目 录

第一章　排列与组合

§1.1　排　　列

在日常生活或科学实验中，我们常常需要把一些不同的事物按一定次序排列起来，例如我们要试验三个不同小麦品种A_1、A_2、A_3的好坏，需要安排在三块试验田上试种，这就有许多种不同的安排方法，可以把A_1安排在第一块试验田，A_2安排在第二块试验田，A_3安排在第三块试验田，并把这种安排方法简记为$A_1A_2A_3$。也可以把A_1安排在第一块试验田，A_3安排在第二块试验田，A_2安排在第三块试验田，并记这种安排方法为$A_1A_3A_2$，如此,还可以得到$A_2A_1A_3$、$A_2A_3A_1$、$A_3A_1A_2$、$A_3A_2A_1$等种安排方法。又如有两个乒乓球队，每队各出三个队员进行对抗赛，赛前各自把出场比赛的队员按次序1、2、3排好，然后按同号码的队员进行对抗赛，这样，每个队对出场比赛的队员就有许多种安排方法。这就是排列问题，下面给出它的定义。

定义1.1　把n个不同的事物（以后称为元素），依某种次序排成一列，称为**排列**。

（一）全排列

有n个元素，将它进行排列，如果每个排列中所有n个元素全需出现且每个元素只出现一次，这样的排列称为**全排列**。

对于n个不同的元素，它一共有几种全排列？

容易知道，一个元素A，只有一种排列。两个元素A和B，共有2种全排列，它们是AB和BA。三个元素A、B、C的全排列是ABC、ACB、BAC、BCA、CAB、CBA，一共有6种全排列。对于三个元素的全排列，我们可以把每个排列看作有三个位

置，第一个位置可以是这三个元素中的任何一个，共有 3 种放法；第二个位置可以是剩下的二个元素中的任何一个，共有 2 种放法；第三个位置放进剩下的一个，有 1 种放法，因此，三个元素共有 $3\times2\times1=3!$ 种不同的全排列。

一般地，n 个不同元素的全排列种数是 $n!$。因为每个全排列共有 n 个位置，第一个位置可以是这 n 个元素中的任何一个，共有 n 种放法；第二个位置可以放进剩下的 $n-1$ 个元素中的任何一个，共有 $n-1$ 种放法；……；最后一个位置放进剩下的一个，只有一种放法。因此，n 个不同的元素一共有 $n\times(n-1)\times\cdots\times2\times1=n!$ 种不同的全排列。我们用 P_n 来表示 n 个不同元素的全排列种数，则 $P_n=n!$。

〔例 1〕 把 5 本不同的书放到书架上，问有几种不同的排法？

解 这是全排列问题，易知

$$P_5=5!=120$$

因此，共有120种排法。

〔例 2〕 10个人排成一排，问有几种不同的排法？

解 不同的排法一共有

$$P_{10}=10!=3628800\text{种}$$

（二）选排列

从 n 个不同的元素 A_1，A_2，…，A_n 中任取 m（$m\leqslant n$）个进行排列，称为选排列。

用 A_n^m 表示这样的排列种数。现在就来求 A_n^m。

同前面求 P_n 相类似，每个排列共有 m 个位置，第一个位置可以是 n 个不同元素中的任何一个，共有 n 种放法；第二个位置可以是剩下的 $n-1$ 个元素中的任何一个，有 $n-1$ 种放法；……；第 m 个位置可以是剩下的 $n-m+1$ 个元素中的任何一个，有 $n-m+1$ 种放法，因此，总共有

$$n\times(n-1)\times\cdots\times(n-m+1)$$

种排法，即

$$A_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

〔例 3〕 由 1 ～ 5 等 5 个数字中能组成多少个不同的三位数(每个数字在每个三位数中只用一次)？

解 这就是选排列的问题，故不同的三位数一共有

$$A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60\text{个}$$

〔例 4〕 由 0 ～ 9 等10个数字中能组成多少个不同的四位数(每个数字在每个四位数中只使用一次)？

解 由于四位数的第一个位置不能为 0 ，故第一个位置只能是 1 ～ 9 等 9 个数字中的任何一个，有 9 种选法；四位数字的后三个位置是剩下 9 个数字中任取 3 个的排列，共有A_9^3种选法，因此所求四位数的个数是

$$9A_9^3 = 9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$$

(三) 其它排列法

除了上面所讲的全排列和选排列以外，我们还会遇到其它的一些排列法，对这些排列法，我们用下面的例子来说明。

〔例 5〕 某农场为了试验 3 个不同小麦品种的收获量，需将每个品种安排在 2 种不同的土质上试种，试问需用多少块试验田？

解 显然，每个品种需要 2 块试验田，因此 3 个品种共需要 $2 \times 3 = 6$ 块试验田。

如果我们安排第一件事情有 m 种方法，安排第二件事情有 n 种方法，那么安排这两件事情一共有mn种方法。

一般地，如果有 k 件事情A_1，A_2，……，A_k，完成 A_1 的有n_1种方法，完成A_2的有n_2种方法，……，完成A_k的有n_k种方法，则依次完成这 k 件事情一共有$n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$种不同的方法。

〔例 6〕 问以277为首的 6 位电话号码，最多有多少个？

解 因为每一个电话号码的前三位数字已确定，所以从第四位起，每一位可以从 0 ～ 9 这10个数字中任选一个，每一位可以

有10种选法，故共有$10\times10\times10=1000$种选法，这就是说，以277为首的电话号码，最多有1000个。

§1.2 组　　合

在排列中，我们不仅考虑排列中的元素，而且注意到它的次序，换句话说，在排列中，尽管元素相同，但只要次序不同，就认为是不同的排列。然而，在实际中，有时只需要考虑参加排列的元素，而不管它们的次序，例如，从100件产品中，任取3件，问有几种取法？这类问题就是组合问题。

定义1.2　从n个不同的元素A_1，A_2，……，A_n中，任取m（$m\leqslant n$）个作成一组而不管它们的排列次序怎样，称每个组为一个组合。

从定义中可知，两个组合只要有相同的元素，不论次序如何，都认为是一样的。例如，$A_1A_2\cdots A_{m-1}A_m$与$A_mA_{m-1}\cdots A_2A_1$是同一个组合。

我们用C_n^m表示从n个元素中任取m个进行组合的数目。

从n个元素中取m个进行排列，可以看成是"先取m个元素进行组合"，"再对这m个元素进行全排列"这样两个步骤的合成．故这些排列的总数是$C_n^m\cdot m!$。另一方面，由前面可知，这些排列的总数是A_n^m，因此有

$$C_n^m\cdot m!=A_n^m$$

即

$$C_n^m=A_n^m/m!=n!/(m!(n-m)!)$$

我们还可以给组合以另一种解释：从n个不同元素中任取m个进行组合可看成是把n个元素分成两组，一组m（$m\leqslant n$）个，另一组$n-m$个，不同的分法共有$C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$种。

显然，从n个元素取m个进行组合和从n个中取$n-m$个进行组合，这两种组合的个数是一样的，即有

$$C_n^m=C_n^{n-m}$$

由上式，当$m=1$时，得$C_n^1=C_n^{n-1}=n$。而当$m=n$时，得

$$C_n^n=\frac{n!}{n!(n-n)!}=\frac{1}{0!}$$

但按实际情况，从n个元素取n个的组合，只能有一种，因而有$C_n^n=1$，这样，我们就规定$0!=1$。

〔**例 1**〕 有10个球队进行单循环比赛，问需安排几场比赛？

解 这是从10个球队中任选2个进行组合的问题，故有

$$C_{10}^2=\frac{10!}{2!(10-2)!}=\frac{10!}{2!8!}=45$$

即需安排45场比赛。

〔**例 2**〕 在一批含有95件好品，5件次品的产品中，任取10件，其中恰有2件次品，问有几种不同的取法？

解 取出的10件中的8件好品，必须是从95件好品中抽取，有C_{95}^8种方法；2件次品必须是从5件次品中抽取，有C_5^2种方法，因此总共有

$$C_{95}^8\cdot C_5^2=\frac{95!}{8!87!}\cdot\frac{5!}{2!3!}$$

种取法。

习 题 一

1．将8个人排成一队，问有几种不同的排法？

2．有男女学生各3人，将其排成一队，要求女生都排在一起，问有几种不同的排法？

3．将6个人分成2组，每组3人，能有多少种分法？ C_6^3

4．某班有学生20人，将其排成2队，每队10人，问有几种不同的排法？

C_{20}^2

5．袋中装有白球5个，黑球4个，从中任取2个，问有几种不同的取法？

6．某批产品有合格品100件，次品5件，从中任取2件，问有几种不同的取法？

7．从1，2，3，4，5等5个数字中，可以组成多少个不同的四位数（在每个四位数中的各个数字只能出现一次）？

8．从甲地到乙地有四条路径，从乙地到丙地有三条路径，问从甲地经乙地到丙地一共有多少条不同的路径？

9．将6个男孩和4个女孩分成两组，每组有3个男孩和2个女孩，问有多少种分法？

10．某篮球队有10名队员，其中只有2人能打中锋，4人能打左右锋，4人能打后卫，问能组成多少种不同的阵容？

11．人民币的七种纸币（每种一张）能组成多少种不同的金额？

12．在八边形中有多少条对角线？

第二章　事件和概率

§2.1　基 本 概 念

（一）必然事件和不可能事件

在自然界里，有一些现象，我们完全可以预先知道在一定的条件下必然会发生，如大家都很熟知的事实：

1．在标准大气压下，水加热到100℃时必然会沸腾。

2．在没有外力作用下，作等速直线运动的物体必然继续作等速直线运动。

3．在常温下，木头不能自燃。

4．从手上抛出的石块，必定要落到地上。

上述例子可以陈述为这样一种形式："在某一组条件S实现之下，某一事件A必然发生。"这种在一定条件下，必然发生的现象，我们称它为**必然事件**。

反之，在一定条件下，必然不发生的现象，称为**不可能事件**。例如："在标准大气压下，水加热到100℃不会沸腾"，"人能长生不死"，这类现象肯定是不会发生的。

必然事件的反面就是不可能事件。我们用Ω来表示必然事件，ϕ表示不可能事件。

（二）随机事件

在生产斗争和科学实验中，除了遇到上面所说的必然事件和不可能事件以外，还常常遇到与必然事件和不可能事件本质不同的另一类现象，这些现象在某一组条件S实现之下，可能发生，也可能不发生，例如：

1．投掷一枚匀称的硬币，出现正面。

2．在一分钟内，一个电话总机至少接到10次呼唤。

3．明年的五月一日，天晴。

4．在一批杂有次品的产品中，任意抽取一件，恰好是次品。

上述的各个事件："出现正面"，"至少接到10次呼唤"，"天晴"，"恰好是次品"等等在一定条件下都不是必然事件或不可能事件。显然，投掷匀称的硬币，可能会出现反面，一个电话总机在一分钟内也可能是接到少于10次的呼唤，明年的五月一日有可能是下雨或者阴天，随意抽取一个产品可能是正品。

这种在一定条件下，可能发生，也可能不发生的事件，称为**随机事件**，简称**事件**。今后用字母A，B，…，等表示事件。

（三）随机试验

为了探索随机现象的规律性，常常需要对随机现象进行观察，这种观察总是在一定的条件下进行的，我们把每次观察看做是一个试验，观察的结果就是试验结果。对于某些事件来说，在同一组条件实现下，多次进行试验，必然得到同一的结果，例如："在标准大气压下，水加热到100℃"这组条件实现之下，不管谁来做试验，每次试验都能得到同一的结果："水沸腾了"。但是对于另外一些试验，尽管条件一样，其结果却不会都一样，如投掷一枚匀称的硬币，它究竟出现正面还是反面，我们就不能肯定的回答了，它可能出现正面，也可能出现反面。如果试验可以在相同条件下重复进行，且试验的所有可能结果（如掷硬币得正面或反面是两个可能的试验结果）能预先知道，但对于每次试验来说，究竟出现哪个结果是不能预先知道的，我们将称这个试验是一个**随机试验**，简称**试验**。

用E表示一随机试验，以ω表示试验的一个可能结果，称ω为E的一个**基本事件**。用Ω表示基本事件的全体，并记为$\Omega=(\omega)$。

一般地说，基本事件的全体Ω可以是由有限个基本事件所组

成，也可以是无限多个基本事件所组成，甚至是某范围内的全体实数所组成。例如：

1．E——掷一枚匀称的硬币而观察所出现的面。用ω_1表示正面，ω_2表示反面，于是Ω由两个基本事件ω_1和ω_2所组成，即$\Omega=(\omega_1,\ \omega_2)$。

2．E——计算某电话总机在一天内所接到呼唤的次数。用ω_i表示一天内接到i次呼唤，则$\Omega=(\omega_0,\omega_1,\omega_2,\cdots)$。

3．E——测量某零件的直径尺寸。用a表示零件直径尺寸可能值的下限，b表示可能值的上限，则$\Omega=([a,b])$。

（四）事件间的关系及其运算

在某些问题的研究中，我们常常不只研究一个事件，而是研究好些事件，而且这些事件之间又有着一定的联系。

例如在一批包含有正品、次品的产品中，任意抽取三个，则下列都是事件：

A_1(至少有一个次品)，A_2(恰有一个次品)，A_3(至少两个次品)，A_4(三个都是次品)，A_5(至多一个次品)，A_6(没有次品)，A_7(至少有一个正品)等等。

上述事件之间有着一定的联系，如A_1发生，则A_6不会发生；A_6发生，则A_1就不会发生；A_4和A_7不会同时发生；A_2如果发生，则A_1也必定发生；当且仅当A_2和A_3至少一个发生时，则A_1发生；当且仅当A_1和A_5都发生时，则A_2发生，等等。

下面引进事件间的几种主要关系及对事件的运算。

1．如果事件A发生，必然导致事件B的发生，则称**事件A包含于事件B**，记作$A\subset B$（或$B\supset A$），如上面例中的事件“恰有一个次品”就包含于事件“至少有一个次品”，即$A_2\subset A_1$。

如果$A\subset B$和$B\subset A$同时成立，就说**事件A与事件B相等**，记作$A=B$。

2．设A、B是两个事件，“事件A与B至少有一个发生”也是一个事件，我们称这个事件为事件A与B的和，记做$A+B$。上

面例中的事件 A_1 就是事件 A_2 与 A_3 的和，即 $A_1=A_2+A_3$。

一般地，事件 A_1，A_2，……，A_n，……中至少有一个发生的事件，称为事件 A_1，A_2，……，A_n，……的和，记作 $A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots$。

3. "事件 A 发生而事件 B 不发生"这一事件，称为**事件A与B的差**，记作 $A-B$。上面例中的事件 A_2 便是事件 A_1 与 A_3 的差，即 $A_2=A_1-A_3$。

4. 由事件 A 与 B 同时发生而构成的事件，称为**事件 A 与 B 的积**（或称为交），记做 AB。如上面例中的事件 A_1 与 A_5 的积便是 A_2，即 $A_2=A_1A_5$。

类似地，可以定义一系列事件 A_1，A_2，……，A_n，……的积，记作 $A_1A_2\cdots A_n\cdots$。

5. 如果事件 A 与事件 B 不能同时发生，就称 A 与 B 是**互不相容的事件**（也叫**互斥事件**）。上面例中的 A_4 和 A_7 便是互不相容事件。

如果二事件 A 与 B 满足关系式 $AB=\phi$，就说 A 与 B 是互不相容事件，这与上面的说法是完全一致的。

6. 如果事件 A 与 B 同时满足关系式：$A+B=\Omega$，$AB=\phi$（即 A，B 中必发生其一，但 A 与 B 不能同时发生），这时称 B 是 A 的**逆事件**（也称**对立事件**），记做 $B=\overline{A}$。也称 A 是 B 的逆事

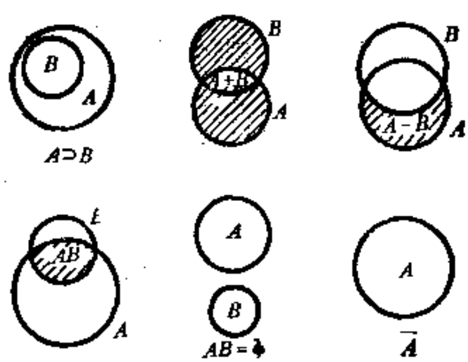

图2-1　事件间的关系

件。上面例中的事件 ~~A_6 便是事件 A_1 的逆事件，~~即 $A_6=\bar{A}_1$。

我们用图 2-1 来表示事件~~间的关系。~~

§2.2 概率的古典定义

随机事件是一类既可能发生又可能不发生的现象，一个随机事件发生的可能性的大小，是随机事件本身所固有的属性，这个属性并不依人们的主观意志而改变。随机事件发生的可能性的大小，可以根据人们的实践而得到认识，当人们多次做某一随机试验时，常常会发现某些事件发生的可能性要大些，而另外一些事件发生的可能性要小些，如射击10次中靶就比射击 2 次中靶的可能性大得多，又如投掷一枚匀称的硬币，出现正面的可能性与出现反面的可能性大体相同。很自然地，人们想用一个数 p 来作为衡量事件发生的可能性大小的尺度，随机事件 A 发生的可能性较大，就用较大的数，发生的可能性较小，就用较小的数，这个数我们就称它为随机事件 A 发生的概率，记作 $P(A)$，即 $P(A)=p$。

对于已给随机事件 A，怎样来确定 $P(A)$ 的值呢？

我们以投掷一枚匀称的硬币作试验，来确定它出现正面（或反面）的概率。表 2-1 是投掷一枚匀称硬币的试验结果。

表2-1 投掷一枚硬币的试验结果

投掷次数 n	出现正面的次数 m	出现正面的频率 $\frac{m}{n}$
4040	2048	0.5069
12000	6019	0.5016
24000	12012	0.5005

从表 2-1 中可以看出，投掷一枚匀称的硬币，出现正面（或反面）的频率随着投掷次数的增加，而变得非常稳定并接近于 1/2。这是不难想象的，因为硬币是匀称的，在投掷多次以后可以期望出现正面的次数同出现反面的次数应当大致一样，也即出现

正反面的频率大致相等，所以，我们将用表 2-1 中的频率作为所投硬币出现正面的概率的近似值，并认为 p 近似地等于 1/2。

定义2.1 设有一个试验，有且只有 n 种等可能结果发生，此时 $\Omega=(\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_n)$，而 A 是由 Ω 中的 m（$m\leqslant n$）个不同的基本事件所组成，则称

$$P(A)=\frac{m}{n} \tag{2.2.1}$$

为**事件A发生的概率**。也就是说，事件 A 的概率为 A 中包含的基本事件数与总的基本事件数的比，这样的定义，称为概率的古典定义。

不可能事件 ϕ 的概率定义为 $P(\phi)=0$。

由概率的定义 2.1 可得下列结果：

1. 对任意事件 A，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；
2. $P(\Omega)=1$；
3. 设 A_1，A_2，……，$A_m(m\leqslant n)$为互不相容事件，则

$$P\left(\sum_{i=1}^{m} A_i\right)=\sum_{i=1}^{m} P(A_i) \tag{2.2.2}$$

证 1. 由定义显然成立，因为包含在 A 中的基本事件数 $m\leqslant n$，故 $0\leqslant P(A)=\dfrac{m}{n}\leqslant 1$。

2. 因为 Ω 所包含的基本事件数就是总的基本事件数，所以 $P(\Omega)=\dfrac{n}{n}=1$。

3. 设 $A_i=(\omega_1^{(i)},\ \omega_2^{(i)},\ \cdots,\ \omega_{k_i}^{(i)})$ 含 $k_i(k_i\leqslant n)$ 个基本事件，并由定义有 $P(A_i)=\dfrac{k_i}{n}$。

又因为 $\sum_{i=1}^{m} A_i=(\omega_1^{(1)},\ \cdots,\ \omega_{k_1}^{(1)},\ \omega_1^{(2)},\ \cdots,\omega_{k_2}^{(2)},\cdots,\omega_1^{(m)},$

$\cdots$，$\omega_{i_m}^{(m)}$）共含有 $\sum_{i=1}^{m} k_i$ 个基本事件，且由于 A_1，$\cdots$，A_m 互不相容，因此，这些基本事件是互不相同的，故有

$$P\left(\sum_{i=1}^{m} A_i\right)=\left(\sum_{i=1}^{m} k_i\right)\Big/ n=\sum_{i=1}^{m}\frac{k_i}{n}=\sum_{i=1}^{m} P(A_i)$$

性质 3 称为**概率的可加性**。

§2.3 古典概率的计算

在这一节里，我们将举出几个例子来说明如何按概率的古典定义去计算事件 A 的概率。

〔例 1〕 号码锁上有 6 个拨盘，每个拨盘上有 0～9 共10个数字，当这 6 个拨盘上的数字组成某一个 6 位数时（第一位可以是 0），锁才能打开。如果不知道锁的号码，一次就把锁打开的概率是多少？

解 在这个号码锁上，可以有10^6个等可能的 6 位数字，这就是总的基本事件数。当不知开锁号码时，在一次开锁中，拨出任一个 6 位数字都是等可能的。用A表示"一次就把锁打开"这个事件，显然，A只包含一个基本事件（因开锁号码只有一个），按概率定义得

$$P(A)=\frac{m}{n}=1/10^6$$

这个数字是很小的，因此在不知开锁号码的情况下，一次就把锁打开几乎是不可能的。

当某一事件的概率接近于 0 时，这样的事件称为**小概率事件**。小概率事件虽然不是不可能事件，但在一次试验中发生的可能性很小，因而通常可以认为，在一次试验中，小概率的事件不会发生。

〔例 2〕 袋中有 5 个白球，3 个黑球，从中任取一个，求它

是白球的概率？

解 袋中共有8个球，每个球被抽到的可能性是一样的。总的基本事件数是8。设A表示“抽到一球是白球”的事件，它包含的基本事件数是5，按定义，所求概率为

$$P(A)=\frac{5}{8}$$

〔**例3**〕 将数1，2，…，n按任意次序排列，试求数列中按1、2为序相继出现的概率。

解 n个数按任意次序排列一共有$n!$种排法。

以A表示“数列中按1、2为序相继出现”这一事件。1、2为序相继出现，可看作一个数。这样，A包含的基本事件数是$(n-1)!$。因此所求概率为

$$P(A)=(n-1)!/n!=\frac{1}{n}$$

〔**例4**〕 一批产品共有100件，其中有5件次品，从中任取10件，求所取10件中至多有2件是次品的概率？

解 一批产品共有100件，从中取出10件，一共有C_{100}^{10}种取法。

以A表示“所取10件中至多有2件是次品”的事件，则A所包含的基本事件数为

$$C_{95}^{10}+C_{95}^{9}C_5^1+C_{95}^{8}C_5^2$$

其中C_{95}^{10}，$C_{95}^{9}C_5^1$，$C_{95}^{8}C_5^2$分别为“10件中没有次品”，“10件中恰有1件次品”和“10件中恰有2件次品”的基本事件数。

于是所求概率为

$$P(A)=(C_{95}^{10}+C_{95}^{9}C_5^1+C_{95}^{8}C_5^2)/C_{100}^{10}$$

$$\frac{C_{95}^{10}+C_{95}^{9}C_5^1+C_{95}^{8}C_5^2}{C_{100}^{10}}$$

$$=\left(\frac{95!}{10!85!}+\frac{95!}{9!86!}\cdot\frac{5!}{4!}+\frac{95!}{8!87!}\cdot\frac{5!}{2!3!}\right)\Big/\frac{100!}{10!90!}\approx 0.99$$