

高等数学辅导

上册

(第二版)

盛祥耀 葛严麟 编
胡金德 张元德

内 容 简 介

本书基本上是根据全国工科院校高等数学教学大纲的要求编写的,也是编者多年来在清华大学教学、辅导工作的结晶。

全书分上、下两册,上册共六章,包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分,是工科大学生、电大和职工大学学员、自学高等数学者学习高等数学时的辅导教材,也可供从事工科高等数学教学的教师、非数学专业的研究生及中学数学教师参考。

(京)新登字 158 号

高 等 数 学 辅 导

上 册

(第二版)

盛祥耀 葛严麟 编
胡金德 张元德

☆

清华大学出版社出版

北京 清华园

北京密云红光照排厂排版

通县宏飞印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行

☆

开本: 787×1092 1/32 印张: 14.75 字数: 356 千字

1993 年 8 月第 2 版 1993 年 8 月第 1 次印刷

印数: 00001—20000

ISBN 7-302-01277-6/O · 141

定价: 6.70 元

序

目前社会上有不少青年在自学或通过电视学习工科类的高等数学,他们希望得到老师的辅导,编写本书的目的就是想在这方面提供一些我们力所能及的帮助.同时也考虑到了在校学习的工科类大学生的情况,希望对他们也能提供一些辅导.

本书是通过例题的分析、讲解、提问、小结等方式提供辅导的.例题的选择基本上符合全国工科院校高等数学课程教学的基本要求,因此,不管读者使用什么样的工科类教材,都能使用此书.

本书共分十二章:函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、空间解析几何及矢量代数、多元函数及其微分法、重积分、曲线积分与曲面积分、级数、微分方程等.全书共收集了500道左右的例题,850道左右的习题.例题中有基本概念讨论题;有似是而非的提问题;有初学者易在计算中出现的错误或不易理解的澄清题;有介绍基本方法、思路的计算或证明题;有一题多解的开扩思路题;也有较灵活的综合题.不少例题在讲解前作了如何思考或如何下手的分析,在讲解完后有些还提出新问题,帮助读者进一步掌握和理解.这些例题的绝大部分都在编者所在的单位清华大学教学上使用过,其中不少例题还是我们多年来经常使用的.

读者在使用本书时,我们建议先看一下每一节的内容提要及例题分析的题目,自己想一想,动手算一算,然后再去看例题分析,这样帮助会大些.为了使读者有指导地做习题,在每章的

最后附有习题(有 * 号题可暂时略去不看或不做),这些题会做了,教学基本要求所规定的内容就达到了。

编写本书时,我们参考了下列教材:清华大学高等数学教研组编写的“高等数学(基础部分)”和习题集(未出版),同济大学数学教研组编的“高等数学习题集”,别尔曼著,景毅等译的“数学解析习题汇编”,吉米多维奇著,李英冻译的“数学分析习题集”,在此特向有关人员表示感谢。

编者力图使本书能反映清华大学高等数学教研组近 40 年来辅导工作中的经验.但由于我们水平较低,反映肯定是不充分的.如果有机会我们还要不断完善。

本书的缺点和错误,恳请读者指正。

编 者

第 二 版 序

大约在十年前,我们编写了这本《高等数学辅导》,它的主要对象原想是社会上自学或通过电视学习工科类高等数学的青年.但事实上,不少学校的本科生(包括重点大学的),从事工科院校数学教学的教师,甚至报考硕士研究生的读者也都在使用这本书,受到不同层次读者的欢迎,使我们非常高兴.

自第一版发行后,我们不断收到读者的来信,表示关心和支持,对此我们表示深切的感谢.根据读者的使用情况,我们对第二版作了以下的修改:适当调整了一些例题和习题,但保持全书原有的特色;增加了自我检查题,帮助读者自测自己的程度和水平;为了不使篇幅增加,删去了原来例题栏目,仍保留了例题分析等.

我们相信“高等数学辅导”第二版将会更加受到不同层次读者的欢迎,也希望读者继续给我们支持和关心.

编 者

1992年10月于清华园

目 录

第一章 函数	(1)
§ 1 预备知识	(1)
§ 2 函数概念、定义域、函数符号	(6)
§ 3 偶函数、奇函数、周期函数.....	(18)
§ 4 建立函数关系:.....	(24)
§ 5 作函数的图形.....	(28)
§ 6 习题与答案.....	(37)
第二章 极限与连续	(45)
§ 1 极限概念.....	(45)
§ 2 极限运算法则.....	(60)
§ 3 极限存在准则,两个重要极限.....	(71)
§ 4 无穷小量的比较.....	(82)
§ 5 连续函数.....	(91)
§ 6 习题与答案	(102)
第三章 导数与微分	(109)
§ 1 导数概念及其几何意义	(109)
§ 2 导数计算	(120)
§ 3 微分概念、性质及其在近似计算中的应用.....	(146)
§ 4 高阶导数	(157)
§ 5 习题与答案	(169)
第四章 导数的应用	(191)
§ 1 几个基本定理	(191)

§ 2	求未定型的极限	(204)
§ 3	台劳公式	(215)
§ 4	函数的研究及函数作图	(233)
§ 5	习题与答案	(259)
第五章	不定积分	(276)
§ 1	简单的不定积分计算	(276)
§ 2	变量代换法与分部积分法	(298)
§ 3	有理函数积分法	(318)
§ 4	三角函数的有理式的积分	(327)
§ 5	简单无理函数的积分	(334)
§ 6	习题与答案	(343)
第六章	定积分	(355)
§ 1	定积分概念与性质	(355)
§ 2	定积分计算	(369)
§ 3	定积分应用	(390)
§ 4	旁义积分	(424)
§ 5	习题与答案	(435)
自我检查题(一)		(445)
自我检查题(二)		(456)

第一章 函 数

§ 1 预 备 知 识

(一) 内容提要

1. 区间及其各种表示法

满足不等式 $a < x < b$ 的一切实数 x 的全体叫做开区间, 记作 (a, b) .

满足不等式 $a \leq x \leq b$ 的一切实数 x 的全体叫做闭区间, 记作 $[a, b]$

满足不等式 $a \leq x < b$ 或 $a < x \leq b$ 的一切实数 x 的全体叫做半开区间, 记作 $[a, b)$, 或 $(a, b]$.

记号 $(-\infty, +\infty)$ 表示全体实数, 可写为 $-\infty < x < +\infty$.

记号 $(a, +\infty)$ 表示大于 a 的全体实数, 可写为

$$a < x < +\infty;$$

同样可以规定 $(-\infty, a)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, a]$ 等记号的含义.

满足不等式 $|x-a| < l$ 的一切实数 x 的全体叫点 a 的 l 邻域.

2. 绝对值及其性质

1° 绝对值定义

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{当 } x \geq 0 \text{ 时,} \\ -x, & \text{当 } x < 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

2° 绝对值的四则运算

$$|a+b| \leq |a| + |b|,$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|,$$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

3° 若 $|x| < \varepsilon$, 则 $-\varepsilon < x < \varepsilon$, 反之也对.

(二) 例题分析

1.1 将带有绝对值的不等式 $|2x-3| < 1$ 化为不带绝对值的不等式, 并用图形表示之.

解 根据绝对值不等式性质 3°, 由

$$|2x-3| < 1,$$

有

$$-1 < 2x-3 < 1,$$

即

$$2 < 2x < 4,$$

所以不带绝对值的不等式为

$$1 < x < 2.$$

它的图形表示是在数轴上 $x=1$ 与 $x=2$ 两点之间的一线段, 但不包括 $x=1$ 和 $x=2$ 两个端点(不包括的点用圆圈表示). 见图 1-1.

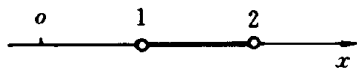


图 1-1

1.2 将不等式 $-10 < x < 5$ 化为带有绝对值的不等式, 即表成 $|x-x_0| < \frac{l}{2}$ 的形式.

分析 先找出区间 $(-10, 5)$ 的中点, 再求出区间长度的一半, 即可化为带有绝对值的不等式.

解 设区间中点为 x_0 , 区间长度为 l , 则

$$x_0 = \frac{5 + (-10)}{2} = -\frac{5}{2},$$

$$\frac{l}{2} = \frac{5 - (-10)}{2} = \frac{15}{2}.$$

所以带绝对值的不等式为

$$\left| x + \frac{5}{2} \right| < \frac{15}{2}.$$

它叫点 x_0 的 $l/2$ 邻域, 其中 $x_0 = -5/2, l = 15$, 见图 1-2.

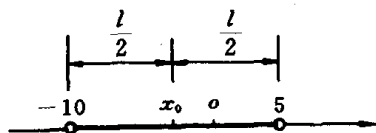


图 1-2

1.3 解下列不等式:

1° $x^2 + 2x - 3 \geq 0$; 2° $|2x - 1| + |x + 1| \leq 12$;

3° $|x^2 - 4| \leq 1$.

解 1° 方法一: 将原式左边因式分解后可化为

$$(x + 3)(x - 1) \geq 0,$$

这个不等式相当于下列两个不等式组

$$\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x + 3 \leq 0 \\ x - 1 \leq 0. \end{cases}$$

它们的解分别是 $x \geq 1$ 和 $x \leq -3$, 所以原不等式的解为

$$(-\infty, -3] \cup [1, +\infty).$$

方法二: 分析 将不等式左边因式分解后, 可以看出, 只有当变量 x 通过 $x = 1$ 和 $x = -3$ 时, 不等式的左边才会改变正负号, 其它的点均不会改变其正负号, 因此我们只要讨论在三个区

间 $(-\infty, -3]$, $[-3, 1]$, $[1, +\infty)$ 上上述不等式是否成立就行了.

$$\text{令 } f(x) = (x+3)(x-1).$$

当 $-\infty < x \leq -3$ 时, 因 $(x+3) \leq 0$, $(x-1) < 0$, 所以 $f(x) \geq 0$; 当 $-3 \leq x \leq 1$ 时, 因 $(x+3) \geq 0$, $(x-1) \leq 0$, 所以 $f(x) \leq 0$, 当 $1 \leq x < +\infty$ 时, 因 $(x+3) > 0$, $(x-1) \geq 0$, 所以 $f(x) \geq 0$, 综合上述, 原不等式的解为

$$(-\infty, -3] \cup [1, +\infty),$$

上述讨论也可用表格列出

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$f(x)$		+	0 -	0 +

它简单明了,

这个方法要点是: (1) 将不等式右端化为 0 的同时左端因式分解; (2) 找出各个因子的零值点, 这些零值点把数轴分成若干个区间; (3) 逐个地讨论在这些区间上不等式左端表达式的正负号, 如果遇到因式较多时, 这种方法特别有效.

2° 分析 先要去掉绝对值. 由于 $x = -1$ 的两侧 $(x+1)$ 会变号, 在 $x = \frac{1}{2}$ 的两侧 $(2x-1)$ 会变号, 所以应该分三个区间:

$(-\infty, -1]$, $[-1, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, +\infty)$ 分别来讨论.

(1) 设 $-\infty < x \leq -1$, 则所给的不等式可化为

$$-2x + 1 - x - 1 \leq 12,$$

即

$$x \geq -4$$

所以在 $(-\infty, -1]$ 上的解为 $-4 \leq x \leq -1$.

(2) 设 $-1 \leq x \leq \frac{1}{2}$, 则所给的不等式可化为

$$-2x + 1 + x + 1 \leq 12,$$

即

$$x \geq -10.$$

所以在 $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$ 上的解为 $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$.

(3) 设 $\frac{1}{2} \leq x < +\infty$, 则所给的不等式可化为

$$2x - 1 + x + 1 \leq 12,$$

即

$$x \leq 4.$$

所以在 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上的解为 $\frac{1}{2} \leq x \leq 4$.

综合上述讨论, 原不等式的解为

$$-4 \leq x \leq 4.$$

小结 解含有绝对值的不等式时, 通常应找出每个绝对值式子的零值点, 这些零值点把所考虑的范围分成了若干个区间, 然后分别讨论这些区间上不等式的解, 就可解得不等式.

3° 分析 找出绝对值式子的零值点 $x = \pm 2$, 由于在 $x = \pm 2$ 的两侧 ($x^2 - 4$) 变号, 所以应分三个区间 $(-\infty, -2]$, $[-2, 2]$, $[2, +\infty)$ 分别讨论:

(1) 设 $-\infty < x \leq -2$, 则所给的不等式可化为

$$x^2 - 4 \leq 1,$$

即

$$(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) \leq 0,$$

解得

$$-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5},$$

所以在 $(-\infty, -2]$ 上的解为

$$-\sqrt{5} \leq x \leq -2.$$

(2) 设 $-2 \leq x \leq 2$, 则所给的不等式可化为

即 $-x^2 + 4 \leq 1$,
 $(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x) \leq 0$,
 解得 $(-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty)$,
 所以在 $[-2, 2]$ 上的解为

$$[-2, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 2].$$

(3) 类似(1)的讨论, 在 $[2, +\infty)$ 上的解为

$$2 \leq x \leq \sqrt{5}.$$

综合上述讨论, 原不等式的解为

$$[-\sqrt{5}, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \sqrt{5}].$$

这里我们要提醒大家, 解不等式 $-3 + x^2 \leq 0$ 时, 下述的做法是错误的:

$$\begin{aligned} & x^2 - 3 \leq 0, \\ \text{即} & x^2 \leq 3. \\ \text{解得} & x \leq \pm \sqrt{3}. \end{aligned}$$

请读者指出错在哪里?

§ 2 函数概念、定义域、函数符号

(一) 内容提要

1. 函数定义

设有两个变量 x 和 y , 如果对于 x 所考虑范围内的每一个值, y 按一定规则对应着一个确定的值, 则称 y 是 x 的函数, 记作 $y = f(x)$.

x 称为自变量, y 称为因变量.

2. 定义域

对于自变量 x 变化范围内的每一个值 x_0 , 函数 y 有一个确

定的值 y_0 与之对应, 我们称函数在点 x_0 处是有定义的, 使函数有定义的点的全体 (也就是 x 变化范围) 称为函数的定义域.

3. 反函数定义

设函数 $y = f(x)$, 当变量 x 在一个区域 $\mathcal{X}$ 内变化时, 变量 y 在区域 $\mathcal{Y}$ 内变化, 如果对于变量 y 在区域 $\mathcal{Y}$ 内任取一个值 y_0 , 变量 x 在区域 $\mathcal{X}$ 内有 x_0 , 使 $y_0 = f(x_0)$, 则变量 x 是变量 y 的函数, 用 $x = \varphi(y)$ 表示, 函数 $x = \varphi(y)$ 称为函数 $y = f(x)$ 的反函数.

(二) 例题分析

1.4 问 x^2 是不是 x 的函数?

答 有人说如果写为 $y = x^2$, y 是 x 的函数, 而 x^2 中没有变量 y , 所以它不是 x 的函数, 这样认识是不正确的. 事实上, 这里也有两个变量, 一个是 x , 另一个是 x^2 , 对于变量 x 所考虑的每一个值, 变量 x^2 就有一个确定值与之对应. 这是符合函数的定义的, 所以 x^2 是 x 的函数. 这里 x^2 扮演了 y 的角色, 只不过没有写为 $y = x^2$ 罢了.

1.5 在函数的公式表示法中, 一个函数是否只能是一个式子表示?

答 不. 由于有些函数关系复杂, 我们需要用多个式子来表示它. 例如在考察 1 克冰由 -10°C 上升到 10°C 的水的过程中, 我们研究它所吸收的热量 Q 与其温度 T 之间的关系时, 就需要用多个式子表示. 事实上, 由于冰的热容量为 0.5, 水的热容量为 1, 1 克 0°C 的冰变为 0°C 的水的溶解热为 80 卡, 因此 Q 与 T 的关系为

$$Q = \begin{cases} 0.5(T + 10), & \text{当 } -10 \leq T < 0 \\ T + 85, & \text{当 } 0 < T \leq 10. \end{cases}$$

这个函数是由两个式子表示的,它的对应规则是这样的:

当 T 在 $[-10, 0)$ 上变化时, Q 由式子 $0.5(T+10)$ 确定;

当 T 在 $(0, 10]$ 上变化时 Q 由式子 $T+85$ 确定.

这个例子告诉我们,有些函数的关系较为复杂需要用多个式子表示,此刻你不能理解为是多个函数,而应该理解为由多个式子表示的一个函数.

1.6 若变量 x 与 y 不能用公式表示其相互间的关系时,能否说 x 与 y 不存在函数关系?

答 不能这样讲,函数的表示法有三种:公式表示法;图形表示法;表格表示法,公式表示法只是其中一种,当函数关系不能用公式表示时,还可以用其它形式来表示,所以当变量 x 与 y 之间不能用公式表示时,就不能讲不存在函数关系.例如用自动记录仪记录了一天中气温 T 与时间 t 的关系的曲线,它表示了 T 与 t 的函数关系,但它很难用公式表示.

1.7 x 与 y 之间的一个方程是否总能确定 y 与 x 之间存在函数关系?

答 不.例如方程 $x^2+y^2+1=0$,在我们所考虑的实数范围内 x 与 y 就不存在函数关系,这是因为对于任何 x 值(或 y 值)在实数范围内没有一个 y 值(或 x 值)能使 $x^2+y^2+1=0$.

经过 1.4, 1.5, 1.6, 1.7 四个问题的讨论,我们可以明确以下几点:

(1) 一个函数可以由几个式子来表示,不要把多个式子表示的一个函数,理解为多个函数.

(2) 函数的表示法有三种,公式表示法只是其中的一种.特别要注意,不要把由图形或表格表示的函数关系说成不是函数关系.

(3) x 与 y 之间的一个方程不是总能确定 x 与 y 之间是函

数关系.

1.8 函数 $f(x)$ 满足什么条件时, 下列式子才有意义?

$$1^\circ y = \frac{1}{f(x)}; \quad 2^\circ y = \sqrt[n]{f(x)}, n \text{ 为偶数};$$

$$3^\circ y = \log_a f(x) \quad (a > 0, \text{ 且 } a \neq 1);$$

$$4^\circ y = \arcsin f(x).$$

$$\text{解 } 1^\circ f(x) \neq 0, \quad 2^\circ f(x) \geq 0, \quad 3^\circ f(x) > 0,$$

$$4^\circ |f(x)| \leq 1.$$

以上情形是求函数定义域的基础.

1.9 求下列函数的定义域:

$$1^\circ y = \arcsin \frac{2-5x}{3}; \quad 2^\circ y = -\frac{1}{\lg \frac{5x-x^2}{4}};$$

$$3^\circ y = \sqrt{25-x^2} + \lg \sin x.$$

解 1° 根据 1.8 中 4° , 知

$$-1 \leq \frac{2-5x}{3} \leq 1,$$

解此不等式, 得

$$-\frac{1}{5} \leq x \leq 1,$$

所以此函数的定义域为 $\left[-\frac{1}{5}, 1\right]$.

2° 由对数函数的定义域知

$$\frac{5x-x^2}{4} > 0,$$

解得: $0 < x < 5$.

又知分母不能为 0, 得

$$\lg \frac{5x-x^2}{4} \neq 0,$$

即
$$\frac{5x-x^2}{4} \neq 1,$$

即
$$x \neq 1 \quad x \neq 4,$$

所以此函数的定义域为

$$0 < x < 5, x \neq 1, x \neq 4.$$

3° 当 $\sqrt{25-x^2}$ 与 $\lg \sin x$ 同时有定义时, 函数才有定义, 而这要求满足下列不等式组,

$$\begin{cases} 25-x^2 \geq 0, \\ \sin x > 0. \end{cases}$$

由第一个不等式解得 $-5 \leq x \leq 5$, 由第二个不等式解得 $2n\pi < x < (2n+1)\pi (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

这两组解的公共部分就是上述不等式组的解(见图 1-3). 因此函数的定义域为

$$[-5, -\pi) \cup (0, \pi).$$

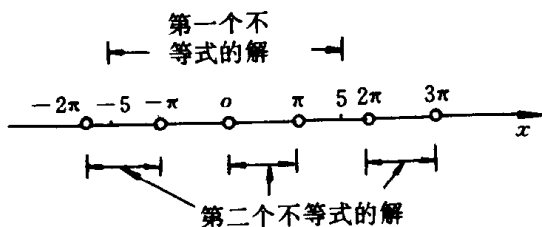


图 1-3

1.10 问函数 $\lg(x^2)$ 与函数 $2\lg x$ 相同吗?

答 有人说因为 $\lg(x^2) = 2\lg x$, 所以这两个函数是相同的, 这样的分析是不全面的. 当我们说两下函数相同时, 首先要求它们有相同的定义域, 然后要求对应规则相同. 现在 $\lg(x^2)$ 的定义域是除了 $x=0$ 外的任何实数, 而 $2\lg x$ 的定义域是 $x > 0$, 它们