21世纪经济学研究生规划教材

Game Theory

博弈论

涂志勇 ◎著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

21世纪经济学研究生规划教材

Game Theory

博弈论

涂志勇 ◎著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

博弈论/涂志勇著.—北京:北京大学出版社,2009.7
(21世纪经济学研究生规划教材)
ISBN 978-7-301-15092-4

Ⅰ.博…　Ⅱ.涂…　Ⅲ.对策论-研究生-教材　Ⅳ.0225

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第043973号

书　　名:博弈论
著作责任者:涂志勇　著
策 划 编 辑:朱启兵
责 任 编 辑:朱启兵
标 准 书 号:ISBN 978-7-301-15092-4/F·2163
出 版 发 行:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区成府路205号　100871
网　　址:http://www.pup.cn
电　　话:邮购部62752015　发行部62750672　编辑部62752926　出版部62754962
电 子 邮 箱:em@pup.pku.edu.cn
印　刷　者:涿州市星河印刷有限公司
经　销　者:新华书店
787毫米×1092毫米　16开本　12印张　227千字
2009年7月第1版　2009年7月第1次印刷
印　　数:0001—4000册
定　　价:25.00元

序　　言

这是一本系统介绍博弈理论的教材，适合高年级本科生、硕士生以及低年级博士生使用。在写作风格上，本书受哲学家奎因（W. V. O. Quine）1965 年版 129 页的《基础逻辑》（*Elementary Logic*）教程影响很大。《基础逻辑》以其连贯、准确与精炼的叙述使我在一周内从逻辑学的门外汉变成粗通者。因此，我希望本书也能给读者带来类似的高效。为了达到这一目标，本书在写作时力图体现以下四个特点，即简短性、准确性、逻辑性与思想性。

- 简短性：介绍博弈论中最基础、重要的概念与方法。所用例子不多，但又不少到影响对概念及工具的理解。
- 准确性：在行文论述时追求语言的精确，避免模糊与重复。
- 逻辑性：全书体现整个博弈论的逻辑体系，而每章又体现各博弈论组成部分的逻辑架构。
- 思想性：解释各概念与方法背后的思想，以及它们应用的价值及局限性。

本书旨在以较短时间使读者明晰博弈论的基本方法，之后读者便可以自己在“干中学”了。初学者应对书中例题给予足够重视，因为它们发挥着或强化理解、介绍概念或引出其他内容的重要作用。另外，各章之后的思考题对应着需要掌握的知识点，很多题有一定难度，结论有些是开放性的，需要读者回味思考。对于想更深入研究某一特定问题的读者，可参阅每章之后给出的相关文献；而对于感觉例子数量不足以强化对概念与方法理解的读者，则可进一步阅读其他经典教材。

在本书的写作体例上，我遵循以下规则：

- 给出了主要字母标识对照表，以及中英文关键词索引。
- 每章开始时给出了学习该章后应达到的目标。

● 对于给出严格定义的概念，一般在首次出现时用黑体（如**纳什均衡**），而无严格定义的名词或需要强调的部分则均用楷体（如*决策理论*）。

● 在定理的证明与例子的解答结束后用符号“■”表示。

● 人名一般没有翻译，一篇文献以作者的姓加上发表的时间来表示（如 Smith 和 Price（1975））。

这本书花费了与其长度不相匹配的精力，在此我需要感谢很多的人。我在美国匹兹堡大学经济系学习时的导师 Andreas Blume 教授将我引入了博弈论的殿堂，并教会我如何从事严谨的科学研究。我的妻子何勤英鼓励我开始本书的写作，并阅读了本书的初稿。复旦大学管理学院助理教授姚志勇、上海交通大学经济学院助理教授隋勇、上海财经大学经济学院助理教授贺欣、武汉大学经济与管理学院的熊灵博士以及北京大学汇丰商学院的王振宁硕士均阅读了本书，并提出了很好的修改意见。北京大学汇丰商学院经济学与金融学双硕士班的部分学生阅读了本书各章节，他们是陈漪、常慧丽、李红军、刘晓和饶松松。另外，吴鹏和钟帅制作了本书的前期所有图表。北京大学副校长海闻教授对本书的出版给予了大力支持，北京大学出版社的朱启兵编辑在出版过程中提供了相当专业的帮助。上海交通大学经济学院院长周林教授给本书写了评语。我对他们的宝贵意见以及无私帮助表示由衷的感谢！

感谢武汉大学经济与管理学院陈继勇教授、北京大学经济学院刘民权教授以及所有帮助我学业成长的老师。最后，感谢我的家人对我工作的一贯支持。

由于笔者水平有限，错误在所难免，希望读者批评指正。

涂志勇

北京大学汇丰商学院

2009 年 6 月 30 日

主要字母标识对照表

$\mathscr{A}_i$	博弈者 i 所有可选行动的集合
$\mathcal{C}$	可能的选择集合
$C_i(H)$	博弈者 i 在信息集 H 下所有可能选择的集合
$E(X)$	随机变量 X 的期望
$E(X \mid y)$	在随机变量 Y 实现为 y 的条件下随机变量 X 的期望
$f(x)$	随机变量 X 的概率密度函数
$F(x)$	随机变量 X 的累积分布函数
f	社会选择函数
g	集体选择配置函数
$\mathbb{G}$	重复博弈下的一轮博弈
g_i	重复博弈下的一轮博弈中博弈者 i 的一个单轮纯策略
G_i	重复博弈下的一轮博弈中博弈者 i 所有单轮纯策略的集合
H	信息集
$\mathscr{H}_i$	博弈者 i 所有信息集的集合
Max	最大值
Min	最小值
$\mathcal{N}$	全体博弈者的联盟
$\mathbb{N}$	自然数集
$P(A)$	事件 A 发生的概率
$P(A \mid B)$	在事件 B 发生条件下事件 A 发生的概率
Pr	某事件的概率
$\mathscr{P}(\mathcal{N})$	集合 $\mathcal{N}$ 所有子集组成的集合
$\mathbb{R}$	实数集合
$\mathbb{R}^+$	正实数集合
$\mathbb{R}^N$	N 维实数集合

$\mathbb{R}_+^N$	N 维正实数集合
s_i	博弈者 i 的一个纯策略
S_i	博弈者 i 所有纯策略的集合
S	所有博弈者纯策略集合的笛卡儿乘积
s	所有博弈者的一种纯策略组合
s_{-i}	除博弈者 i 外所有博弈者的一种纯策略组合
S_{-i}	除博弈者 i 外所有博弈者纯策略集合的笛卡儿乘积
$u(x)$	确定货币收益 x 下的 Bernoulli 效用函数
$U(L)$	博彩 L 下的 von Neumann-Morgenstern 效用函数
$\mathcal{U}_i(s)$	无限重复博弈下策略组合 s 带给博弈者 i 的总效用
v	合作博弈特征函数
β_i	竞标者 i 的投标函数
δ_i	博弈者 i 的时间贴现因子
Φ	合作博弈下的 Shapley 值
Γ	一个机制
μ	不完全信息动态博弈下博弈者的信念体系
φ	一个机制下所有参与者私人类型的联合概率分布
π	利润函数
Ψ^*	弱完美贝叶斯纳什均衡
σ_i	博弈者 i 的一个混合策略
σ	所有博弈者的一种混合策略组合
σ_{-i}	除博弈者 i 外所有博弈者的一种混合策略组合
$\Delta(S_i)$	博弈者 i 所有混合策略的集合
ΔS	所有博弈者混合策略集合的笛卡儿乘积
τ	部分博弈者形成的联盟
θ_i	博弈者 i 的一种私人类型
Θ_i	博弈者 i 的所有可能私人类型的集合
θ_{-i}	除博弈者 i 外所有博弈者的一种私人类型组合
Θ_{-i}	除博弈者 i 外所有博弈者私人类型集合的笛卡儿乘积
Y	一个规范式博弈
Y_E	一个扩展式博弈
$\{\chi^t\}_{t=1}^{\infty}$	χ 的一个无穷序列
$\succsim$	二元偏好关系
$*$	代表最优或均衡

目　录

第1章 导 论

利益冲突是人类社会的永恒问题，即使是在所谓的“双赢”状态下，也依然存在着谁赢多、谁赢少的矛盾。在人与人之间存在着利益冲突时，当事人所进行的行为选择，我们称为“博弈”。而博弈论正是运用现代的数学模型来研究博弈行为的理论。在本章中，我们将简要介绍博弈论的历史发展及其主要内容。通过本章的学习，读者应：

- 了解博弈论的主要创建者及其贡献，以及博弈论各分支演变的大致脉络。
- 了解本书的基本结构，特别是非合作博弈理论将要涉及的主要内容。

§1.1 博弈论演变

在人类历史上，很早就出现了蕴涵博弈思想的故事，比如中国的"田忌赛马"。而带有博弈性质的数学模型则主要出现在近代，比如 Cournot(1838)的产量竞争模型，Bertrand(1883)的价格竞争模型，以及 Edgeworth(1881)的契约曲线等。真正将博弈规范化为一般理论的是 von Neumann 和 Morgenstern(1944)。他们定义了博弈论的基本数学概念与分析工具，并提出了以研究博弈者联盟(Coalition)问题为核心的合作博弈解的思想。在 von Neumann 和 Morgenstern(1944)的基础之上，当时普林斯顿大学数学系的两个博士生 Shapley 和 Nash 分别将博弈论研究推向不同的方向。Shapley(1952)将核(Core)发展为合作博弈的一般解，即它是一种所有成员均无法提升自身效用的稳定联盟状态。由于核这个概念不能给出联盟内成员效用分配的唯一预测，Shapley(1953)进一步在合作博弈框架中加入了一些着眼于"公平"分配合作利益的公理。他证明在这些公理的约束下，存在唯一的效用分配方案，这就是 Shapley 值(Shapley Value)。与 Shapley 不同，Nash 的研究跳出了合作博弈的思维框架，他不再以联盟，而是以个人(Individual)作为利益分析的出发点。[①] 相对于合作博弈框架，这样做的优点有：1. 可以解释为什么人们要合作以及具体如何合作(这在合作博弈下一般是以前提方式出现的)；2. 能够适用的现实场景大大超过合作框架；3. 可以在很大程度上解决均衡(即博弈稳定状态)的存在性以及唯一性问题。Nash(1950，1951)提出了非合作博弈的解，即纳什均衡(Nash Equilibrium)的概念。本书主体部分阐述的将是非合作博弈内容，两个附录则分别对合作博弈论与演进博弈论做了一个简短介绍。其中，演进博弈论是 20 世纪 70 年代以 Maynard Smith 为代表的理论生物学家最先发展起来的。他们运用经济学中的博弈论框架来分析生物界的相互依存与斗争，从而将达尔文自然选择带来生物演进的思想规范化，其代表性的均衡解是 Smith 和 Price(1973)提出的演进稳定策略(Evolutionarily Stable Strategy)。

当前经济分析中使用得最多的仍是非合作博弈的理论框架，而纳什均衡这一概念对于较为复杂的博弈却有一定局限性。比如有的博弈中人们需多次行动，而有的博弈中又存在着私人信息(博弈者自身类型的信息只有自己知道而对手并不知道)，这时纳什均衡

---

① 一个常见误解是：合作博弈就是支持合作行为，而非合作博弈则提倡对抗。事实上，两种博弈框架的差异只是在于建模方式的不同，即前者从集体效用出发，后者从个人效用出发来决定博弈者选择。如果合作对个人有利，非合作博弈也是支持合作行为的。相反，若合作对个人不利，即使合作博弈(如核)也无法支持合作行为。

就不能完全体现出博弈者的理性推断。[1] Selton(1965)对纳什均衡在动态博弈中进行了精炼,提出了子博弈完美纳什均衡(Subgame Perfect Nash Equilibrium)。而 Harsanyi(1967—1968)则将纳什均衡扩展到不完全信息(私人信息)条件,引入了贝叶斯纳什均衡(Bayesian Nash Equilbrium)的概念。1994 年的诺贝尔经济学奖因 Nash,Harsanyi 和 Selton 在非合作博弈领域的贡献而授予他们三人。1996 年,诺贝尔经济学奖又授予 Mirrlees 和 Vickrey,以表彰他们对不完全信息下的激励理论的研究。2001 年,Akerlof,Spence 和 Stiglitz 因其对不完全信息市场的研究而共享诺奖。2005 年,诺贝尔经济学奖授予博弈论学者 Schelling 和 Aumann,以表彰他们通过博弈分析,促进了人类对合作与冲突的理解。[2] 2007 年的诺贝尔经济学奖再次眷顾博弈论研究者。Hurwicz,Maskin 和 Myerson 三人因在博弈论的一个重要应用分支——机制设计方面的贡献而共享诺奖。如今,博弈论已经成为现代经济学、政治学(如选举)以及社会学(如群体行为与规范)等各类学科研究中基础性的分析工具。

§1.2 博弈论框架

在我们开始博弈论的学习之前,先将本书的结构与内容做一个大致介绍。对于以下所涉及的专有名词,以后各章中均会有详细的叙述。

阐述博弈论的是数学语言,博弈模型的分析是在假设、定义以及定理的框架下进行的。为了让读者熟悉博弈论中常用的数学概念与工具,我们将在第 2 章介绍集合论、最优化以及概率论这三大块内容。它们分别在定义博弈要素、求解最优行为,以及描述不确定信息等方面有着重要作用。

在第 3 章中,我们提出了理性人进行选择的决策框架。它告诉人们在面对各种确定或不确定情况时,作出选择的依据是什么,即最优的选择总应使自身效用或预期的效用最大化。决策论是引入博弈论的必要准备,因为博弈是在相互依存条件下的决策;而决

① 类型(Type)在博弈模型中一般设定为影响博弈者效用的变量。比如完成同样数量的工作,生产率高的人与生产率低的人所得效用(报酬减去投入)显然不同,于是生产率的高低就称做博弈者的类型。我们一般这样来体现信息的私人性,即假设博弈者类型是一个随机变量,只有博弈者自己知道该变量的实现值,其对手只知道变量的概率分布。

② Schelling 以非数理的方式,将博弈论的分析框架广泛运用到了军备竞赛、温室效应等经济学之外的各类领域。而 Aumann 则对博弈论的一些基础性概念(比如共同认识)进行了规范,提出了相关均衡解的新概念,另外对重复博弈也有开拓性研究。

策则是在对手策略既定条件下的博弈,是博弈的一种特殊情况。

接下来的章节将依次展开对博弈论主体内容的介绍。第4章构建了研究博弈的基本框架,包括博弈的构成要素、表示方法及其分类等。一个博弈由博弈参与者、博弈规则、博弈结局以及博弈效用组成。我们可以用一种树形图的方式,对博弈各阶段的选择与最终效用进行描述,这称做博弈的扩展式。根据扩展式,我们可以描述博弈者在所有可能情况下的行动选择,这就是策略。如果明确给出所有策略组合下的各方效用,那么这就是用规范式来表示一个博弈。根据博弈中是否存在不完全信息以及是否允许博弈者行动多次这两个标准,可以将博弈分为四大类,即完全信息静态博弈、完全信息动态博弈、不完全信息静态博弈和不完全信息动态博弈。各类博弈都有着适用于自身的均衡解的概念。

第5章所介绍的完全信息静态博弈,是各方均不存在私人信息且需同时行动一次的博弈。它是最基本的博弈形式,而纳什均衡正是此类博弈下对博弈者行为的预测。我们所说的均衡,是博弈中的一种稳定状态。在均衡下,任何一方都不会选择单方面的偏离,因为那将使自身效用下降,这意味着所有人的策略都需是对对手策略的最优回应。当博弈者是完全理性且对均衡策略形成共识时,纳什均衡将是对博弈者行为的正确预测。另外,Nash(1950)还证明:如果一个博弈中的参与人个数以及每个人的策略个数都是有限的,那么该博弈总存在纳什均衡。这在很大程度上保证了纳什均衡的普遍适用性。

第6章研究的是无私人信息的博弈者需行动多次的完全信息动态博弈。这时,博弈者在博弈各阶段进行选择时,就需要考虑当时的选择将如何影响他后续会进入的博弈(我们称做子博弈)。如果在每一个可能达到的子博弈下,人们的策略都构成纳什均衡,那么我们称这种均衡为子博弈完美纳什均衡,它是对纳什均衡的一种精炼。在动态博弈中,理性行为人应从最后一轮的子博弈结局,倒推出上一轮的最优选择;进而又以上一轮为起点,推出再上一轮的最佳选择……这种思考方法称做逆向归纳法。对于有限期的动态博弈,运用逆向归纳法可以找出子博弈完美纳什均衡。但对于无限期行动的动态博弈,因没有最后一轮,逆向归纳法失效,目前尚没有一般性的方法来获得子博弈完美均衡。有一类特殊的无限动态博弈,它无限期地重复一个完全相同的博弈,而人们的最终效用是每轮博弈效用的贴现值之和,我们称它为重复博弈。在重复博弈下,人们可以通过惩罚那些偏离均衡行为方式的行动,来获得子博弈完美纳什均衡。这些均衡往往能够支撑一些单轮博弈所无法支持的行为,比如在一轮博弈中对抗可能是最优选择,而在重复博弈下,合作则有可能被实现。

如果在第5章的完全信息静态博弈中加入博弈者的私人信息,就构成了第7章所要介绍的不完全信息静态博弈。在这类博弈中,一个策略需要确定博弈者的每一私人类型

的选择，即策略是从私人类型映射到行动选择的函数。通过假定博弈者对各方的策略函数均能形成共识这一方法，Harsanyi（1967—1968）将博弈者不确定对手的私人类型转化成不确定对手的行动选择。这样，第5章完全信息静态博弈的框架仍可适用，博弈者的最优选择就是能使自己期望效用最大化的行动，由此形成的均衡叫贝叶斯纳什均衡。拍卖是一种不完全信息博弈，因为人们只知道自身对拍卖标的的价值，而并不知道对手对标的价值的评估。现实中存在多种拍卖方式，比如一价密封拍卖、英国式拍卖等。每一种拍卖方式都是一种既定的买卖规则，竞标者参与其中，通过选择标价来使自身效用最大化。卖家总想设计出能使拍卖收入最大化的拍卖方式，这是一个机制设计问题。所谓机制设计，是指合理地选择一个博弈的规则，使得博弈参与者相互竞争所达到的均衡正好是机制设计者所期望看到的结局。要实现设计者的目标，最大的障碍在于参与者拥有的私人信息并不为设计者所知。因此，一个机制只有设计出合适的激励方案，才能保证参与者真实披露自己的信息，这样的机制我们称做激励相容机制。

在第8章，我们将研究不完全信息动态博弈，它由第6章介绍的完全信息动态博弈加入私人信息成分而构成，是四类博弈中最复杂的。对其分析的难点在于博弈者观察到对手的每次行动后，都需要运用贝叶斯法则来更新对对手私人信息分布的判断，而这种新的判断又会影响到博弈者下一轮的行动选择。因此，不完全信息动态博弈下的均衡不仅要求博弈者的策略构成相互最优回应，而且还需配以符合贝叶斯法则的信念。劳动力市场信号传递博弈即是其一个经典应用。

第9章将处理博弈中出现的多均衡现象。Nash（1950）只证明了均衡的存在性，唯一性则不能保证。当一个博弈存在着多个均衡时，就难以对博弈者行为作出准确预测。我们需要剔除一些不合理均衡，其方法一般分为精炼与选择两大类。精炼是在博弈者进行行为选择时增加更多的理性推断，从而使均衡概念更为精细化，使得某些均衡比起另一些显得“更理性”。比如，纳什均衡只要求在均衡的博弈场景下，策略构成相互最优回应即可。但子博弈完美纳什均衡则进一步要求所有博弈场景下（不仅仅是均衡场景），策略都是相互最优。这意味着博弈者还需要考虑均衡之外场景下的选择（更多理性推断）。所以，纳什均衡包含了子博弈完美纳什均衡，而后者则是对前者的精炼。所谓均衡的选择指的是：在既定博弈环境下，人为增加额外考虑成分（与理性推断无关），从而减少合乎规定的均衡数量。比如直接规定在某一特定社会环境下，某均衡（如行人向前行时均靠右）是众望所归的。①

① 考虑一群人共同使用一条道路的博弈。每个人均有两个选择，即前行靠左和前行靠右。这时，所有人都选择前行靠左或前行靠右都是一种稳定状态，因为均能避免相撞。这时到底哪一种均衡会在现实中出现将取决于历史或习俗。

最后在两个附录中,我们分别概括了合作博弈与演进博弈的核心思想与概念。附录A中的合作博弈抽象掉了每个博弈者的行动及次序,直接从博弈者联盟的角度,考查博弈者本身合作(组合)所带来的效用。对于合作效用如何在成员间进行分配,则分别有核与Shapley值两种方法。核是在全体联盟下的一种稳定分配状态,在此状态之下,博弈者之间再形成任何子联盟都不可能给成员带来帕累托改进。而Shapley值则是根据博弈者对联盟总收益的贡献度,来划分成员个人所得的一种效用分配方案。在某类规范的合作博弈下,这种划分将是唯一的。

以上介绍的博弈论内容均假设博弈者完全理性,而附录B中的演进博弈则假设人们有限理性。它假设博弈者(某物种)并不策略性地选择行为,而总是执行某种外生给定的策略,然后再看此策略是否能经受得起其他(变异)策略的入侵。如果执行给定策略比执行变异策略更能提高博弈者效用(生物适应性),那么它就是一个演进稳定的策略。演进稳定策略一定是纳什均衡,反之则不然,因此我们常用其作为纳什均衡的一种精炼。

参考文献

Cournot, A. A. (1838), *Recherches sur les Principes Mathematiquesde la Theorie des Richesses.* Paris: Hachette. (English Translation: *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth.* New York: Macmillan, 1897. (Reprinted New York: Augustus M. Kelley, 1971)).

Bertrand, J. (1883), "Theorie Mathematique de la Richesse Sociale", *Joural des Savants* 67: 499—508.

Edgeworth, F. Y. (1881), *Mathematical Psychics: An Essay on the Application of Mathematics to the Moral Sciences*, London: Kegan Paul. (Reprinted New York: Augustus M. Kelley, 1967).

Harsanyi, J. C. (1967—1968), "Games with Incomplete Information Played by 'Bayesian' Players, Parts Ⅰ, Ⅱ and Ⅲ", *Management Science* 14: 159—182, 320—334 and 486—502.

Nash, J. F. (1950), "Equilibrium Points in N-Person Games", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 36: 48—49.

Nash, J. F. (1951), "Non-Cooperative Games", *Annals of Mathematics* 54: 286—295.

Quine, W. V. O. (1941), *Elementary Logic*, Ginn and Company.

Selten, R. (1965), "Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfragetragheit", *Zeitschrift fur die gesamte Staatswissenschaft* 121: 301—324 and 667—689.

Schelling, T. C. (1960), *The Strategy of Conflict*, Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Shapley, L. S. (1952), "Rand Corporation Research Memorandum, Notes on the N-Person Game III: Some Variants of the von-Neumann-Morgenstern Definition of Solution", RM-817.

Shapley, L. S. (1953), "A Value for N-Person Games", pp. 307—317 in *Contributions to the Theory of Games, Volume II* (*Annals of Mathematics Studies*, 28) (H. W. Kuhn and A. W. Tucker, eds.), Princeton: Princeton University Press.

von Neumann, J., and O. Morgenstern (1944), *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton: Princeton University Press.