem)。此外, 为了使得本书在最优化理论方面是充分且完备的, 本节还概要介绍了古典最优化理论及其在比较静态分析中的标准应用。

第2章讨论竞争市场理论(特别是它的福利特征)和存在性定理。第B节引入消费者和消费者偏好的讨论。第C节证明福利经济学中的两个经典命题:(1)竞争性均衡总是帕累托最优的;(2)对于任意的帕累托最优配置, 都存在一个关于初始资源的再配置, 这一配置可由一个竞争性均衡支持。在第C节的附录中, 我们尝试对核理论给出一个初步的解释, 这一论题最近获得了极大的

关注。我们希望能够激起读者对于研究 n 人对策理论的兴趣，考虑到其在经济学中的应用，这一理论具有巨大的潜力。第 D 节讨论需求理论。两个主要的结果，即需求函数的连续性和希克斯-斯卢茨基方程（Hicks-Slutsky equation）是这一节的中心论题。在第 D 节的附录中，我们讨论了相关数学概念以及定理。特别地，我们讨论了多种半连续性概念之间的联系以及一个有用的数学定理，即所谓的“最大值定理”。第 E 节讨论竞争性均衡的存在性，其中被称为“不动点定理”的数学技巧发挥了重要的作用。我们还讨论了关于存在性问题的各种方法，每一种方法都具有一个有趣的特征，并且包含了针对其他问题的潜在应用。第 D 节的附录还包含均衡唯一性的简要讨论。最后一节（第 F 节）尝试澄清一件事情，即竞争市场机制可以看做是产生非线性规划问题的解的一种机制。于是，这两章所讨论的主题，即非线性规划和竞争市场，现在就联系在一起了。特别地，我们是从非线性规划的角度证明了福利经济学的两个经典命题以及竞争性均衡的存在性。

第 3 章讨论竞争性市场的稳定性。卖者叫价过程提供了一种制度安排，按照此安排人们就可找到一个竞争性均衡，而无需实际知道每一个消费者的偏好和每一个生产者的技术集。在第 C 节中讨论了这一专题的历史背景之后，我们在第 E 节中讨论在总替代情形中关于全局稳定性的阿罗-布洛克-赫维茨证明（Arrow-Block-Hurwicz proof）。第 F 节给出了关于这一主要结果的一些注解，其中最重要的是斯卡夫（Scarf）给出的关于不稳定性的反例。第 G 节质疑了卖者叫价机制在制度上的可行性，并讨论了非卖者叫价的过程。由于总量可替代假定的严格性以及斯卡夫的反例，再加上对于卖者叫价过程的制度可行性的质疑，有些经济学家对完全的稳定性分析失去了兴趣。但是，这种分析已经使得经济学家注意到了非均衡分析以及朝向均衡的调整过程的重要性。更进一步，这一分析也使得经济学家意识到了微分方程技巧在经济学中的重要性。第 B 节尝试解释这一技巧，而第 H 节则介绍了一个用于稳定性分析的重要方法，即李雅普诺夫（Liapunov）第二方法。对于稳定性分析，还有一种重要的图形化技巧（即相图）可以被经济学家使用。第 D 节讨论这个已经在动态经济理论中有了大量应用的技巧。

第 4 章讨论与弗罗宾尼斯定理（Frobenius' theorem）和对角占优矩阵相关的数学技巧。这些技巧的发展与里昂惕夫的投入—产出分析以及稳定性分析密切相关。在第 A 节中，我们利用里昂惕夫的投入—产出模型来展开本章的讨论，这一模型也是一个一般均衡的竞争经济的模型。第 B 节讨论弗罗宾尼斯定理，第 C 节讨论其中的非对角元素要么全部非负要么全部非正的对角占优矩阵。在完成第 B 节和第 C 节中相当乏味的数学讨论之后，第 D 节给出了一些经济学的应用。第 D 节首先概括了第 B 节和第 C 节的结果，从而如果读者愿意的话，就可以跳过第 B 节和第 C 节的大部分内容。第 D 节中所介绍的丰富且广泛的应用足以说明这一技巧在经济理论中的威力。

第 5 章的内容具有两个目的，一是以总量最优增长模型的形式来介绍现代增长理论，二是让读者熟悉一个重要的数学工具，即变分法。从经济学家使用

变分法的角度来看,这一方法的历史是不幸的,因为在20世纪20年代和30年代由罗斯(Roos)、埃文斯(Evans)以及拉姆齐(Ramsey)给出了最初的经济应用之后,它立刻就被遗忘了。但是,这一技巧在物理学中的威力是众所周知的,现在经济学家已经越来越重视它在经济学中的应用。最优增长模型就是说明这一技巧在经济学中的应用的一个很好的例子。在第A节中,我们针对最简单的情形介绍了这一技巧。在第B节中,我们进入关于二阶特征的研究,这一内容对于读者将来的阅读和研究都是有益的。在这一节中,我们还证明了凹性足以保证一阶条件(欧拉条件)对于最优解而言是必要且充分的。第C节没有讨论优化问题,而是尝试对单部门增长模型做一个紧凑的概括。我以一种统一并且简单的方式来处理这一领域内的大量文献。第5章以讨论第D节附录中的内容来作为结束。在这一附录中,我们讨论了第D节所讨论内容的离散时间的对等物。这一附录想要说明的是连续时间模型和离散时间模型之间的联系,并且对存在性问题和一些重要的灵敏度方面的结果给出了解释性介绍。

第6章讨论两个重要的多部门增长模型:冯·诺伊曼模型和动态里昂惕夫模型。尽管存在许多局限性,冯·诺伊曼模型仍然是现代增长理论的基础,第A节讨论了这一模型。第B节关注的是动态里昂惕夫模型,这一模型对从事经验研究的经济学家尤其重要。但是,这一模型似乎有几个非常严重的理论上的局限性,我们将指出这些问题。在引入金融资产(比如货币)之后,这些问题还会进一步加剧。为简单起见,我们略而不谈这些难点。

第7章讨论多部门框架下的最优增长。第A节讨论关于这一主题的一些经典结果,即所谓的“大道定理”。在这一类型的文献中,消费的角色完全被淹没了,社会只关心最终的物品存量。其中我们重点介绍的是一个由雷德纳(Radner)给出的漂亮的大道定理。尽管第A节中介绍的大道定理与冯·诺伊曼理论相比已经有很大进步,但是这些定理的弱点也是相当明显的。这一局面推动了关于非大道定理的研究,其中著名的是戴维·盖尔(David Gale)的结果。然而,与盖尔的工作相比,我们的讨论将更突出消费的作用。顺便提一句,在第6章和第7章中,我们将利用离散时间模型来推进我们的讨论。如果读者愿意的话,也可以将这一部分内容转换成连续时间模型的形式。在第7章关于优化问题的讨论中,我们将再次看到非线性规划技巧(第1章)具有重要的经济学应用。

第8章是本书的最后一章,我们将讨论一个重要并且非常有用的工具,即最优控制理论。在第A节中,我们总结了由庞特里亚金(Pontryagin)和其他一些研究者证明的重要结果,并且给出了这些结果的一些应用例子。在第B节中我们将完整讨论前述重要结果的两个应用,即投资的区域配置问题和具有线性目标的最优增长问题。后一个例子在阐述“开关”解(bang-bang solution)时尤其有用。在第C节中,我们再次回到基本理论,并且讨论了第A节中所总结的结果的一些重要推广。我们不仅介绍了通常的庞特里亚金类型的微分方程约束,也介绍了一些其他形式的约束(比如 $g[x, u, t] \geq 0$, 积分约束, 等等),

其中最主要的是赫斯特内斯 (Hestenes) 定理。我们将再次强调凹性的重要性, 并且给出一个比曼加萨林 (Mangasarian) 的充分性定理略为一般化的结果。第 D 节讨论第 C 节中的结果的一些应用。我们将再次讨论最优增长, 因为读者已经熟悉了这个主题。第 D 节中的另一个应用关注的是高负荷问题。在第 E 节中, 作为最优控制技巧的一种应用, 我们将研究投资的新古典理论, 并且把多种不同的理论表述成一种统一的并且更一般化的形式。尽管在第 E 节中我们相当完整地介绍了投资理论, 然而第 8 章的重点仍然是向读者介绍这一有用的技巧, 而不是去讨论各种可能的经济学应用的细节。我们希望读者可以找到一些其他的关于这一技巧的重要经济学应用。尽管相关文献中所涉及的经济学应用几乎无一例外地都是增长理论, 但是这样的限制并不是必要的。很明显, 对于“ t ”的解释并不一定要局限于“时间”。在具有连续统交易者的模型中, 变量 t 可以解释成 t 先生, 而在税收模型中, 它又可以解释成收入“ t ”, 诸如此类。

【注释】

[1] 关于经验检验, 我说的并不是“曲线拟合学派”, 这一学派严重地依赖于回归分析。尽管这一学派在某些从事经验研究的经济学中相当流行, 但它似乎只是以一种最糟糕的方式表达了制度主义的观点。这不仅是因为这一学派缺乏理论基础, 而且还因为它常常忽略度量的基本理论。

[2] 但是, 毫无疑问的是, “图形”对于理解重要的理论常常是很有用的工具; 并且, 具有“共同基础”的文字争论也常常是引发丰富的经济学理论的基础。

[3] 例如, 可参见 Shubik, M., “A Curmudgeon's Guide to Microeconomics”, *Journal of Economic Literature*, VIII, June 1970, p. 406.

[4] Keynes, J. M., “Alfred Marshall, 1842 - 1924”, *Economic Journal*, XXXIV, September 1924, p. 333.

[5] 这种类比是不完全的, 因为我们并不知道有哪一种经济理论在其应用方面能像牛顿力学在物理学中的应用一样成功。因此, 普朗克决定不学习经济学。

[6] Keynes, J. M., “丛书简介”, 《剑桥经济学手册》(*Cambridge Economic Handbooks*) [这一系列丛书的第一本《供给和需求》(*Supply and Demand*), 由 H. D. 亨德森撰写, 1922 年由 Harcourt Brace 公司出版]。

[7] 这一领域内的一个经典研究是 L. Hurwicz, “Optimality and Informational Efficiency in Resource Allocation Processes”, 载于 *Mathematical Methods in the Social Sciences* (1959), K. J. Arrow, S. Karlin 和 P. Suppes 主编, Stanford, Calif., Stanford University Press, 1960。关于社会选择问题的研究, 经典的著作是 K. J. Arrow, *Social Choice and Individual Values*, 2nd ed., New York, Wiley, 1963 (1st ed., 1951)。

[8] 这三个专题显然是相互关联的。关于这一相关性的一个重要例子可以在被称为“博弈论”的相关数学知识里找到。关于博弈论的优秀教科书的数量正在增加, 从而让我放弃了在本书中引入这一专题的想法。

[9] 有一点似乎是没有问题的, 即本书中所讨论的主题可以为上述三个领域的未来研究提供一个基础。例如, 竞争性均衡理论是一种在确定性条件之下, 给定某种因果关系的社会



系统（即竞争市场）的理论。增长理论可以使我们理解跨期选择被明确引入之后所带来的复杂性。如果考虑到竞争性均衡理论和增长理论所具有的这种优先的重要性，那么我们对于上述三个领域的忽略似乎没有其表面上看起来那么严重。

[10] H. Scarf 最近提出了一种计算竞争性均衡的方法，计算前提是我们知道总技术集以及关于个体消费者的偏好方面的确切信息。参见他的文章 “On the Computation of Equilibrium Prices”，载于 *Economic Studies in the Tradition of Irving Fisher*, New York, Wiley, 1967；以及 “An Example of an Algorithm for Calculating General Equilibrium Prices”，载于 *American Economic Review*, LIX, September 1969。

[11] 本书讨论了这些论点当中的一部分。例如，参见我们关于非卖者叫价过程的讨论（第 3 章，第 G 节）。顺便提一句，非均衡分析是另一个重要的专题，在接下来的数十年内，这一专题有望获得快速的发展。

[12] 毋庸赘言，他们仍然具有数据和制度方面的充分知识，以及对于现实世界的运转方面的深刻见解。如果缺乏了这些，那么他们是否有资格被称为“经济学家”就是值得怀疑的了。

常用记号



1. 集合

$x \in X$	x 属于 X (x 是 X 的元素)
$x \notin X$	x 不属于 X (x 不是 X 的元素)
$\{x: x \text{ 的性质}\}$	集合记号
$\emptyset$	空集
R	实数集
R^n	n 维实空间
Ω^n	R^n 的非负象限 (在上下文中, 当维数 n 比较明显时, 也简记为 Ω)
X^c	X 的补集
X°	开核 (X 的内部) (例如 $\Omega^\circ = \text{正象限}$)
$X \subset Y$	X 包含在 Y 中 (X 是 Y 的子集)
$X = Y$	X 与 Y 相等 (即 $X \subset Y$ 且 $Y \subset X$)
$X \cap Y$	X 与 Y 的交集 (类似可得 $\bigcap_{i=1}^n X_i$ 或 $\bigcap_{i \in T} X_i$)
$X \cup Y$	X 与 Y 的并集 (类似可得 $\bigcup_{i=1}^n X_i$ 或 $\bigcup_{i \in T} X_i$)
$X + Y$	X 与 Y 的向量和 (即 $\{x + y: x \in X, y \in Y\}$) (类似可得 $\sum_{i=1}^n X_i, \alpha X + \beta Y$ 等)
$X - Y$	X 与 Y 的向量差 (即 $\{x - y: x \in X, y \in Y\}$)
$X \setminus Y$	$\{x: x \in X, x \notin Y\}$
$\bigotimes_{i=1}^n X_i$	X_i 的笛卡儿乘积 (类似可得 $X \otimes Y$ 等)

2. 向量

$\ x\ $	x 的范数
---------	---------