21世纪高等院校数学基础课系列教材

Gaodeng Jihe

高等几何

车明刚 程晓亮 付 军 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

高等几何

车明刚　程晓亮　付　军　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等几何/车明刚,程晓亮,付军编著. —北京:北京大学出版社,2012.8
(21世纪高等院校数学基础课系列教材)
ISBN 978-7-301-18729-6

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①车… ②程… ③付… Ⅲ. ①高等几何—高等学校—教材 Ⅳ. ①O18

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第189794号

书　　名:高等几何
著作责任者:车明刚　程晓亮　付　军　编著
责 任 编 辑:曾琬婷
标 准 书 号:ISBN 978-7-301-18729-6/O·0881
出 版 发 行:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区成府路205号　100871
网　　址:http://www.pup.cn　电子信箱:zpup@pup.pku.edu.cn
电　　话:邮购部62752015　发行部62750672　理科编辑部62767347　出版部62754962
印 刷 者:北京大学印刷厂
经 销 者:新华书店
787mm×980mm　16开本　14.75印张　305千字
2012年8月第1版　2012年8月第1次印刷
印　　数:0001—3000册
定　　价:28.00元

内容简介

本书是按照高等院校《高等几何教学大纲》的要求，同时结合作者多年来开设高等几何课程的教学实践，以及对高等几何面向 21 世纪的课程体系和教学内容的深入研究编写而成的．全书共分五章：前四章是根据克莱因的变换群观点，以射影变换为基本线索，介绍一维和二维射影几何的基本内容和射影观点下的仿射几何与欧氏几何理论，其中重点讨论二次曲线的射影、仿射和度量理论，以明确各几何学的关系，使读者可以从较高的观点认识初等几何；第五章为选学内容，介绍平面射影几何基础和非欧几何的初步知识．本书每节配有适量的习题，每章还配有总习题，书末附有习题答案与提示，以便于教师教学与学生自学．为了激发学生学习射影几何的兴趣，书末添加了一个附录，简要介绍射影几何的发展史．

本书可作为高等院校数学专业高等几何课程的教材，还可供中学几何教师作为教学参考书．

前　　言

高等几何是高等院校数学专业的基础课程之一，是在学生已学习初等几何、解析几何和高等代数的基础上，系统地研究射影几何，主要是在克莱因的变换群观点下研究几何对象的射影性质、仿射性质和度量性质.其目的是使学生认识射影空间的基本特征和研究方法，了解射影空间与仿射空间、欧氏空间的内在联系，明确射影几何与仿射几何、欧氏几何的关系，从而更深入地理解和掌握初等几何、解析几何和高等代数的知识，为进一步学习现代数学作准备，同时也为学生将来从事初等几何的教学作理论上的准备.

本书的主要内容共分五章进行编写：第一、二章介绍一维和二维射影几何的基本知识，这是射影几何的基础内容.第三章是从配极变换入手，给出二次曲线的概念，进而讨论二次曲线的射影理论.第四章是从射影观点讨论仿射几何和欧氏几何，从而明确这三种几何学的关系.其中重点讨论二次曲线的仿射性质和度量性质.第五章介绍平面射影几何的公理体系和非欧几何的初步知识，以明确各种非欧几何都可纳入射影几何范畴.这部分内容可根据实际教学课时的情况适当作删减，对本课程体系知识的完整性影响不大.附录部分简要介绍了射影几何的发展史，目的是使学生了解射影几何知识的发展脉络，以及具体知识内容的发展过程，激发学生学习射影几何的兴趣.

在编写本书时力图做到以下几点：

1. 根据克莱因的变换群观点，以射影变换为基本线索，把射影几何的基本内容连缀起来，并使系统严谨、脉络清晰，以便学生在较短的教学时间内，基本上掌握平面射影几何的基本理论和基本方法.

2. 解析法和综合法并用，以解析法为主，适当运用综合法，适应现代数潮流；注意培养和发展抽象思维的能力，同时也注意保持几何学直观的特点.

3. 从高等师范院校的培养目标考虑，适当联系中学几何的有关问题，旨在培养学生以较高的观点理解中学几何教材和处理中学几何问题的能力.

4. 注意射影几何与高等代数的密切联系.事实上，高等代数为射影几何提供了研究方法，而射影几何为高等代数的许多内容提供了几何解释.本书主要讨论二维射影空间及二维射影变换，因此就给出三维向量和三阶矩阵(非奇异)的几何解释.这样的解释生动地说明了相应的代数理论的几何意义.另外，需要指出的是，正是由于高等代数(高维)方法的介入，才有了探讨高维射影几何的可能.有兴趣的同学可以在学完本课程后去探讨学习.

5. 射影几何是比欧氏几何更一般的几何学，是一种全新的几何学，但为了学生接受起

来更方便，我们仍是从欧氏空间出发，再添加理想元素而得到射影空间，进而建立齐次坐标的理论. 在第四章中我们才在射影空间的基础上去掉理想元素而得到仿射空间，然后引进度量得到欧氏空间，从而明确仿射几何是射影几何的特殊情形，而欧氏几何又是仿射几何的特殊情形.

本书在编写过程中，得到了吉林师范大学数学学院领导和同事的关心和支持，特别是得到了姜树民教授的鼓励和支持，在此表示衷心的感谢.

限于编者水平，书中不当和错误在所难免，诚恳希望读者予以指正.

车明刚

2012 年 5 月

第一章 射影平面

本章从中心投影入手，引进理想元素，从而拓广欧氏平面，并在拓广的欧氏平面上建立齐次坐标. 在此基础上定义射影平面，介绍平面射影几何的对偶原理和坐标变换. 这样就为阐述射影几何理论创造了条件.

§1.1 无穷远(理想)元素

一、射影几何

高等几何是数学专业基础理论课程之一，该课程系统地介绍射影几何的基础知识. 什么是射影几何呢？在系统学习之前我们先做一点直观的说明，这样对以后的讨论会有一些启示.

我们先从初等几何谈起，在初等几何里所研究的是几何图形的形状、大小和相关位置. 例如，线段的长度、角度、面积和体积等几何量，图形的全等和相似等关系. 这些几何图形的量和相互关系，不因图形的位置改变而改变. 也就是说，把几何图形从一个位置移动到另一个位置时，图形的形状和大小是不会改变的. 移动是一种简单的物质运动形式，反映在几何学上就是运动变换. 初等几何就是研究几何图形在运动变换下的不变性质和不变量的学科.

客观世界的物质运动有多种不同的形式和特点，反映在几何学上就形成多种不同的几何变换. 例如，阳光照射在物体上的时候，在地面(或墙面)上就会出现物体的影子，随着时间的推移，影子不仅改变着它的位置，而且它的形状和大小也在不断地变化. 物体在阳光的照射下形成影子，这是物质运动的一种形式，它在几何学上的反映就是平行投影. 在这种运动形式下，仍有保持不变的性质，如窗户框相互平行的两个对边其影子始终是平行的，这个平行性就是平行投影下的不变性质. 若干次平行投影构成所谓的仿射变换. 研究在仿射变换下图形的不变性质和不变量的几何学就是仿射几何.

由灯光(点光源)照射物体,在地面(或墙面)上也会出现物体的影子,并且随着光源和物体的相对位置的改变,影子的形状和大小都随之改变.这时平行性不再保持了,但物体相互关联的部位仍保持着一定的关系,也就是图形上元素之间的结合关系仍保持不变.物体由灯光照射成影,这是物质运动的又一种形式,它在几何学上的反映就是中心投影,而结合性就是中心投影下的不变性质.若干次中心投影构成所谓的射影变换.研究在射影变换下图形的不变性质和不变量的几何学就是射影几何.

射影几何的起源,开始是由于绘画、光学和建筑上的需要.当一个画家要把一个实物描绘在一块布幕上时,他先用眼睛当做投影中心,把实物的影子映射到布幕上去,再描绘出来.在建筑上我们需要把设计的实物画在一个平面上,平面上的图样就是实物的中心投影.这种投影技术在纯理论上的发展,就成为射影几何.从上述直观的理解和历史的发展来看,中心投影是射影几何理论的起源和基础.为此,我们从中心投影入手,来阐述建立射影几何的一些基本问题.

二、中心投影

1. 直线到直线上的中心投影

定义 1.1 设 l 和 l' 是同一平面上的两条不同直线(图 1-1),O 是该平面中不在直线 l 和 l' 上的一点,过点 O 与直线 l 上的任一点 A 作直线 a 交直线 l' 于点 A',这样建立的直线 l 与 l' 上的点之间的对应,叫做直线 l 到直线 l' 上的**中心投影**,其中点 O 叫做**投影中心**,直线 a(即 OA)叫做**投射线**,点 A' 叫做点 A 在中心投影下的**像点**,而点 A 叫做点 A' 的**原像点**.若记中心投影为 φ,则通常记 $A'=\varphi(A)$.

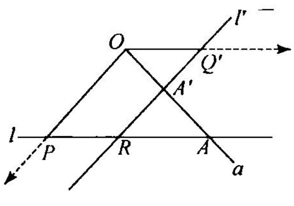

图 1-1

当点 A 在直线 l 上移动时,点 A' 则在直线 l' 上随之移动.当点 A 移动到点 P,且使 $OP /\!/ l'$ 时,点 P 的对应点不存在.这时点 P 叫做直线 l 上的**没影点**.同理,设点 Q' 在直线 l' 上,且 $OQ' /\!/ l$,则在直线 l' 到直线 l 的中心投影(投影中心为 O)下,点 Q' 就是直线 l' 上的没影点.直线 l 和 l' 的交点 R 是自对应点.

2. 平面到平面上的中心投影

定义 1.2 设 π 和 π' 是两个不同的平面(图 1-2),O 是不在这两个平面上的点,过点 O 与平面 π 上任一点 A 作直线 a 交平面 π' 于一点 A',这样建立的平面 π 与平面 π' 上的点之间的对应,叫做平面 π 到平面 π' 上的**中心投影**,其中点 O 叫做**投影中心**,直线 a(即 OA)叫做**投射线**,点 A' 叫做点 A 在该中心投影下的**像点**,而点 A 叫做点 A' 的**原像点**.

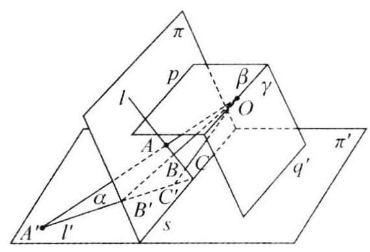

图 1-2

显然，在定义 1.2 中，平面 π 和 π' 的交线 s 上的点都是自对应点，交线 s 是自对应直线.

如果点 A,B,C 都在直线 l 上，则它们的投射线 OA,OB,OC 都在由点 O 与直线 l 所决定的平面 α 上. 因此它们在平面 π' 上的对应点 A',B',C' 必在平面 α 与平面 π' 的交线 l' 上. 由此可知共线点的对应点仍是共线点. 也就是说，在中心投影下，平面 π 上的直线 l 变为平面 π' 上的一条直线 l'. 过点 O 作平面 β 平行于平面 π' 交平面 π 于直线 p，直线 p 上的点在平面 π' 上不存在对应点，因此都是没影点，此时直线 p 叫做**没影直线**. 同理，过点 O 作平面 γ 平行于平面 π 而交平面 π' 于 q'，则在平面 π' 到平面 π 的中心投影(投影中心为 O)下，q' 上的点都是没影点，而直线 q' 就是没影直线.

3. 图形的射影性质

前面提到在中心投影下共线点仍变为共线点，也就是说在中心投影下点共线这个性质保持不变. 图形经过任意中心投影而不改变的那些性质，就是图形的**射影性质**，这些性质便构成了射影几何的主要内容. 如上所述，点共线这一性质，也就是点和直线的结合性是平面射影几何最基本的性质. 由此可知，三边形和四边形的中心投影仍是三边形和四边形(为了简便，通常将某图形在中心投影下的像称为该图形的中心投影或投影). 可是等腰三边形的中心投影不一定是等腰三边形，平行四边形的中心投影也未必是平行四边形，圆的中心投影也未必是圆. 可以看出“点在直线上”、“直线过点”、“几个点共线”和“几条线共点”都是中心投影下的不变性质，“三边形”和“四边形”都是中心投影下的不变图形，所以它们都属于射影几何研究的范畴. 而“两点之间的距离”、“两直线的夹角”、“等腰三边形”、“平行四边形”和“圆”在中心投影下可能有所改变，因此它们就不是射影几何研究的对象.

三、无穷远(理想)元素

1. 理想元素的引入

由于在欧氏平面上进行中心投影会出现没影点和没影直线，这样就使得中心投影产生非一对一的现象，因而给讨论中心投影下的不变性质带来极大的不便. 为了消除这种障碍，有必要对欧氏平面进行改造. 考察发现，中心投影下出现非一对一的根源就在于欧氏平面上存在着两条直线相交和不相交(平行)两种不统一的情况，如果我们把两条平行线看做相交于一个理想的点，从而非一对一的问题就可以得到解决. 为此我们约定：两条平行直线相交于一个而且唯一一个理想的点. 我们把这一理想点叫做**无穷远点**，并将无穷远点 P 记做 P_∞.

引入无穷远点后，图 1-1 中点 P 的对应点则是直线 l' 上的无穷远点 P'_∞；点 Q' 的对应点则是直线 l 上的无穷远点 Q_∞. 这样一来，直线 l 和 l' 上的点便是一一对应的了.

在欧氏平面上引入无穷远点后，这个平面将出现些什么新情况，这是需要弄清的问题.

对于平面 π 上的一组平行直线 $a,b,c,d,\cdots$，作与平面 π 不平行的任一平面 π'，并取不在

π 和 π' 上的一点 O. 以点 O 为投影中心进行中心投影,则得到直线 $a,b,c,d,\cdots$ 在平面 π' 上的投影,设它们为直线 $a',b',c',d',\cdots$. 由于 a 和 a',b 和 b',c 和 c',d 和 d' 分别在过点 O 的不同平面上,而这些平面分别过平行线组 $a,b,c,d,\cdots$ 之一的直线,且有一公共点 O,故必有公共交线 OL,且 OL 平行于直线 $a,b,c,d,\cdots$(图 1-3). 设 OL 与平面 π' 相交于点 S,则 S 即为直线 $a',b',c',d',\cdots$ 的交点. 而 S 为平面 π' 到平面 π 的中心投影下的没影点,它对应着平行线组中每一条直线上的无穷远点. 因此,平面内的一组平行线恰有一个公共的无穷远点.

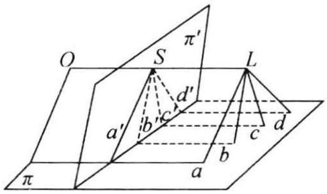

图 1-3

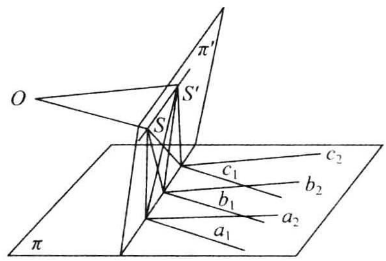

图 1-4

对于平面 π 上不同的平行线组,在平面 π' 上的投影有不同的公共交点(图 1-4),因此,平面内不同的平行线组有不同的无穷远点. 这些无穷远点对应着由平面 π' 上的没影点所组成的一条直线. 因此,平面内的无穷远点都在一条直线上,这条直线就叫做**无穷远直线**.

定义 1.3 我们把欧氏平面上原有的点叫做**欧氏点**或**平常点**,而把欧氏点和无穷远点统一叫做**射影点**;把欧氏平面上原有的直线叫做**欧氏直线**,在欧氏直线上添加了无穷远点后称之为**射影直线**. 由无穷远点所组成唯一的那条无穷远直线也是射影直线. 欧氏平面上添加无穷远点和无穷远直线之后的平面,叫做**射影平面**,也叫做**拓广的欧氏平面**. 无穷远点和无穷远直线都叫做**无穷远元素**或**理想元素**.

2. 射影点和射影直线的基本性质

在欧氏平面上引入了理想元素后,便拓广为射影平面,这样的拓广应使原来的欧氏平面上所具有的性质和拓广的欧氏平面的性质统一起来,才能起到拓广的作用. 在欧氏平面上的点和直线的基本关系是结合关系,因此在拓广的欧氏平面上新旧元素仍应保持这种关系. 同时由于引进了新的元素,因此平面的结构一定有新的变化. 为了了解这些情况,下面来讨论射影点和射影直线的基本性质.

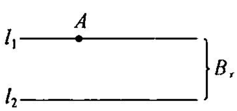

图 1-5

性质 1 过任意两个相异的点 A 和 B 有且只有一条射影直线.

事实上,如果 A 和 B 都是欧氏点,据欧氏几何公理,过 A 和 B 两点有且只有一条欧氏直线 AB,在直线 AB 上添加一个无穷远点变成为射影直线;如果 A 是欧氏点,B 是无穷远点 B_∞,设 B_∞ 在直线 l_2 上

(图 1-5)，那么过点 A 且平行于 l_2 的直线 l_1 必过点 B_∞，即过点 A 和 B_∞ 有且只有一条射影直线 l_1；如果 A 和 B 两点都是无穷远点，即为 A_∞ 和 B_∞，则过点 A_∞ 和 B_∞ 有且只有一条无穷远直线，它仍是射影直线.

性质 2 射影平面上任意两条相异的射影直线有且只有一个交点.

事实上，当两条射影直线 l_1 和 l_2 都是欧氏直线时，若 l_1 和 l_2 相交，则有且只有一个交点；若 l_1 和 l_2 平行，根据约定知，有且只有一个交点——公共的无穷远点. 当两直线 l_1，l_2 中有一条是无穷远直线时，它们相交于那条非无穷远直线上的唯一无穷远点.

由上可知，引进理想元素后对于新旧元素在拓广的欧氏平面上都具有上述性质，因此就可以不加任何区分地对待. 这种把拓广的欧氏平面上的平常元素和理想元素不加以任何区分的观点是射影观点；而加以区分的观点是仿射观点(见§4.1)；根本不承认理想元素存在的观点是欧氏观点(见§4.3). 在射影几何里采用射影观点不加区分地把平常元素和理想元素叫做射影点或射影直线，并把添加了理想元素的欧氏平面叫做射影平面，它们分别简称为点、直线、平面.

3. 射影直线和射影平面的模型

我们生活在欧氏空间中，对于欧氏直线和平面处处都能接触到它的直观模型，这样从其中抽象出来的概念也是易于想象和理解的. 现在直线和平面都已拓广了，它当然不同于原来的形象，因此需要寻求适合它的模型来帮助我们理解和研究新的概念.

3.1 射影直线的模型

在一条射影直线上由于添加了一个理想点，因此当沿着这条直线向两个相反方向无限延长时，其最终将要会于一点——这条直线上那个无穷远点，所以它是一个封闭图形，我们可以把它想象成如图 1-6 所示的封闭线. 在射影直线上点 A 和 B 把这条直线分为两条线段：一条是平常的线段 AB；另一条是包含着理想点(无穷远点)的线段段 $AP_\infty B$.

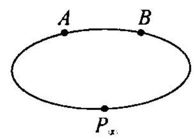

图 1-6

3.2 射影平面的模型

对于射影平面的模型，可以按下面的方法构造构成. 设以点 O 为中心的半球面 Σ 顶部与平面 π 相切于一点 S (图 1-7)，以点 O 为投射中心把平面 π 上的点投射到半球面 Σ 上：如点 $A\in\pi$，连接 OA 交半球面 Σ 于点 A'，则 A' 是 A 的像点. 按这样方法把平面 π 上所有点投射到半球面 Σ 上，对于 π 上的平常点则投射到开半球面 Σ 上；对于 π 上的无穷远点 M_∞，它在 Σ 上的像点是过点 O 引 SM_∞ 的平行线与半球面 Σ 上的"赤道大圆"(底圆)的交点，此时 $OM_\infty (M_\infty\in\pi)$ 与"赤道大圆"相交于两点 M'_∞ 与 $\overline{M}'_\infty$. 因此如果把赤道大圆上的对径点 M'_∞ 与 $\overline{M}'_\infty$ 看做 Σ 上的同

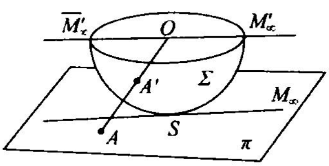

图 1-7

一点，这样就把射影平面 π 上的点和半球面 Σ 上的点建立起一一对应. 于是当我们把"赤道大圆"的对径点看做同一点时，半球面 Σ 就是射影平面的模型. 在这个模型上的每一个大圆的半圆周表示一条射影直线，它在"赤道大圆"上的两端点看做同一个点. 从这个模型可以看出，射影直线和射影平面都是封闭的.

把欧氏平面加以拓广而得到射影平面，保留了欧氏平面上的一些性质，如"两相异点确定一条直线". 但是有些性质却和原来的大不相同. 例如，欧氏平面上两条直线有相交和平行之分，在这里则统一了. 又如，欧氏平面上一直线 a 把欧氏平面分成两个区域，分别在不同区域内的两点是不可能用一条与直线 a 不相交的线段连接起来的，但是在射影平面上却不然，任何两点都可以用一条与直线 a 不相交的线段连接起来，因此射影平面上的任一直线都不能把该平面分成两个区域，如图1-8 中的 $AP_\infty B$ 就是与直线 a 不相交的线段.

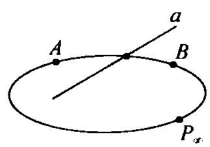

图 1-8

在欧氏平面上，两相交直线把平面分成四个区域，两平行直线把平面分成三个区域(图 1-9(a))，但是在射影平面上的两直线总把平面分为两个区域(图1-9(b)). 同样的在欧氏平面上，不过同一点的三条两两相交的直线把平面分为七个区域(图 1-10(a))，但是在射影平面上这样的三条直线只能把平面分为四个区域(图1-10(b)).

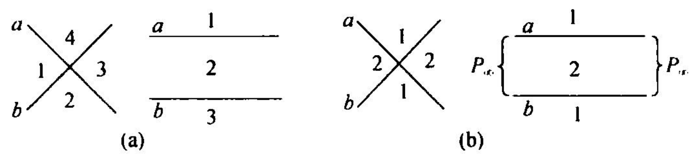

图 1-9

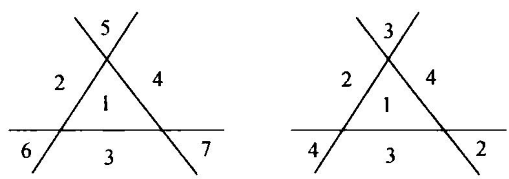

图 1-10

4. 利用中心投影证明几何问题

由于中心投影保持结合性，因此在证明有关结合性的命题时，可以将原命题的图形进行适当的中心投影，由投影后图形的结合性而反衬出原命题的结合性.

例 设三直线 up_1p_2,uq_1q_2,ur_1r_2 分别交两直线 ox_1,ox_2 于点 p_1,q_1,r_1和点 p_2,q_2,r_2,求证:q_1r_2与 q_2r_1的交点 a,r_1p_2 与r_2p_1 的交点 b 及 p_1q_2 与p_2q_1 的交点 c 三点共线,且此直线过点 o.

证明 利用中心投影将图 1-11(a)投影成图 1-11(b),其中 ou 投影为无穷远直线,则 $p_1'p_2'/\!/q_1'q_2'/\!/r_1'r_2'$,$p_1'q_1'r_1'/\!/p_2'q_2'r_2'$. 于是得知点 $q_1'r_2'$与 $q_2'r_1'$的交点 a',$r_1'p_2'$与 $r_2'p_1'$的交点 b',及 $p_1'q_2'$与$p_2'q_1'$的交点 c'分别是平行四边形 $q_1'q_2'r_2'r_1'$,$r_1'r_2'p_2'p_1'$,$p_1'p_2'q_2'q_1'$的对角线的交点,由此易知 a',b',c'三点共线,且此直线平行于 $p_1'q_1'r_1'$与 $p_2'q_2'r_2'$. 返回到原图 1-11(a),即得分别与 a',b',c'对应的点 a,b,c 亦必共线,且此直线 abc 必过 $p_1'q_1'r_1'$与 $p_2'q_2'r_2'$的交点 o_∞'的对应点 o.

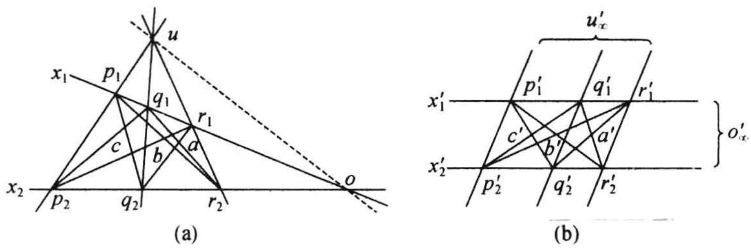

图 1-11

习 题 1.1

1. 下列图形中哪些是射影几何研究的对象?

(1) 三边形;	(2) 直角三边形;
(3) 三边形的中线;	(4) 四边形;
(5) 平行四边形;	(6) 梯形;
(7) 圆;	(8) 弓形;
(9) 二次曲线;	(10) 三角形.

2. 中心投影把一个圆投影成怎样的图形?

3. 试证:如果一个平行四边形经过中心投影仍变为平行四边形,且使得其中一个平行四边形的两双对边分别平行于另一个平行四边形的两双对边,则它们所在平面平行.

4. 已知 A,B 为两定点,l 为不过 A,B 两点的定直线. 在直线 l 上任取两点 P,Q,令 X 是 AP 与 BQ 的交点,Y 是 AQ 与 BP 的交点,求证:直线 XY 过直线 AB 上一定点.

5. 试证:两条不同直线把射影平面划分为两个区域.

6. 设在射影平面上有 n 条无三线共点的直线,试问:它们能把射影平面划分成多少个区域? 在欧氏平面上呢?

§1.2 齐次坐标

一、齐次坐标的引进

在解析几何中，我们建立笛卡儿直角坐标系，使欧氏平面上的点 P 对应着有序数对 (x,y)，直线 l 对应着线性方程 $ax+by+c=0$，从而可以利用代数方法来研究欧氏平面上图形的性质.我们能否用代数方法来研究射影平面上图形的性质呢?这就得考虑如何表示射影平面上点的坐标.

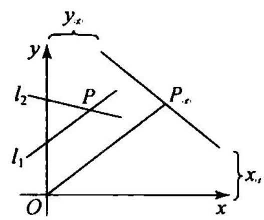

图 1-12

由于射影平面是在欧氏平面上拓广得到的，因此我们先在欧氏平面进行讨论.首先建立笛卡儿直角坐标系 Oxy（图 1-12），设平面上相异两直线 l_1 和 l_2 的方程分别是

$$l_1:\ a_1x+b_1y+c_1=0,$$
$$l_2:\ a_2x+b_2y+c_2=0,$$

其中 a_1 和 b_1 不同时为零，a_2 和 b_2 不同时为零.令

$$D_1=\begin{vmatrix}-c_1 & b_1\\ -c_2 & b_2\end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix}a_1 & -c_1\\ a_2 & -c_2\end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}.$$

当 l_1 和 l_2 相交时，有 $D_3\neq0$.设交点为 $P(x,y)$，则点 P 的坐标为 $x=\dfrac{D_1}{D_3}$，$y=\dfrac{D_2}{D_3}$.

当 l_1 和 l_2 平行，即相交于无穷远点 P_∞ 时，有 $D_3=0$.这时就出现 P_∞ 的坐标为 (∞,∞) 的现象.

由于 ∞ 本身不是实数，即使我们约定 (∞,∞) 与无穷远点对应，但所有无穷远点都表示为 (∞,∞)，还是既无法区分也无法进行计算.因此，在拓广的欧氏平面上不可能再引用笛卡儿坐标，要想确定拓广的欧氏平面上所有点的坐标，就得将原来的坐标表示方法加以相应的改造.为此，令

$$x=\frac{x_1}{x_3},\quad y=\frac{x_2}{x_3},$$

则

$$x_1:x_2:x_3=D_1:D_2:D_3.$$

我们把点 P 的坐标用 (x_1,x_2,x_3) 来表示，并规定当 $x_3\neq0$ 时，(x_1,x_2,x_3) 表示平常点；当 $x_3=0$ 时，若 x_1,x_2 不全为零，则 (x_1,x_2,x_3) 表示无穷远点.当 x_1,x_2,x_3 三数都等于零时，就出现了 $(0,0,0)$ 这个形式，而 $(0,0,0)$ 不表示任何点，也就没有意义（此时 l_1 和 l_2 重合），故应排除在外.

因为点的坐标是利用 x_1,x_2,x_3 的比给出的，所以对于任何实数 $\rho\neq0$，$(\rho x_1,\rho x_2,\rho x_3)$ 与 (x_1,x_2,x_3) 表示射影平面上同一点.对任意的有序三实数组 $x=(x_1,x_2,x_3)$，我们通常把所

有形如$(\rho x_1,\rho x_2,\rho x_3)(\rho\neq 0)$的有序三实数组组成的集合叫做有序三实数组的一个**类**，记做$[x]$. 因此，射影平面上每一点的坐标(x_1,x_2,x_3)属于有序的三实数组的类$[x]$；反之，对于平面上任一点，它一定可看做某两直线的交点，进而有有序三实数组的类与之对应. 这样射影平面上的点与除$(0,0,0)$外的有序三实数组的类建立了一一对应. 这正是射影平面上点坐标的特点.

定义 2.1 用有序三实数组的类的形式来表示点 P 的坐标，叫做点 P 的**齐次坐标**；原来的坐标(x,y) 叫做点 P 的**非齐次坐标**.

引进齐次坐标后，就克服了确定无穷远点的坐标所产生的障碍，从而使平常点和无穷远点的坐标表示法得到了统一. 对于平常点 x，其齐次坐标为$(\rho x_1,\rho x_2,\rho x_3)$（它的特征是$x_3\neq 0$）；对于无穷远点，其齐次坐标为$(\rho x_1,\rho x_2,0)$（它的特征是$x_3=0$）.

在欧氏平面上的直线方程是

$$\xi_1 x+\xi_2 y+\xi_3=0\quad(\xi_1,\xi_2\text{ 不同时为零}),\tag{2.1}$$

换成点的齐次坐标，即把 $x=\dfrac{x_1}{x_3}$，$y=\dfrac{x_2}{x_3}$ 代入(2.1)式得

$$\xi_1 x_1+\xi_2 x_2+\xi_3 x_3=0.\tag{2.2}$$

三实数 ξ_1,ξ_2,ξ_3 完全确定了这条直线，同时与这三个实数成比例的任何有序三实数组也能确定这条直线. 因此，一条直线也可以用有序三实数组 $[\lambda\xi_1,\lambda\xi_2,\lambda\xi_3]$$(\lambda\neq 0)$来表示；反之，任一有序三实数组 $[\xi_1,\xi_2,\xi_3]$（但 $[0,0,0]$ 除外）均可确定一直线 ξ. 我们把有序三实数组$[\lambda\xi_1,\lambda\xi_2,\lambda\xi_3]$$(\lambda\neq 0)$作为直线 ξ 的坐标（注：这里采用方括号“[ ]”是为了与点的坐标相区别）.

由于平面上每个无穷远点都在无穷远直线上，因而无穷远点的坐标$(x_1,x_2,0)$都应满足它的方程，也就是说 x_1,x_2 为任何实数时该方程都成立，那么就必须是 $\xi_1=\xi_2=0$，所以无穷远直线的方程是

$$\xi_3 x_3=0\quad\text{或}\quad x_3=0.\tag{2.3}$$

由于 ξ_1,ξ_2,ξ_3 不能同时为零，故 $\xi_3\neq 0$，所以无穷远直线的坐标是 $[0,0,\xi_3]$ 或 $[0,0,1]$.

通过上面的讨论，我们可以得出拓广的欧氏平面的一个算术模型，那就是：用不全为零的有序三实数组(x_1,x_2,x_3)表示平面上的点 x，把它叫做**点 x 的齐次坐标**，并且 (x_1,x_2,x_3) 与$(\rho x_1,\rho x_2,\rho x_3)(\rho\neq 0)$表示同一个点 x，其中平常点对应 $x_3\neq 0$，无穷远点对应 $x_3=0$；用不全为零的有序三实数组 $[\xi_1,\xi_2,\xi_3]$ 表示平面上的直线 ξ，把它叫做**直线 ξ 的齐次坐标**，并且 $[\xi_1,\xi_2,\xi_3]$ 与 $[\lambda\xi_1,\lambda\xi_2,\lambda\xi_3]$$(\lambda\neq 0)$表示同一条直线 ξ，其中平常直线的 ξ_1,ξ_2 不同时为零，无穷远直线的 ξ_1,ξ_2 同时为零.

二、射影平面的定义

从上面对齐次坐标的讨论可知，设 $x=(x_1,x_2,x_3)$是任意的一个有序三实数组，所有形如

$(\rho x_1, \rho x_2, \rho x_3)(\rho \neq 0)$的有序三实数组组成的集合为有序三实数组的一个类 $[x]$. 若 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$,则称 $[x]$ 为**零类**. 当且仅当两类有序三实数组有一个公共的有序三实数组时,这两个类相同. 如果两个有序三实数组 x, y 属于同一个类,记做 $x \sim y$;否则记做 $x \not\sim y$. 除了零类只含有一个有序三实数组(0,0,0)外,其他每一类有序三实数组都包含无穷多个有序三实数组.

作了以上说明后,我们引进如下射影平面的抽象定义:

定义 2.2 除零类外,所有有序三实数组的类 $[x]$ 组成的集合 P^2 叫做**射影平面**(也称为**实二维射影空间**). 集合 P^2 中的一个元素——类 $[x]$ 叫做射影平面上的一个**点**,每一个类 $[x]$ 包含有无限多个有序三实数组,它们都叫做点$[x]$的**坐标**,其中每一个有序三实数组 $x = (x_1, x_2, x_3)$叫做点 $[x]$ 的一个**成员**.

在讨论时,我们通常把指定的点 $[x]$ 的成员叫做点 $[x]$ 的**代表或解析点**,写做 x^* 或 (x_1^*, x_2^*, x_3^*). 如果未指定代表,则点的坐标可以在该点的坐标类中任意选取,但一经选取后则是固定不变的. 因为点 $[x]$ 可用任一成员来代表,所以也可以写成点 x 或点 (x_1, x_2, x_3).

射影平面的这个定义虽然是在笛卡儿直角坐标系的某些几何事实的启发下做出来的,但是它与笛卡儿直角坐标却没有丝毫关系,因为它纯粹是用数的概念下的定义. 因此我们把点 $x = (x_1, x_2, x_3)$中的三个数 $x_i(i = 1, 2, 3)$叫做点 x 的**绝对坐标**. 这时也常常将点 x 记做 $x(x_1, x_2, x_3)$. 需要指出的是,前面我们从拓广的欧氏平面给出的射影平面的定义,是依附于欧氏平面提出来的,它是一种直观的拓广,现在用有序三实数组的类的集合来定义射影平面,从这个概念本身来说是比较抽象的,但是它却比用拓广的欧氏平面来定义更为独立,因而对讨论射影几何系统来说更为完善. 同时,这样定义射影平面更具有一般性,任何一个集合,只要它的元素与有序三实数组的类的集合 P^2 建立一一对应,这个集合就是射影平面 P^2 的一个模型. 在前面我们用拓广的欧氏平面来建立射影平面,由于拓广的欧氏平面上的点、直线及点线结合关系对应着有序三实数组及有关的运算,因此我们说有序三实数组的类的集合是拓广的欧氏平面的算术模型. 现在我们用有序三实数组的类的集合来定义射影平面 P^2,那么拓广的欧氏平面就是射影平面 P^2 的几何模型,拓广的欧氏平面内的点就对应着射影平面 P^2 内的有序三实数组的类.

我们知道,拓广的欧氏平面上的直线 ξ 也可以用有序三实数组 $[\xi_1, \xi_2, \xi_3]$ 来表示,而且 $[\xi_1, \xi_2, \xi_3]$ 与 $[\lambda\xi_1, \lambda\xi_2, \lambda\xi_3](\lambda \neq 0)$表示同一条直线,因而拓广的欧氏平面上所有直线组成的集合 T 与除零类外所有有序三实数组的类组成的集合 P^2 同样可以建立一一对应. 因此,拓广的欧氏平面上所有直线组成的集合 T 也是射影平面 P^2 的一个模型,这时 T 里的元素——拓广的欧氏平面上的直线便可解释为射影平面 P^2 上的点(即有序三实数组的类).

此外,在空间解析几何里,所有经过坐标原点的直线组成的集合 N 内每一条直线 ξ 的方向数 $n = (n_1, n_2, n_3)$是一个有序三实数组,而$(\lambda n_1, \lambda n_2, \lambda n_3)(\lambda \neq 0)$也是同一条直线 ξ 的方向数,所以集合 N 内的每一直线 ξ 的方向数可以表示为一个有序三实数组的类 $[n]$. 显然,除

零类以外，所有有序三实数组的类与所有过坐标原点的直线可以建立一一对应，因此集合 N 也是射影平面 P^2 的一个模型. 在这个模型里，集合 N 内的每个元素——过坐标原点的直线便可解释为射影平面 P^2 上的点.

三、有序三实数组的运算

我们在前面用有序三实数组来定义射影平面，这样今后讨论射影平面上的点、线以及点线结合的问题就转化为有关有序三实数组的运算. 因此我们有必要引进有序三实数组的运算. 而为了引进运算，需先给出两有序三实数组相等的概念：对于两任意有序三实数组

$$a=(a_1,a_2,a_3),\quad b=(b_1,b_2,b_3),$$

当且仅当 $a_i=b_i(i=1,2,3)$ 时，称 a 等于 b，记做 $a=b$.

设 $a=(a_1,a_2,a_3)$，$b=(b_1,b_2,b_3)$，$c=(c_1,c_2,c_3)$ 是三个有序三实数组，λ,μ 是不为零的任意实数，我们引进下列关于有序三实数组运算的定义：

(1) **数乘**：λ 与 a 的乘积 λa 定义为

$$\lambda a=\lambda(a_1,a_2,a_3)=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)\ (\lambda\neq 0). \tag{2.4}$$

(2) **和**：a 与 b 的和 $a+b$ 定义为

$$a+b=(a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3)=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3). \tag{2.5}$$

结论 1 $\lambda a+\mu b=(\lambda a_1+\mu b_1,\lambda a_2+\mu b_2,\lambda a_3+\mu b_3)$. (2.5′)

特别地，当 $\lambda=1$，$\mu=-1$ 时，有 $a-b=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$，称之为 a 与 b 的差.

(3) **数量积**：a 与 b 的数量积 $a\cdot b$ 或 ab 定义为

$$a\cdot b=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3. \tag{2.6}$$

显然，有 $a\cdot b=b\cdot a$.

结论 2 $(\lambda a+\mu b)\cdot(\lambda'a'+\mu'b')$

$$=\lambda\lambda'(a\cdot a')+\lambda\mu'(a\cdot b')+\mu\lambda'(b\cdot a')+\mu\mu'(b\cdot b'). \tag{2.6′}$$

(4) **向量积**：a 与 b 的向量积 $a\times b$ 定义为

$$a\times b=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right). \tag{2.7}$$

容易验证，有 $a\times b=-(b\times a)$.

对于任意实数 d,e,f,g 和 d',e',f',g'，由行列式的性质有

$$\begin{vmatrix}\lambda d+\mu e & \lambda'd'+\mu'e'\\ \lambda f+\mu g & \lambda'f'+\mu'g'\end{vmatrix}=\lambda\lambda'\begin{vmatrix}d & d'\\ f & f'\end{vmatrix}+\lambda\mu'\begin{vmatrix}d & e'\\ f & g'\end{vmatrix}+\mu\lambda'\begin{vmatrix}e & d'\\ g & f'\end{vmatrix}+\mu\mu'\begin{vmatrix}e & e'\\ g & g'\end{vmatrix}.$$

于是可以证明如下结论：

结论 3 $(\lambda a+\mu b)\times(\lambda'a'+\mu'b')$

$$=\lambda\lambda'(a\times a')+\lambda\mu'(a\times b')+\mu\lambda'(b\times a')+\mu\mu'(b\times b'). \tag{2.7′}$$