刘学武 编

平面几何题解归类选析

兰州大学出版社

平面几何题解归类选析

刘学武　编

兰州大学出版社

1989·兰州

内 容 提 要

本书从分析入手，着重探讨了典型类型题的思维方式及解题技巧. 这些典型类型题是：三角形主要线段的计算公式、勾股定理及其它、证线段关系式、三角形面积法证题、怎样添辅助线、正弦定理及其应用、余弦定理及其应用、一题多变、关于计算问题、反证法等. 通过对这些典型类型题的学习，可以启迪思维、开阔视野，巩固平面几何基础知识，提高解题的基本技能，培养逻辑论证和分析问题、解决问题的能力.

可供初中生、自学青年、在职职工复习时使用.

平面几何题解归类选析

刘学式 编

兰州大学出版社出版

（兰州大学校内）

甘肃省静宁县印刷厂印刷 甘肃省新华书店发行

开本：787×1092毫米 1/32 印张：5.875

1989年3月第1版 1989年3月第1次印刷

字数：131 千字 印数：1—17000册

ISBN7-311-00208-7/G·66 定价：2.00元

前　　言

为了探讨解题思路和方法，总结解题规律和经验，本人在博采众家研究成果的前提下，通过多年教学实践，把平面几何中比较典型的题目系统地、科学地归类分析。内容共分十章，包括三角形主要线段的计算公式、勾股定理及其它、证线段关系式、三角形面积法证题、怎样添辅助线、正弦定理及其应用、余弦定理及其应用、一题多变、关于计算问题、反证法等，共收例题237道，练习题143道。从而为读者学习平面几何启迪思维、开阔视野，巩固平面几何基础知识，提高解题基本技能，培养逻辑论证和分析问题、解决问题的能力作一点贡献。

本书可供初中学生、自学青年、在职职工复习时使用，供数学爱好者研究时参考，也可供数学教师教学时选用。

在编撰过程中，蒙射阳县教育局陆永谦副局长、教研室周谔主任鼓励、关照，《初中生学习指导》高章满编辑，盐城师专章士藻副教授悉心指点、修改，特在此一并致谢！

由于本人水平有限，疏漏、谬误，欠妥之处，敬请读者批评指正。

编者　刘学武

1988．1

目　录

第一章　三角形主要线段的计算公式

三角形的主要线段指中线、角平分线和高，这些线段的计算公式都可以用初中知识证明。掌握这些公式，对解决有关题目不无好处。

一　三角形中线长计算公式〔通常叫做阿波罗尼斯(Apollonious)定理〕

设△ABC的三边为a、b、c，m_a为a边上的中线，m_b为b边上的中线，m_c为c边上的中线，则$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$，$m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$，$m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$。

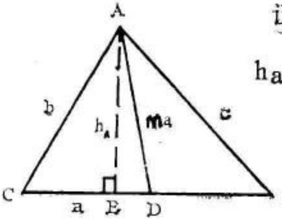

图1.1.1

证明　如图1.1.1，作a边上的高h_a，则$h_a^2=b^2-\left(\frac{a}{2}-DE\right)^2=c^2-\left(\frac{a}{2}+DE\right)^2$，∴ $DE=\frac{c^2-b^2}{2a}$，又∵ $m_a^2=h_a^2+DE^2$，∴ $m_a^2=\frac{1}{4}\cdot(2b^2+2c^2-a^2)$，∴ $m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$

同理可得：$m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$，

$$m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}。$$

当然，该定理还可以通过平行四边形对角线的平方和等于四边的平方和去证明，也可以用余弦定理、解析法等方法

去证明，读者可试证之。

三角形中线长公式有广泛的应用，有关题目也比较多。这类题目的特点是题设中有等分点，结论中有线段平方关系式。

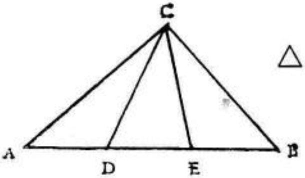

图1.1.2

例1　如图1.1.2，D、E是Rt△ABC斜边AB的三等分点，求证：

$$CD^2+CE^2+DE^2=\frac{2}{3}AB^2。$$

分析：由于CD、CE分别是AE边、BD边的中线，等式的每一项都是平方式，故应考虑到应用中线长计算公式去证明。

证明

$$CD^2=\frac{CE^2+AC^2}{2}-\frac{\left(\frac{2}{3}AB\right)^2}{4}$$

$$CE^2=\frac{CD^2+CB^2}{2}-\frac{\left(\frac{2}{3}AB\right)^2}{4}$$

$$\Longrightarrow CD^2+CE^2+DE^2=AC^2+BC^2-\frac{4}{9}AB^2+DE^2$$

$$AC^2+BC^2=AB^2$$

$$DE=\frac{1}{3}AB\Rightarrow DE^2=\frac{1}{9}AB^2$$

$$\Longrightarrow CD^2+CE^2+DE^2=\frac{2}{3}AB^2$$

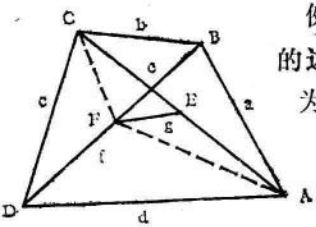

图1.1.3

例2　如图1.1.3，设四边形ABCD的边长分别为a、b、c、d，两条对角线长为e、f，对角线中点连线长为g，求证：

$$a^2+b^2+c^2+d^2=e^2+f^2+4g^2。$$

分析：由于E、F分别为AC、BD的中点，且等式中各项均为

平方式，故应考虑到应用中线长计算公式去证明。

证明　连结AF、CF，则

$$AF^2=\frac{1}{2}(a^2+d^2)-\frac{1}{4}f^2$$

$$CF^2=\frac{1}{2}(b^2+c^2)-\frac{1}{4}f^2$$

$$\left.\begin{array}{l}\Longrightarrow AF^2+CF^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2-f^2)\\ \qquad g^2=\frac{1}{2}(AF^2+CF^2)-\frac{1}{4}e^2\end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow a^2+b^2+c^2+d^2=e^2+f^2+4g^2$$

应该考虑到：

（1）　由于$g^2\geqslant 0$，故$e^2+f^2\leqslant a^2+b^2+c^2+d^2$，也就是说：任何四边形的对角线的平方和不大于它的四边平方和。

（2）　当$g=0$时，该四边形为平行四边形，则平行四边形的对角线的平方和等于四边的平方和（见课本《几何》习题十八T_{14}），此定理可应用勾股定理去证明。

例3　如图1.1.4，P为ΔABC的BC边上一点，且$2BP=PC$，求证：$2AB^2+AC^2=6BP^2+3AP^2$。

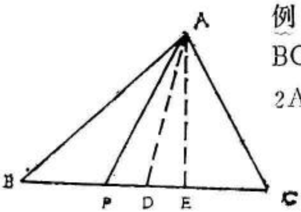

图1.1.4

分析：P为BC边的三等分点，等式中的各项均为平方式，故应考虑应用中线长计算公式去证明。

证明　取BC中点D，PC中点E，连结AD、AE，则

$$\left.\begin{aligned}4AD^2 &= 2AB^2+2AC^2-BC^2\\ &= 2AP^2+2AE^2-PE^2\\ 2AE^2 &= AP^2+AC^2-\frac{1}{2}PC^2\\ PC &= 2BP\\ BC &= 3BP\\ PE &= BP\end{aligned}\right\}$$

$$\Longrightarrow 2AB^2+AC^2=6BP^2+3AP^2.$$

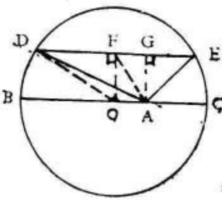

图1.1.5

例4 如图1.1.5，A为⊙O直径BC上一点，DE为⊙O内平行于BC的弦，求证：$AB^2+AC^2=AD^2+AE^2$。

分析：由于$AB^2=(R+OA)^2$，$AC^2=(R-OA)^2$，R为⊙O半径，从而$AB^2+AC^2=2(R^2+OA^2)$，如果把$2(R^2+OA^2)$与AD^2+AE^2连结，应考虑构造三角形应用中线长计算公式证明。

略证 作$OF\perp DE$于F，$AG\perp DE$于G，连结OD、AF，则$OB=OC=OD$，$\therefore AB^2+AC^2=(OB+OA)^2+(OB-OA)^2=2(OB^2+OA^2)=2(OD^2+OA^2)$
$=2(DF^2+OF^2+OA^2)=2(DF^2+AF^2)$

又$\because 2AF^2=AD^2+AE^2-\dfrac{(2DF)^2}{2}$，

$\therefore AD^2+AE^2=2(DF^2+AF^2)$，$\therefore AB^2+AC^2$
$=AD^2+AE^2$.

【练习一】

1．证明三角形大边上的中线小于小边上的中线。

2．自△ABC的边AB、AC向形外作正方形ABEF和

正方形ACGH，M是BC边中点，求证：$FH=2AM$。

3．在圆内接四边形ABCD中，若AC平分BD，则$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=2AC^2$。

4．有两同心圆，设AB是外圆直径，P是外圆上点；CD是内圆的直径，Q是内圆上的点，求证：

$$AQ^2+BQ^2=CP^2+DP^2。$$

二　三角形角平分线长计算公式

设△ABC三边为a、b、c，t_a、t_b、t_c分别是∠A、∠B、∠C的平分线，$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$，则

$$t_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcs(s-a)}，\quad t_b=\frac{2}{a+c}\sqrt{acs(s-b)}，$$

$$t_c=\frac{2}{a+b}\sqrt{abs(s-c)}。$$

证明　如图1．2．1，由角平分线性质可知a边被t_a分成$\frac{ac}{b+c}$与$\frac{ab}{b+c}$两部分，则

$$t_a{}^2=c^2+\left(\frac{ac}{b+c}\right)^2-2\cdot C\cdot\frac{ac}{b+c}\cos B$$

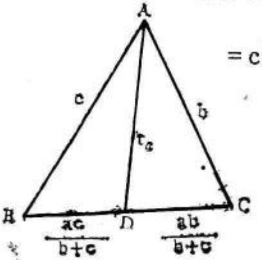

图1.2.1

$$=c^2+\frac{a^2c^2}{(b+c)^2}-\frac{2ac^2}{b+c}\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$=\frac{c^2(b+c)^2+a^2c^2}{(b+c)^2}$$

$$-\frac{c(b+c)(a^2+c^2-b^2)}{(b+c)^2}$$

$$=\frac{bc(b^2+2bc+c^2-a^2)}{(b+c)^2}$$

$$=\frac{bc(a+b+c)(b+c-a)}{(b+c)^2}=\frac{4bcs(s-a)}{(b+c)^2},$$

$\therefore t_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcs(s-a)}$，同理$t_b=\frac{2}{a+c}\sqrt{acs(s-b)}$，

$$t_c=\frac{2}{a+b}\sqrt{abs(s-c)}。$$

类似地可以得到外角平分线长计算公式：

$$t_a'=\frac{2}{|b-c|}\sqrt{bc(s-b)(s-c)},$$

$$t_b'=\frac{2}{|a-c|}\sqrt{ac(s-a)(s-c)},$$

$$t_c'=\frac{2}{|a-b|}\sqrt{ab(s-a)(s-b)}。$$

角平分线长计算公式还可以通过作△ABC的外接圆O，延长角平分线AD交⊙O于E，连结CE，由△ACE∽△ADB，△ADB∽△CDE而获证；还可以设坐标用解析法去证明，当学了三角中的倍角公式和半角公式后，可以用正弦面积公式代入面积等式而获证。

例1　证明两角平分线相等的三角形是等腰三角形。

分析：已知角平分线相等，而角平分线又可用三边的代数式表示，故可应用角平分线长计算公式去证明。

证明　设t_b、t_c为△ABC的∠B、∠C的平分线，a、b、c分别为△ABC的三边的长，则$t_b=t_c\Longrightarrow t_b^2=t_c^2$

$$\Longrightarrow \frac{4acs(s-b)}{(a+c)^2}=\frac{4abs(s-c)}{(a+b)^2}$$

$$\Longrightarrow c(s-b)(a+b)^2=b(s-c)(a+c)^2$$

$$\Longrightarrow s[a^2(c-b)-bc(c-b)]-bc$$

$$[2ac+c^2-2ab-b^2]=0$$

即 $(b-c)[s(a^2-bc)+bc(a+2s)]=0$

即 $(b-c)[sa^2+bc(a+s)]=0$

$\because sa^2+bc(a+s)>0$

$\therefore b-c=0\Longrightarrow b=c$。

由此可以得到：两条角平分线相等的三角形是等腰三角形。

例 2　已知t_a、t_b、t_c分别为∠A、∠B、∠C的内角平分线，m_a、m_b、m_c分别为三边上的中线，$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$，求证：$t_a^2+t_b^2+t_c^2\leqslant s^2\leqslant m_a^2+m_b^2+m_c^2$。

证明　$t_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcs(s-a)}$

$$(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2\geqslant 0\Longrightarrow b+c\geqslant 2\sqrt{bc}$$

$$\Longrightarrow t_a\leqslant\sqrt{s(s-a)}$$

即$t_a^2\leqslant s(s-a)$（仅当$b=c$时等号成立）；

同理可得：$t_b^2\leqslant s(s-b)$（仅当$a=c$时等号成立）

$t_c^2\leqslant s(s-c)$（仅当$a=b$时等号成立），

$\therefore t_a^2+t_b^2+t_c^2\leqslant s(s-a+s-b+s-c)=s^2$（等号仅在$a=b=c$时成立）；

又$\because \frac{b^2+c^2}{2}-\frac{b^2+c^2+2bc}{4}\geqslant 0$

$\therefore \frac{b^2+c^2}{2}\geqslant\left(\frac{b+c}{2}\right)^2$仅当$b=c$时等号成立）

而$m_a^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}$，$\therefore m_a^2\geqslant\left(\frac{b+c}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}$

$$=\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}=s(s-a);$$

同理可得：$m_b^2\geqslant s(s-b)$ （仅当$a=c$时等号成立），$m_c^2\geqslant s(s-c)$ （仅当$a=b$时等号成立）。

$\therefore m_a^2+m_b^2+m_c^2\geqslant s(s-a+s-b+s-c)=s^2$（等号仅在$a=b=c$时成立）；

$\therefore t_a^2+t_b^2+t_c^2\leqslant s^2\leqslant m_a^2+m_b^2+m_c^2$ （等号仅在$a=b=c$时成立）。

【练习二】

1、在三角形中，证明大角的平分线小于小角的平分线。

2、证明两边及夹角平分线对应相等的两个三角形全等。

三　三角形高线长计算公式

设△ABC的三边为a、b、c，h_a为边上的高，h_b为b边上的高，h_c为c边上的高，$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$，则：

$$h_a=\frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$h_b=\frac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$h_c=\frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}。$$

事实上，$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

为△ABC的面积计算公式（见课本《代数》复习参考题十五T_{17}），习惯上称为海伦公式。海伦是古希腊的数学家，他提供了已知三角形三边求三角形面积的公式。我国南宋时数学家秦九韶也发现了求三角形面积的类似方法，公式为：$\triangle=\sqrt{\frac{1}{4}\left[c^2a^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2\right]}\ \left(a>b>c\right)$。

海伦给出的公式证明繁杂冗长，不易为初学者接受。近代，人们把三角学引入几何证明，比古典证法直接得多，介绍如下：

$$\triangle=\frac{1}{2}bc\sin C=\frac{1}{2}bc\sqrt{1-\cos^2 C}$$

$$=\frac{1}{2}ab\sqrt{(1+\cos C)(1-\cos C)}$$

$$=\frac{1}{2}ab\sqrt{(1+\cos C)}$$

$$=\frac{1}{2}ab\sqrt{\left(1+\frac{a^2+b^2-c^2)}{2ab}\right)\left(1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c}$$

$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}，\left[s=\frac{1}{2}(a+b+c)\right]$$

最近，美国一位大学教师结合了海伦公式的古典证法与近代证法中的优点，得出以下证法：

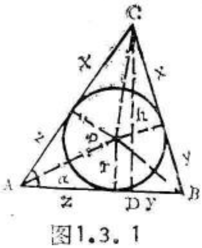

图1.3.1

证明　如图1．3．1，△ABC被内切圆的切点分为三对全等的直角三角形，边长分别r、x、y、z。易见$a=x+y$，$b=x+z$，$c=y+z$，设c边上的高为h_c，则

$$\sin\alpha=\frac{h_c}{x+z}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

（关于此式的初中知识证明请参看本书第四章第一节例6）

$$\Longrightarrow\frac{h_c}{x+z}=\frac{2rz}{r^2+z^2}$$

又∵$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}r(a+b+c)=r(x+y+z)=rs$

$=\frac{1}{2}(y+z)\ h_c=\frac{1}{2}(y+z)(x+z)\frac{2rz}{r^2+z^2}$

$\therefore sr^2+sz^2=xyz+xz^2+yz^2+z^3$

$\therefore sr^2=xyz=(s-a)\quad(s-b)\quad(s-c)$

$\therefore S^2_{\triangle ABC}=(sr)^2=s(sr^2)=s(s-a)(s-b)$

$(s-c)$，$[s=\frac{1}{2}(a+b+c)]$

$\therefore S_{\triangle ABC}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

由于$\frac{1}{2}ah_a=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$\therefore h_a=\frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

同理可得：

$h_b=\frac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$。

$h_c=\frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

例1　设a、b、c为△ABC的三边，R为△ABC外接

圆半径，$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$，求证：

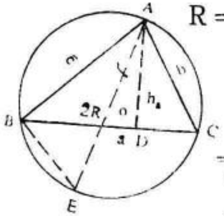

图1.3.2

$$R=\frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}。$$

分析　由于$\frac{1}{h_a}=\frac{a}{2\sqrt{s(s-a)(s-b)}}\cdot\frac{1}{(s-b)(s-c)}$，而$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bc\sin A$，$\sin A=\frac{a}{2R}$，故有$2Rh_a=bc$，因此需构造三角形来证明。

略证　如图1.3.2，过A作$AD\perp BC$于D，设$AD=h_a$，连结AO，并延长交⊙O于E，连结BE，则$AE=2R$，$\angle ABE=90^\circ$，$\angle E=\angle C$，$\therefore\triangle ABE\backsim\triangle ADC$，$\therefore 2Rh_a=bc$，$\because h_a=\frac{2}{a}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，$\therefore$

$$R=\frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

例2　如图1.3.3，设△ABC的三边为a、b、c，h_a、h_b、h_c分别为它们的高，r为△ABC内切圆半径，求证：

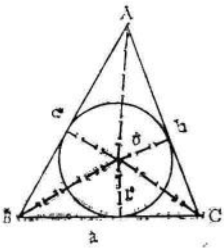

图1.3.3

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}。$$

分析　由于结论中出现三角形的三条高，故应考虑应用三角形高长公式。

证明　$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$