〔美国〕奇·特里格编

数学450题解

下册

郑元禄 译

福建省泉州市第五中学

目　录

第二章　几　何　学 ……………………（129）

第一节　平面几何学 ……………………（129）

一、　三角形 ……………………（129）

二、　多边形 ……………………（148）

三、　圆与杂题 ……………………（164）

第二节　立体几何学 ……………………（179）

第三节　解析几何学 ……………………（200）

第三章　三　角　学 ……………………（207）

附录一　补充知识 ……………………（225）

一、进位制与可除性特征 ……………………（225）

二、余数的算术 ……………………（226）

三、二项式与组合论 ……………………（226）

四、韦达定理 ……………………（226）

五、狄利克来原理 ……………………（227）

六、角平分线长度公式 ……………………（228）

七、格点个数公式 ……………………（230）

附录二　趣味数学300题…………（232）
一、算　术　…………（232）
（一）　计 算 题…………（232）
（二）　应用题与杂题…………（238）
二、代数学…………（241）
（一）　计算题…………（241）
（二）　证明题…………（243）
三、几何学…………（244）
（一）　计算题…………（244）
（二）　作图题与杂题…………（247）
四、逻辑推理…………（257）
（一）　基本逻辑推理题…………（257）
（二）　证明题…………（262）
（三）　应用题与杂题…………（263）
五、数学游戏…………（267）
（一）　计算题与问答题…………（267）
（二）　数学游戏…………（271）
六、答案与提示…………（276）

第二章 几何学

第一节 平面几何学

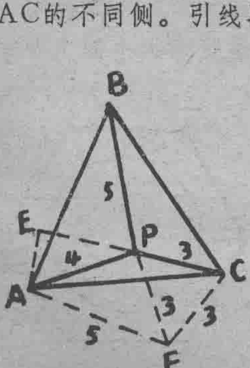
一、三 角 形

294．试求这样一个直角三角形，使它的各边可用整数表示，并且表示边长的所有9个数字都不相同。

解 如果试图在边长为互质整数的三角形中找所需要的三角形，就会失败。但是满足题目条件的三角形毕竟是存在的。例如可取182（3，4，5）＝546，728，910。另一个解具有形式：178（3，4，5）＝534，712，890。

295．三条长度分别为3，4，5cm的线段把等边三角形的一内点P和它的顶点连结起来。问这个三角形的边长等于多少？

解 在△ABC中，已知三条线段之比等于PC：PA：PB＝3：4：5。作一个这样的等边△PCF，使点P和F位于AC的不同侧。引线段AF。在线段CP的延长线上过A点作垂线AE。注意$\angle PCB=60°-\angle PCA=\angle ACF$；因此$\triangle PCB\cong\triangle FCA$，$AF=BP=5$。就是说△APF是直角三角形，从而$\angle APE=180°-60°-90°=30°$。因此，$AE=2$，$EP=2\sqrt{3}$。于是$AC=\sqrt{2^2+(3+2\sqrt{3})^2}=\sqrt{25+12\sqrt{3}}\approx 6.7664$cm。

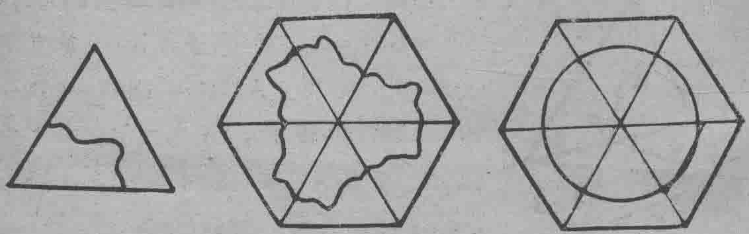


296. **两个三角形的边长分别等于$\sqrt{a^2+b^2}$，$\sqrt{b^2+c^2}$，$\sqrt{c^2+a^2}$和$\sqrt{p^2+q^2}$，$\sqrt{q^2+r^2}$，$\sqrt{r^2+p^2}$。已知$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=p^2q^2+q^2r^2+r^2p^2$，$a>p$，$b>q$，问哪个三角形的面积较大？**

解 考虑一个四面体，它的一个顶点处的所有平面角是直角，从这顶点出发的三棱分别等于a，b，c。它的其余三条棱分别等于$\sqrt{a^2+b^2}$，$\sqrt{b^2+c^2}$，$\sqrt{c^2+a^2}$。因为与这顶点相邻的那些面的面积平方和等于第四面的面积的平方，所以得出，第四面的面积的平方等于$\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{4}$。如考虑一个类似的四面体，它的形成直角的诸棱分别等于p，q，r，则它的第四面的面积的平方等于$\frac{p^2q^2+q^2r^2+r^2p^2}{4}$。已知$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=p^2q^2+q^2r^2+r^2p^2$，故两个已知三角形的面积相等，与a，p，b，q之间的关系无关。

297. **怎样的最小长度的曲线可把一个等边三角形分成等积的两部分？**

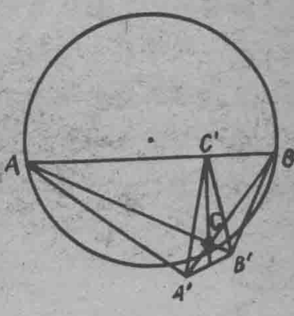
解 固定三角形的一个顶点，把它同所求曲线关于从此顶点出发的边反射几次。这时得到一个正六边形和一条闭合曲线，此曲线把这个六边形分成等积的两部分，如图所示。因为曲线的长度是最小的，所以这条曲线是以这个固定顶点为圆心的圆周。



298. 如果一个三角形的顶点是另一个三角形的高线的足，那么前者称为后者的垂足三角形。试求一个钝角三角形，使它与其垂足三角形相似。

解 取钝角$\triangle ABC$，其角服从条件$C>B>A$。分别以A'，B'，C'表示点A，B，C在BC，AC，AB上的投影。在$\triangle A'B'C'$中，其角满足关系式$B'>A'>C'$，这是可以确定的，考虑从点A，B，C向$\triangle ABC$的外接圆所作的切线，这些切线平行于$\triangle A'B'C'$的各边。因而我们要求等式$A=C'$，$B=A'$，$C=B'$满足。

考虑循环四边形$AA'CC'$和$C'CB'B$，注意，$\triangle ABC$的高平分了垂足三角形的内角，可求出$B=A'=2A$，$C=B'=2B$，$C=2B=4A$。由此推出$A=\frac{\pi}{7}$，$B=\frac{2\pi}{7}$，$C=\frac{4\pi}{7}$。



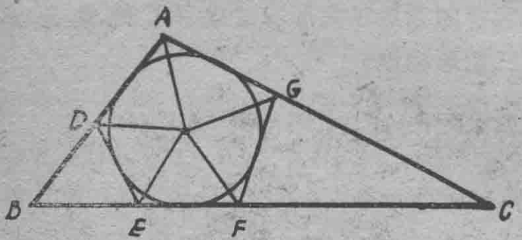
如果原钝角三角形又是等腰的，那么问题无解，因为当$C>B=A$时得出一连串矛盾的等式：$A=B=A'=B'=2A=2B$。因此，上面所得的解是唯一的。

容易证明：在锐角三角形中，等边三角形是与其垂足三角形相似的唯一三角形。

299. 如所周知，为了把一个钝角三角形分划成一些锐角三角形，所需要的最小直线切口数目等于7。试指出，在实际上这些切口应怎样作出？

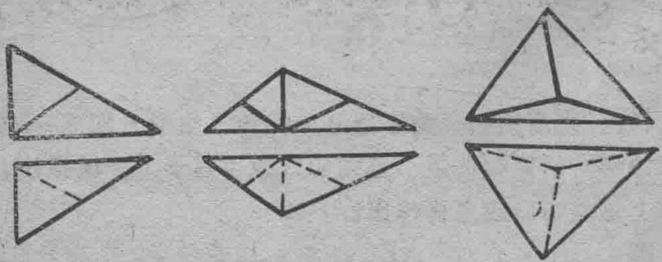
解 用下列分划$\triangle ABC$的方法，A是钝角。引线段DE和

FG（D在AB上，G在AC上，E和F在BC上），与圆心在O的内切圆相切，使DE⊥OB，FG⊥OC。于是得到两个锐角等腰△BDE和△FGC。五边形ADEFG的所有的角都是钝角。引线段OA，OD，OE，OF，OG，把这些角平分，并把五边形分成5个三角形。在O点的所有圆心角都是锐角，因为所得5个三角形的其它两个角中的每一个都大于45°。因此，所有5个三角形都是锐角三角形。



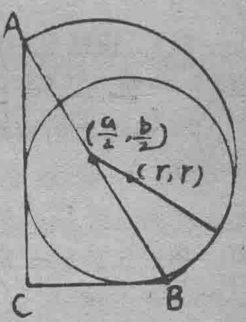
300. 考虑一个平面上的两个全等三角形，它们可以用镜象反射由一个三角形得出另一个三角形。必须把这些三角形分成哪些部分，使得只要在平面上移动所得的部分（没有反射），就能从其中一个三角形变成另一个三角形？

解 两个已知三角形之一完全不需要分刈，而把另一个分刈成一些等腰三角形。如果原三角形是直角三角形，那么切口要通过斜边的中线。钝角三角形先要沿着最大边上的高分成两个直角三角形，然后和上述情况一样地进行。最后，锐角三角形可以分成三个等腰三角形，切口通过三角形外接圆心和顶点连成的线段。



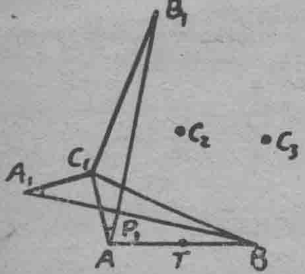
301. 试求一个曲边三角形的内切圆的半径，这三角形的两边与已知直角△ABC的两直角边重合，第三边是以线段AB为直径并位于△ABC外的半圆周。

解 以△ABC的两直角边为轴作直角坐标系。在这个坐标系中，内切圆心和已知半圆圆心的坐标分别等于（r，r）和（$\frac{a}{2}$，$\frac{b}{2}$），其中r是未知圆的半径，a和b是△ABC的直角边长。两个圆心之间的距离等于半径之差，即关系式$(r-\frac{a}{2})^2+(r-\frac{b}{2})^2=(\frac{c}{2}-r)^2$是正确的。从而利用等式$a^2+b^2=c^2$，得出$r=a+b-c$。换言之，未知圆的半径等于直角△ABC的内切圆的直径。



302. 有一个人决定把自己的宝物埋藏在无人居住的海岛的岸中。两块大石头A和B并排着，离岸较远一点的地方有三株椰子树C_1，C_2，C_3。此人站在C_1旁，截取一线段C_1A_1等于且垂直于线段C_1A，使C_1A_1从直线C_1A指向△AC_1B的外部。类似地，他截取线段C_1B_1等于且垂直于线段C_1B，C_1B_1也是指向△AC_1B外部的。他标出AB_1和BA_1的交点P_1。他依次站在C_1，C_2，用类似方法标出两点P_2和P_3，最后，他把宝物埋在△$P_1P_2P_3$的外接圆的圆心。

经过几年后，他回岛时发现，在强烈的飓风破坏下，椰子树已不再留下痕迹。他是怎样找到自己埋下的宝物的？



解 因$\triangle AB_1C_1 \cong \triangle A_1BC_1$，故$\angle C_1AB_1 = \angle C_1A_1B$。其次$\angle AP_1A_1 = \angle AC_1A_1 = 90°$。因此$\angle AP_1B = 90°$。就是说，$P_1$点，类似地，$P_2$，$P_3$两点都位于直径为AB的圆周上。因此，宝物埋在线段AB的中点T的下面。

303. 设给定一个锐角三角形ABC。在它的内部取任一点P。证明：$PA+PB+PC \geqslant \frac{2}{3}\times$（由$\triangle ABC$的内切圆在$\triangle ABC$各边上的切点形成的三角形的周长）。

证 大家知道$PA+PB+PC \geqslant 6r$，其中r是$\triangle ABC$的内切圆的半径。大家也知道，在一个圆的所有内接三角形中，等边三角形有最大周长。以D，E，F表示$\triangle ABC$的内切圆在原三角形三边的切点。于是$PA+PB+PC \geqslant 6r$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}(3r\sqrt{3}) \geqslant \frac{2}{\sqrt{3}}(DE+EF+FD)$$，并且等号

仅当$\triangle ABC$是等边三角形且P点是它的重心时才成立。

304. 在含边a，b，c的三角形中，连结重心和内切圆心的直线垂直于边c所对的角的平分线。证明：数a，b，c的算术平均值等于数a，b的调和平均值。

证 设G是$\triangle ABC$的重心，I是内切圆心，S是面积，h_a和h_b分别是边a和b上的高。以P和Q分别表示直线GI与边BC和CA的交点。因为$\triangle GPC$和$\triangle GQC$的面积之和等于$\triangle IPC$和$\triangle IQC$的面积之和，且$CP=CQ$，所以求得

$\frac{1}{3}h_a + \frac{1}{3}h_b = 2r$。现在由关系式$h_a = \frac{2S}{a}$，$h_b = \frac{2S}{b}$，

$r=\dfrac{2S}{a+b+c}$很快可得到所要求的等式。

305. 设在一个三角形内给定有限个点。把这些点彼此连结起来，并把这些点和各顶点连结起来，使所得到的线段不相交，且把整个三角形分成一些较小的三角形。证明：这样的小三角形的个数总是奇数。

证 设n是小三角形的个数，e是它们在原三角形内的边数。在所有n个小三角形的3n条边中，有三边属于原三角形，其余的边在这三角形内，并且其中每边计算了两次。因此，$e=\frac{1}{2}(3n-3)$。因为数e是整数，故n应当是奇数。

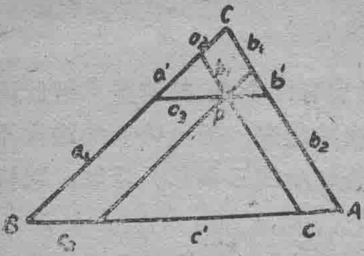
306. 设n个三角形有相等的底边，并且已知它们所有其它两边之和。证明：这些三角形的高之和在所有三角形是全等的等腰三角形时有最大值。

证 如果固定三角形的底边，并固定其余两边之和，那么等腰三角形具有最大的高。类似地，如果给定了底边并固定这样三条线段长度之和，使由这些线段中每对可组成三个含给定底边的三角形的不够长的两腰，那么这些三角形的高之和在它们是全等等腰三角形时有最大值。这个结果可以推广到n个三角形的情形。

307. 过△ABC的一个内点P作三条直线平行于它的三边。这时每边被分成三段。分别用a′，b′，c′表示边a，b，c的中间一段。证明

$$\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}+\frac{c'}{c}=1。$$

证 考虑如图所示的平行四边形和相似三角形，可以组成下列比例式：$a':a=b_1:b$；$a':a=c_2:c$；$b':b$



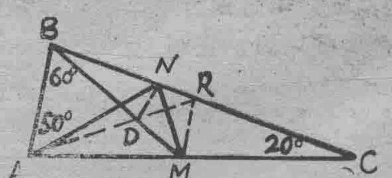
$=c_1:c$；$b':b=a_2:a$；$c':c=b_2:b$；$c':c=a_1:a$。这些等式与恒等式$a':a=a':a$；$b':b=b':b$；$c':c=c':c$一起组成了含有九个方程的方程组。

把这九个方程相加，得

$$3\left(\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}+\frac{c'}{c}\right)=\frac{a_1+a'+a_2}{a}+\frac{b_1+b'+b_2}{b}+\frac{c_1+c'+c_2}{c}=3。$$因此，$\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}+\frac{c'}{c}=1$。

308．在等腰△ABC中，C＝20°。在两腰AC和BC上分别选点M和N，使∠ABM＝60°，∠BAN＝50°。证明（不采用三角学方法）：∠BMN＝30°。

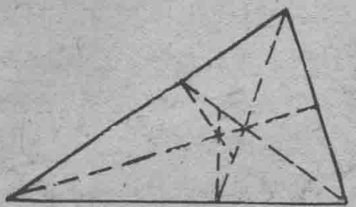
证 因为三角形的内角和等于180°，所以∠CBA＝∠CAB＝80° ∠CBM＝20°，∠BAN＝50°＝∠BNA（从而BN＝AB）。作MR∥AB，连结点A和R成线段AR，与BM相交于D点。引ND。由于对称性，△ABD和△DRM是等腰三角形；就是说，它们的各角彼此对应相等。其次，BD＝AB＝BN，从而∠BND＝∠BDN＝80°，∠NDR＝40°。现在注意到∠MRC＝80°；因此∠NRD＝40°＝∠NDR，ND＝NR。因DM＝MR，故线段MN⊥DR，且把DR平分。因此，∠BMN$=\frac{60°}{2}=30°$。



309 证明：如果在一个三角形中，从其内角平分线与

对边交点处作的三条垂线相交于一点，那么这个三角形是等腰的。

证 三角形的任一内角平分线分对边为两部分，与两邻边成比例。如果从三角形的任一内点作各边的垂线，那么这些垂线足分三角形各边所成诸线段的相间线段长度的平方和彼此相等。现在，假设从各平分线与边a，b，c的交点处作出的三条垂线相交于一点：那么



$$\left(\frac{ab}{b+c}\right)^2+\left(\frac{bc}{c+a}\right)^2+\left(\frac{ca}{a+b}\right)^2=\left(\frac{ca}{b+c}\right)^2+\left(\frac{ab}{c+a}\right)^2+\left(\frac{bc}{a+b}\right)^2。$$

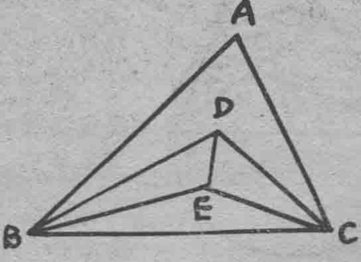
合并相同分母的各项，得

$$\frac{a^2(b-c)}{b+c}+\frac{b^2(c-a)}{c+a}+\frac{c^2(a-b)}{a+b}=0,$$

由此得$(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)^2=0$。因为前三个因数至少有一个等于0，所以三角形是等腰的。

310. 在△ABC中，线段BD和BE把∠B三等分，CD和CE把∠C三等分。E是一个靠近边BC的点。证明：∠BDE＝∠EDC。

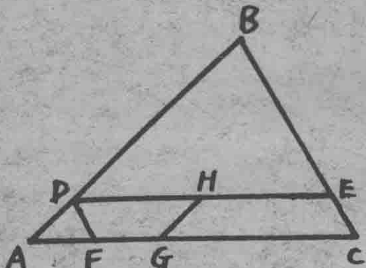
证 因为E是△BCD的两条角平分线的交点，所以线段DE是第三条角平分线。

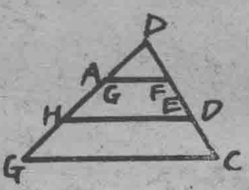


311．证明：可以用直线切口把任一已知三角形分成四部分，使得能用这四部分组成两个三角形与原三角形相似。

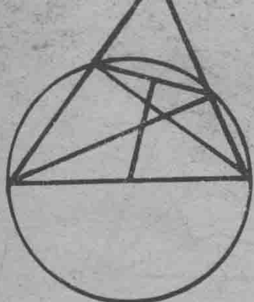
证 在已知△ABC的三边AB，BC，CA上分别取点D，E，F，使得AD：AB＝CE：CB＝AF：FC＝1：5。然后在边AC上取G点，使AG＝2AF，在DE上标出中点H。现在要按照直线DE，DF和GH来分刈三角形。△BDE是要求的两个三角形之一。剩下的其它三块可以在这个平面内移动，使得它们组成与已知三角形相似的第二个三角形。

实际上，可以用铰链把三小块固定在点F和H上，然后绕铰链旋转这三块，就得到第二个三角形。





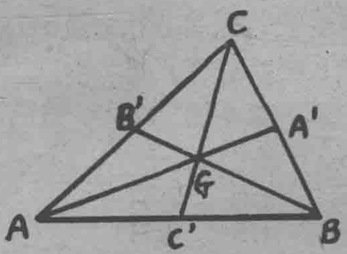
312．把三角形的两条高线的足连成一条线段，过这线段的中点作垂线。证明：这垂线把三角形的第三边二等分。



证 三角形的一边是圆的直径，此圆通过其它二边的高线的足。连结这两个高线的足所成的线段是这个圆的弦。因此过这线段中点的垂线必通过圆心，即通过已知三角形的第三边的中点。

313．证明：任意△ABC的中线AA′，BB′，CC′相交于一点。

证 著名的切瓦定理的逆定理说明：如果从三角形的各边上各取一点（共三点），把三条边分成这样的六条线段，使得其中无公共端点的三条线段的乘积等于其余三条线段的乘积，那么把这三点与三角形相对顶点连结所成的三条线段，相交于一点。

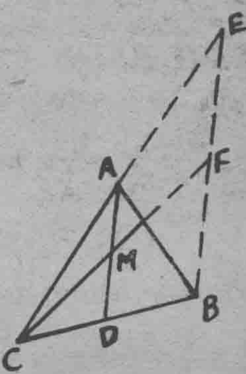


因为中线平分三角形的边，所以（AB′）（CA′）（BC′）=（B′C）（A′B）（C′A），它们相交于一点。

其次，由切瓦定理推出，$\frac{CG}{GC'}=\frac{CB'}{B'A}+\frac{CA'}{A'B}=1+1$，因此$CG=2GC'$和$CG=\frac{2}{3}CC'$。所以诸中线相交于一点，此点到三角形顶点的距离等于相应中线长度的$\frac{2}{3}$。

314．证明：如果从△ABC的顶点C引出的一条直线把过顶点A的中线平分，那么这直线把AB边分成1：2。

证 从顶点B引一条直线平行于中线AD，并与边CA的延长线相交于E点。以M表示中线AD的中点，延长CM与BE相交于F点。显然，A是CE的中点，F是BE的中点。因此，AB和CF是△CBE的中线，就是说，它们彼此分为1：2。



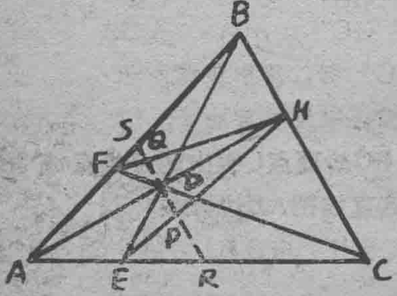
315．证明：如果线段a，b，c构成一个三角形，那么线段$\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$，$\sqrt{c}$，也构成一个三角形。

证 因为$|\sqrt{b}-\sqrt{c}|(\sqrt{b}+\sqrt{c})=|b-c|<(\sqrt{a})^2<(b+c)<(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2$，从而推出，$|\sqrt{b}-\sqrt{c}|<\sqrt{a}<(\sqrt{b}+\sqrt{c})$。

316．在锐角△ABC中作一条高AH。在AH上选出任意一点D，作直线BD与边AC相交于E点。其次作直线CD与边AB相交于F点。证明：∠AHE=∠AHF。

证 过D点作一直线平行于BC，且分别与HE，HF，AC和AB相交于点P，Q，R，S。于是

$$\frac{DP}{DR}=\frac{BH}{BC},\ \frac{DS}{DQ}=\frac{BC}{CH},\ \frac{DR}{DS}=\frac{CH}{BH}。$$



把这三个等式连乘，得DP=DQ。因此，在△HPQ中，高把底边PQ二等分，因此，△HPQ是等腰三角形，HA是∠FHE的平分线，∠AHE=∠AHF。

317．设△ABC之三个高为h_a，h_b，h_c，r为其内切圆半径，且$h_a+h_b+h_c=9r$。证明△ABC必为等边三角形。

证 设△ABC的面积为s，a，b，c为其三边长，则由$h_a=\frac{2s}{a}$；$h_b=\frac{2s}{b}$；$h_c=\frac{2s}{c}$可得$h_a+h_b+h_c=2s\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$…（1）。又$s=\frac{r}{2}(a+b+c)$…（2），由所设$h_a+h_b+h_c=9r$及（1）、（2）式可得$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=9$，即$a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b-6abc=0$或$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2=0$。

因$a>0$，$b>0$，$c>0$，故由上式得$(b-c)^2=0$，$(c-a)^2=0$，$(a-b)^2=0$。从而得$a=b=c$，即证得△ABC是等边三角形。

318．证明：如果一个三角形的两个内角的平分线相等，那么这个三角形是等腰三角形。

证　为了证明，利用由三角形的各边表示角平分线长度的著名公式：

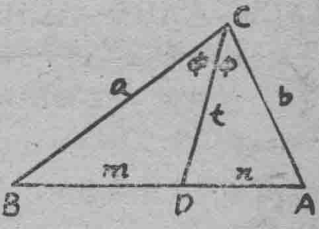
$$\frac{bc(a+b+c)(b+c-a)}{(b+c)^2}=\beta_a^2=\beta_b^2=\frac{ac(a+b+c)(c+a-b)}{(a+c)^2}。$$

化简后得$c(a+b+c)(a-b)[(a+b)(c^2+ab)+3abc+c^3]=0$。因为除了$a-b$外，所有的因子都是正的，所以得$a=b$。（角平方线的长度公式见附录）。

319．证明：三角形的任何一个内角的平分线分对边为两部分，与两邻边成比例。

证　$\angle C=2$　的平分线分已知三角形所成的两部分的面积之比$S_{BCD}:S_{DCA}=(\frac{1}{2}at\sin\ \ ):(\frac{1}{2}bt\sin\ \ )=a:b$。但两个等高三角形的面积与它们的底边成比例，因此

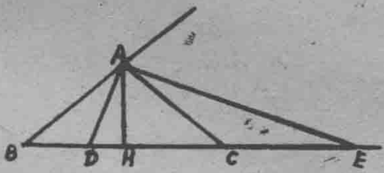
$S_{BCD}:S_{DCA}=m:n=a:b$。



320．设顶角$A=108°$的等腰三角形的高为h，$\angle A$的三等分线及其外角的四等分线的长分别为p_1及p_2。

求证$\frac{1}{p_1^2}+\frac{1}{p_2^2}=\frac{1}{h^2}$。

证 设△ABC的高AH $=h$，∠A的三等分线$AD=p_1$，∠A外角的四等分线$AE=p_2$。因$\angle A=108°$且△ABC为等腰三角形，



故$\angle DAH=18°$。在直角△ADH中，$\frac{h}{p_1}=\frac{AH}{AD}=\cos\angle DAH=\cos 18°$。另一方面，易算出$\angle CEA=\angle CAE=18°$在直角△AHE中，$\frac{h}{p_2}=\frac{AH}{AE}=\sin\angle AEH=\sin 18°$。

故$\left(\frac{h}{p_1}\right)^2+\left(\frac{h}{p_2}\right)^2=\cos^2 18°+\sin^2 18°=1$，即

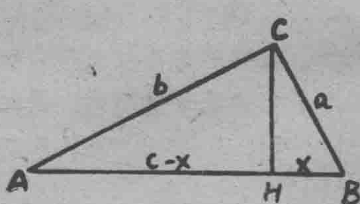
$$\frac{1}{p_1^2}+\frac{1}{p_2^2}=\frac{1}{h^2}。$$

321. 证明：直角三角形的斜边的平方等于它的两条直角边的平方和。

证 在直角△ABC中，在斜边上引高CH（见图）。△ACB∼△AHC∼△CHB，那么

$x:a=a:c$和$(c-x):b=b:c$，由此$a^2=cx$和$b^2=c^2-cx$。

把这两个等式相加，得$a^2+b^2=c^2$。



也可以这样证明：…就是说，$\frac{S_{CHB}}{a^2}=\frac{S_{AHC}}{b^2}=\frac{S_{ABC}}{c^2}$，因为相似图形的面积之比等于相应的线性元素的平方之比。但$S_{ABC}=S_{CHB}+S_{AHC}$，因此$c^2=a^2+b^2$。

322. 设x_i是从$\triangle A_1A_2A_3$的一个内点到顶点A_i（$i=1$,