普通高等教育"十一五"国家级规划教材

偏微分方程

第三版

陈祖墀 编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

偏微分方程

第三版

陈祖墀　编著

高等教育出版社

内容提要

本书对偏微分方程的古典理论作了严谨的介绍和论证，在内容、概念与方法等方面注重与现代偏微分方程知识之间的内在联系，对现代偏微分方程知识作了基本的阐述，注意各个数学分支知识在偏微分方程中的应用。本书内容丰富，方法多样，技巧性强，并配有大量的例题和习题，难易兼顾，层次分明。

本书可作为综合性大学和高等师范院校数学类专业教材和教学参考书，还可作为一般数学工作者、物理工作者和工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

偏微分方程/陈祖墀编著.—3版.—北京:高等教育出版社,2008.5

ISBN 978-7-04-023587-6

Ⅰ.偏… Ⅱ.陈… Ⅲ.偏微分方程-高等学校-教材
Ⅳ.O175.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第039411号

策划编辑 张长虹 **责任编辑** 李 陶 **封面设计** 王凌波 **责任绘图** 郝 林
版式设计 马敬茹 **责任校对** 刘 莉 **责任印制** 宋克学

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	北京新华印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
		版 次	2003年5月第1版
开 本	787×960 1/16		2008年5月第3版
印 张	17.25	印 次	2008年5月第1次印刷
字 数	320 000	定 价	21.80元

物料号 23587-00

第三版前言

本书第二版自 2002 年 8 月问世以来, 受到广大读者的欢迎, 连续三次印刷。这次再版对第二版做了文字上和部分内容的修改和增删。

首先, 对热传导方程, 如讨论调和方程一样, 我们也叙述并证明了强最大值原理, 回答了当解在区域内部取到最大值时的状态。这时解的状态与调和函数在区域内部取到最大值时的状态有明显不同, 这反映了处于稳态和非稳态时的物理过程的本质的差别, 这是添加此内容的原因之一; 另外, 这个定理的证明是初等的, 但技巧性很强, 对训练学生的思维很有帮助, 这也促使我们添加了这个内容。还有, 书中对有些定理的证明重新审视后做了修改或者补充, 使其更完善或更标准, 在此就不一一列举了。

其次, 在一些定理的后面, 我们更新或添加了一个或几个附注。这些附注都是从不同的侧面对定理进行分析和再思考, 引导学生学会分析问题, 讨论问题, 进而扩展学生的思考空间。这对培养和提高他们的数学素质是很有帮助的。

为了方便读者的阅读, 本版添加了更多的索引, 并对书中提及的外国人名在索引中给出了中文译名。这些译名是参照以下两本词典给出的:“英俄汉数学词汇”, 林云寰主编, 广州: 广东科技出版社出版, 1991 年;“新英汉数学词汇”, 科学出版社名词室编, 北京: 科学出版社出版, 2002 年。

本课程授课 80 学时 (包括习题课)。授课内容可以根据具体要求进行删减, 没有必要全讲。编者的本意是供各个层次的读者使用, 各个大专院校使用。所以, 需要授课老师具体掌握, 但是第一章, 第三章, 第四章和第五章的第一至第四节是基本内容, 应该讲授。如果对学生有更高要求, 可以选讲第五章的第五节和第六章至第八章的内容。

这次再版得到中国科技大学、高等教育出版社和国家基金委自然科学基金 (No.10371116) 的资助, 并且又一次集中了中国科技大学数学系非线性方

程讨论班全体同仁和研究生以及数学系和少年班本科生的集体智慧，在此一并致谢。

陈祖墀　谨识

2007 年 10 月于合肥

中国科技大学东苑

第二版前言

偏微分方程的兴起已有两百多年的历史了，由起初研究直接来源于物理与几何的问题发展到一个独立的数学分支，它内容庞杂，方法多样。偏微分方程讨论的问题不仅来源于物理、力学、生物、几何和化学等学科的古典问题，而且在解决这些问题时应用了现代数学的许多工具。近几十年来，该领域的研究工作，特别是对非线性方程的理论、应用以及计算方法的研究，十分活跃。

基于上述历史和现状，本书作为综合性大学数学系本科生基础课教材，在取材和编写上具有以下特点：一是对古典理论进行详细的叙述与严格的论证，并对现代偏微分方程知识中的一些概念、方法和理论作简单的介绍，将这两方面自然地结合起来（例如，由古典解到弱解或广义解，从基本的数学分析方法到 Hilbert（希尔伯特）空间方法）；其二是考虑到本课程一般放在实变函数和泛函分析两门课程之后开设，从而可以在理论的阐述与论证方面尽量使用学生学过的较高级和简洁的数学工具，避免单一地使用数学分析的方法，在计算和论证方面尽量做到技巧性强，简洁清楚；最后，为了配合正文的理论，编排了较多的例题，并作了详细的剖析，这些例题大多是方程历史上的名题或历届研究生考题，每章最后都配有习题。这些例题和习题有些是正文的补充和发展，有些则是用来介绍解题方法和技巧的。另外，考虑到本课程在三年级下学期或四年级上学期开设，学生们已熟悉用常义函数处理和理解问题，所以在介绍方程的理论时，我们都使用常义函数；当学生们熟知了方程的理论之后，在最后一章介绍广义函数，此时，学生们只须在函数理论方面升华即可。

本书第一版由中国科学技术大学出版社于 1993 年 9 月出版。该书第一版及其预印本在中国科学技术大学数学系十余届本科生和部分少年班大学生中使用，效果甚佳。上述几个特点是在十余年的教学实践中不断修改和发展的过程中由师生共同总结出来的。在本次成书过程中，参考了近期美国一流大学的教科书和专著，以及国内同行的新书，结合作者多年的教学实践与科研工作，做了多处修改和补充。主要表现在：

(1) 将变分法及其应用单独作为一章论述。鉴于 Laplace 算子的特征值问题在理论上的重要性和应用上的普遍性，作为变分法的应用，本次成书增添了这部分内容，对其作了较细致的讨论。

(2) 关于各类方程的导出，学生们已在普通物理学和理论力学课程中演习

过，故不在本教材中详细推导，仅作简单说明，重点放在方程的理论和数学方法上，故删除了第一版中有关这部分的内容并做了其他必要的删减。

(3) 在对波动方程、热传导方程和调和方程的论述上，添加了近几年来国外著名大学新教材中的新的内容和方法，以扩大学生们的知识面，并加强他们的分析能力。

(4) 鉴于整体解、局部解、多个解、间断解及解的爆破等概念的重要性，我们在讨论较简单易懂的一阶拟线性方程时，通过分析具体的例题引入这些概念，而不仅仅局限于考虑解的存在性与唯一性。

(5) 较之第一版，本版引入更多的例题和习题。这些例题有些是方程历史上的名题，如 J. Hadamard, A. N. Tchonov 和 E. Rothe 等人的著名例题；有些例题就是现代研究领域中的原始模型与基本方程，如反应扩散方程、能量守恒律与 KdV 方程等。对一些较难的习题作了提示。

本书主要包括以下的内容：一阶拟线性方程的理论与解法；二阶半线性方程的分类与标准型；三个典型方程的理论与它们的定解问题的解法，其中，对调和函数的诸多性质及其特征值问题作了详尽的讨论，并自然过渡到弱可微函数空间，即 Sobolev 空间 $H^1(\Omega)$ 和 $H_0^1(\Omega)$；Hilbert 空间方法和算子方程理论；方程与方程组的特征理论及 Cauchy-Kovalevskaja 定理；广义函数与基本解。

本书基本上是按照一学期 72 个学时安排编写的，使用者可根据学生的实际情况和教学的要求进行删减。前五章是基本的内容，特别是第 3 章、第 4 章和第 5 章，是本教材的核心内容，应该要求学生熟悉并掌握。若能掌握全书的内容，则可较轻松地完成研究生初始阶段方程课的学习。

本书的编写得到国家自然科学基金 (No. 10071080) 和中国科学技术大学教材出版基金的资助。在编写过程中，中国科学技术大学数学系和少年 (数学) 班的师生，特别是非线性方程讨论班的诸位同仁和研究生，都曾提出过宝贵的意见，我的研究生们为书稿的电脑录入及校对做了不少工作，恕不一一列举，在此一并致谢。由于作者学识所限而导致的错误和不足在所难免，还望读者批评指正。

陈祖墀　谨识

2002 年元旦于合肥

目　录

第 1 章　绪　　论

1.1　基 本 概 念

1.1.1　定义与例子

关于未知函数 $u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的*偏微分方程*是一个含有 u 的偏微商的恒等式, 其中最高阶偏微商的阶数叫做该*偏微分方程的阶*. 例如, 二阶偏微分方程的一般形式是

$$F(x, u, \mathrm{D}u, u_{x_1x_1}, u_{x_1x_2}, \cdots, u_{x_nx_n}) = 0, \tag{1.1.1}$$

其中, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\mathrm{D}u = (u_{x_1}, u_{x_2}, \cdots, u_{x_n})$, F 是关于自变量 x 和未知函数 u 及 u 的有限多个偏微商的已知函数. F 可以不显含未知函数 u 及其自变量 x, 但必须含有未知函数的偏微商. 后文未知函数的自变量中有时出现一维变量 t, 则可以在上述偏微分方程的一般定义中把它视为 x 的第 $n+1$ 个分量. 涉及几个未知函数及其偏微商的多个偏微分方程构成一个*偏微分方程组*, *方程组的阶*就是出现在方程组中最高阶微商的阶. 除非另有说明, 我们限制自变量 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 取实数值, 并设函数 u 及其出现在方程中的各阶偏微商连续.

如果有一个函数 (在方程组的情形是一组函数) 在其自变量 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的某变化范围内连续, 并且具有方程 (方程组) 中出现的一切连续偏微商, 将它代入方程 (方程组) 后使其成为恒等式, 则称该函数 (该组函数) 是方程 (方程组) 的*解*或*古典解*.

偏微分方程或方程组称为*线性的*, 如果它关于未知函数及其所有偏微商是线性的. 否则, 称为*非线性的*. 在非线性方程 (组) 中, 如果它关于未知函数的最高阶微商, 例如是 m 阶微商, 是线性的, 并且其系数依赖于未知函数的低于 m 阶的微商, 则称它是 *m 阶拟线性方程 (组)*. 若 m 阶微商的系数仅是自变量的函数, 则称这种拟线性方程 (组) 是 *m 阶半线性方程 (组)*. 不是拟线性方程 (组) 的非线性方程 (组) 叫做*全非线性方程 (组)*. 在线性方程 (组) 中, 像常微分方程中一样, 又分为*常系数、变系数、齐次和非齐次* 方程 (组) 等. 下面给出一些例子.

以下如无特别说明, 自变量 t 表示时间, $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 表示 n 维空间自变量. 称微分算子

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

为Laplace(拉普拉斯) 算子. 可以说, 它是偏微分方程中最重要的算子, 这个算子在刚性运动下保持不变, 即在坐标的平移和旋转变换下不变.

例 1.1.1 关于函数 $u = u(x_1, x_2, \cdots, x_n, t)$ 的 n 维波动方程是

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \tag{1.1.2}$$

其中, $a > 0$ 是常数.

它是一个二阶常系数线性方程. 当 $n = 1$ 时, 它描述弦的振动或声波在管中的传播; 当 $n = 2$ 时, 它描述浅水面上的水波和薄膜的振动; 而当 $n = 3$ 时, 它描述声波或光波.

例 1.1.2 当一个导热体的密度和比热都是常数时, 其温度分布 $u(x, t)$ 满足热传导方程

$$u_t = k\Delta u, \tag{1.1.3}$$

其中, $k > 0$ 是常数.

在研究粒子的扩散过程时, 例如气体的扩散、液体的渗透以及半导体材料中杂质的扩散等, 也会遇到类似的方程.

例 1.1.3 关于函数 $u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的 n 维 Laplace 方程是

$$\Delta u = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \cdots + u_{x_nx_n} = 0. \tag{1.1.4}$$

它的解 u 称为调和函数. 这也许是在理论上最重要、在应用中最广泛的方程. 当方程是非齐次时, 叫做 Poisson(泊松) 方程. 它们通称为位势方程. 在研究静电场的电位函数、平稳状态下的波动现象和扩散过程时都会遇到这类方程.

以上方程都是二阶线性常系数方程, 它们是本教材的核心内容. 二阶线性方程的一般形式是

例 1.1.4

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u = f(x), \tag{1.1.5}$$

其中 , $a^{ij} = a^{ji}$, $i, j = 1, 2, \cdots, n$, 且至少有一个 $a^{ij} \neq 0$.

例 1.1.5 我们称通过给定周线而具有最小面积的曲面为极小曲面, 它满足二阶拟线性方程, 即极小曲面方程:

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_xu_yu_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0. \tag{1.1.6}$$

例 1.1.6 三阶拟线性方程的一个例子是 Korteweg-de Vries 方程, 简称 KdV 方程:

$$u_t + cuu_x + u_{xxx} = 0, \tag{1.1.7}$$

它是在水波的研究中被首先遇到的, 其中, $u = u(x,t)$ 是二元光滑函数.

例 1.1.7 一个全非线性一阶方程的例子是关于函数 $u(x,t)$ 的 Hamilton-Jacobi(哈密顿 – 雅可比) 方程

$$u_t + H(\mathrm{D}u, x) = 0, \tag{1.1.8}$$

其中, x 是 n 元空间自变量, $\mathrm{D}u = (u_{x_1}, u_{x_2}, \cdots, u_{x_n})$, $H(\xi, x)$ 是其自变量的非线性函数.

例 1.1.8 大家知道, 一个复解析函数的实部 $u(x,y)$ 和虚部 $v(x,y)$ 满足 Cauchy-Riemann(柯西 – 黎曼) 一阶线性方程组

$$\begin{cases} u_x = v_y, \\ u_y = -v_x. \end{cases} \tag{1.1.9}$$

我们可以把 $(u(x,y), v(x,y))$ 视为无旋不可压缩流的速度场.

现在, 以向量方程的形式给出非线性方程组的例子.

例 1.1.9 设 $\boldsymbol{u}$ 是自变量 $(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的向量函数:

$$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_m),$$
$$\Delta\boldsymbol{u} = (\Delta u_1, \Delta u_2, \cdots, \Delta u_m),$$

则有二阶半线性反应扩散方程组

$$\boldsymbol{u}_t - \Delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) \tag{1.1.10}$$

和一阶拟线性能量守恒律方程组

$$\boldsymbol{u}_t + \mathrm{div}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) = 0, \tag{1.1.11}$$

其中, $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{mn}$.

1.1.2 叠加原理

在物理、力学和化学等学科中, 许多现象具有叠加效应, 即几种不同因素同时出现时所产生的效果等于各个因素分别单独出现时所产生的效果的叠加 (即总和), 称这个事实为*叠加原理*. 满足叠加原理的现象在偏微分方程中的模型就是线性微分方程. 我们以二阶线性偏微分方程 (1.1.5) 为例来说明叠加原理. (1.1.5) 可表示为

$$Lu = f. \tag{1.1.12}$$

通常把叠加原理叙述为以下两种类型:

(1) 设 u_i 满足 $Lu_i = f_i,\ i = 1, 2, \cdots, m$, 其中 m 为有限数或 $+\infty$, 则它们的线性组合 $u = \sum_{i=1}^{m} c_i u_i$ 必满足方程 $Lu = \sum_{i=1}^{m} c_i f_i$. 当出现无穷求和时, 则要求级数收敛且满足 L 中出现的求偏微商与求和可交换次序的条件.

(2) 设 $u(x;y)$ 满足 $Lu = f(x;y)$, 其中 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是自变量, 而 $y = (y_1, y_2, \cdots, y_m)$ 是参数, 又设积分

$$U(x) = \int_{\Omega} u(x;y)\,\mathrm{d}y$$

收敛且满足 L 中出现的求偏微商与求积分可交换次序的条件, 则 $U(x)$ 满足方程

$$LU(x) = \int_{\Omega} f(x;y)\,\mathrm{d}y,$$

其中, $\mathrm{d}y = \mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2 \cdots \mathrm{d}y_m,\ \ y \in \Omega,\ \ \Omega \subset \mathbb{R}^m$ 是开集.

后文中将经常用叠加原理把一个复杂问题的求解化为几个较简单问题的求解, 从而使问题得以解决. 我们用下面的例子说明叠加原理的应用.

例 1.1.10 *求 Poisson 方程*

$$\Delta u = x^2 + 3xy + y^2 \tag{1.1.13}$$

的通解.

解 (1) 先求出方程的一个特解 $u_1(x,y)$, 使满足

$$\Delta u_1 = x^2 + 3xy + y^2.$$

由于方程右端是一个二元二次齐次多项式, 可设 u_1 具有形式

$$u_1 = ax^4 + bx^3y + cy^4,$$

其中, a, b, c 是待定常数. 把它代入方程, 得

$$\Delta u_1 = 12ax^2 + 6bxy + 12cy^2 = x^2 + 3xy + y^2,$$

比较两边的系数, 得

$$a = \frac{1}{12},\ b = \frac{1}{2},\ \ c = \frac{1}{12},$$

于是

$$u_1 = \frac{1}{12}(x^4 + 6x^3y + y^4).$$

(2) 求函数 $v(x,y)$, 使满足 $\Delta v = 0$.

作变换 $\xi = x$, $\eta = \mathrm{i}y(\mathrm{i} = \sqrt{-1})$, 得

$$v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} = 0.$$

再作变换 $s = \xi + \eta$, $t = \xi - \eta$, 方程进而化为

$$v_{st} = 0,$$

解得

$$\begin{aligned} v &= f(s) + g(t) \\ &= f(\xi + \eta) + g(\xi - \eta) \\ &= f(x + \mathrm{i}y) + g(x - \mathrm{i}y), \end{aligned}$$

其中，f, g 是任意的二次连续可微函数.

(3) 根据叠加原理, Poisson 方程 (1.1.13) 的通解是

$$\begin{aligned} u(x,y) &= v + u_1 \\ &= f(x + \mathrm{i}y) + g(x - \mathrm{i}y) + \frac{1}{12}(x^4 + 6x^3y + y^4). \end{aligned}$$

1.2 定解问题

1.2.1 定解条件与定解问题

由上面的例 1.1.10 可知, 一个偏微分方程通常有无穷多个解. 正如前文所说, 这些方程都有实际的物理等背景, 是从实际问题中抽象出来的. 例如, 当 $n = 2$ 时, 方程 (1.1.2) 可以表示在一平面区域上张紧的薄膜的横振动, 而薄膜的边界振动状态是已知的. 也就是说, 按照薄膜具体的物理状态, 位移函数 $u(x, y, t)$ 在边界上的值或法向微商的值或二者的线性组合的值是已知的. 这就要求求出的解满足这个条件. 我们把方程的解必须要满足的事先给定的条件叫做*定解条件*, 一个方程配备上定解条件就构成一个*定解问题*. 一般说来, 常见的定解条件有*初始条件*(也叫 Cauchy *条件*) 和*边界条件* 两大类, 相应的定解问题叫*初值问题*(或 Cauchy *问题*) 和*边值问题*. 初值问题或边值问题的解或称古典解是指这样的函数: 它在区域的内部具有方程中出现的一切连续偏微商, 而本身在区域的闭包上连续 (有时根据具体问题的性质或边界条件的类型, 也要求有关的偏微商连续到边界), 它满足方程, 并且当时间变量趋于初始时刻时或空间变量趋于区域的边界时它 (有时及其有关的偏微商) 连续地取到给定的初始值或边界值. 有时, 对方程同时附加上初始条件和边界条件, 这就构成一个*初边值问题*. 下面给出几个例子.