3+综合

下册

新世纪高考复习教程

数学

宁 夏 人 民 出 版 社

新世纪高考数学复习教程

下　册

主　编　焕　然　章水云　田发胜　刘志新
副主编　张忠尧　邹吉奎　王国江　张永库
　　　　彭胜涛　王令水　王善臣　孙建文
编　委　宋文全　张念久　孙　坚　郝桔林
　　　　陈水鱼　李振猷　李可进　付秀峰
　　　　李友谊　孙婵洁　陈文远　邹祥明

宁夏人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

新世纪高考数学复习教程. 下册/焕然 主编. 一银川:宁夏人民出版社,2000. 10
ISBN 7—227—02219—6

Ⅰ. 新... Ⅱ. 焕... Ⅲ. 数学课—高中—升学参考资料 Ⅳ. G634. 603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 56081 号

新世纪高考数学复习教程

下　　册

焕　然　主编

责任编辑　孙立明
封面设计　安　明
责任校对　火　月
责任印制　来学军
出版发行　宁夏人民出版社
地　　址　银川市解放西街 47 号
经　　销　新华书店
印　　刷　浙江省富阳市美术印刷厂
开　　本　787×1092　1/16
印　　张　11
字　　数　300 千字
版　　次　2000 年 10 月第 1 版第 1 次印刷
印　　数　7650 册
书　　号　ISBN 7—227—02219—6/G · 383
定　　价　12. 00 元

前　言

本套书是供 **2001** 届高三学生备考复习的辅导用书。上册供第一轮复习用，下册供第二轮复习用。

本书特点：**1．系统性**　以《教学大纲》和《考试说明》为依据，以“3＋综合”高考为目标进行设计，注重知识的系统化、结构化，注重培养学生的数学能力，提高学生的数学素质。面对中上等水平的学生，切实对他们在理解基本概念、掌握基本技能、体会数学思想方法等方面帮助他们，使他们从消极被动的应试教育走向积极主动地提高素质，提高能力的正确方向。按《考试说明》中的要求，把高考数学知识点分解在二十一个专题中。每一个专题由“高考热点分析”、“典型例题研究”和“重点题目训练”等三部分组成；**2．针对性**　根据近几年的高考实际，既考虑到“上线生”，又照顾到尖子生。因此，所选例题、习题以“中档题”为主进行设计；**3．方便学生**　学生用书中的“典型例题研究”和“重点题目训练”留空，学生可将解答过程直接做在书上，且在书后附有“答案”（没有过程），以方便学生自学自测。

我们希望，本书不仅为高三学生提供实用的教材，而且对于减轻教师的负担也会起到积极的作用。当然，正如大家都希望的一样，我们也在竭尽全力，想为读者提供高质量的复习用书，但由于水平、时间等诸多方面的原因，本书仍有许多不尽人意的地方，恳请各位在使用中能将不足之处告诉我们，以便在修订时及时得到改进。

Jerry

编　者

2000 年 **9** 月

目　　录

集合$A=\{x,y|\frac{y-3}{x-2}=1, x,y\in R\}$, $B=\{x,y|y=ax+2, x,y\in R\}$, 若$A\cap B=\phi$ 求a的值。 ∴直线平行或B过点$(2,3)$, ∴ $a=1$或$\frac{1}{2}$

专题 1 幂函数、指数函数、对数函数

1 函数的概念与性质

一 高考热点分析

函数是高中代数中最基本也是最重要的内容. 函数内容主要包括函数和反函数概念、函数的图像、函数的解析式及函数的性质(定义域、值域、奇偶性、单调性、对称性、周期性等), 1999 年全国高考中第(1)—(5)题, 考查了函数的基本概念和性质, 理科第(23)题考查了函数的最值、图像、解析式、定义域等, 考查函数的试题的分值占总分的 30%, 同时比较深入地考查了函数与方程思想的运用. 2000 年又设置两个大题分别考查了函数图像的变换及单调性的应用, 同时对函数与不等式、分类讨论等数学思想方法和运算进行了较为全面的考查.

二 典型例题研究

例 1　若函数 $y=f(x)$ 的反函数是 $y=g(x)$, $f(a)=b$, $ab\neq 0$, 则 $g(b)$ 等于

(A)a　(B)a^{-1}　(C)b　(D)b^{-1}

例 2　设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数, $f(x+2)=-f(x)$, 当 $0\leq x\leq 1$ 时, $f(x)=x$, 则 $f(7.5)=$(B). $f(7.5)=f(8-7.5)=f(-0.5)$

(A)0.5　(B)−0.5　(C)1.5　(D)−1.5

已知集合是$M=\{x,y|y^2=2x\}$, $N=\{x,y|(x-a)^2+y^2=9\}$ 求$M\cap N\neq\phi$的充要条件. (对应有一非负实根) $(x-a)^2+2x=9 \Rightarrow \Delta\geq 0$

$\therefore a\leq 5$　$\because M\cap N\neq\phi$　圆$r=3$

$\therefore -3\leq a\leq 5$ 即$a\in[-3,5]$

注: 若 $\underline{a}$ $(x-a)^2+y^2=9$ 则$a\neq 0$

例 3　设 $f(x)=x^2+px+q$, $A=\{x|x=f(x)\}$, $B=\{x|f[f(x)]=x\}$.

(1)求证: $A\subseteq B$;

(2)如果 $A=\{-1,3\}$, 求 B.

解: 设$x_0\in A$, 则$x_0=f(x_0)$

$f[f(x_0)]=f(x_0)=x_0$ ∴ $A\subseteq B$.

$\{-1,3\}=A$ ∴ $f(-1)=1-p+q=-1$ ①

$f(3)=9+3p+q=3$ ② ①、②联立解得,

$p=-1$, $q=-3$ ∴ $f(x)=x^2-x-3$

∴ $B=\{x|f[f(x)]=x\}$ ∴ $(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)=x \Rightarrow (x^2-x-3)^2-x^2=0$

∴ $(x^2-x-3+x)(x^2-x-3-x)=0$

∴ $B=\{x|\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -1, 3\}$

例 4　已知 a 为实数, 对一切实数 x, $y=x^2-4ax+2a+6$ 的值均为非负数, 求函数 $f(a)=2-a|a+3|$ 的值域.

∵ y为非负数 ∴ $x^2-4ax+2a+6\geq 0$

∴ $\Delta=16a^2-8a-24\leq 0$

∴ $(a+1)(2a-3)\leq 0$

∴ $a\in[-1,\frac{3}{2}]$

∴ $2\leq|a+3|\leq\frac{9}{2}$

$-2\leq a|a+3|\leq\frac{27}{4}$

$-\frac{27}{4}\leq -a|a+3|\leq 2$

$-\frac{19}{4}\leq 2-a|a+3|\leq 4$

∴ $f(a)$的值域为$[-\frac{19}{4},4]$

集合 $A=\{x,y\mid \frac{y-3}{x-2}=1, x,y\in R\}$, $B=\{x,y\mid y=ax+2, x,y\in R\}$. 若 $A\cap B=\phi$ 试求 a 的值。∵ 两直线平行或B过点 $(2,3)$, ∴ $a=1$ 或 $\frac{1}{2}$

三 重点题目训练

(一)选择题

1. 设集合 A 和 B 都是自然数集合 N,映射 $f:A\to B$,把集合 A 中的元素 n 映射到集合 B 中的元素 2^n+n,则在映射 f 下,象 20 的原象是 (C)

(A)2 (B)3 (C)4 (D)5

2. 设函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数,对于任意 $x\in R$, $f(x+1)=\frac{1-f(x)}{1+f(x)}$,当 $0\leq x\leq 1$ 时, $f(x)=2x$,则 $f(5.5)$ 的值是 (B)

$f(x+2)=\frac{1-f(x+1)}{1+f(x+1)}=\frac{1-\frac{1-f(x)}{1+f(x)}}{1+\frac{1-f(x)}{1+f(x)}}=f(x)$

(A)1 (B)-1 (C)$\frac{1}{2}$ (D)$-\frac{1}{2}$

3. 已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数,且是周期为 2 的周期函数,当 $x\in[2,3]$ 时, $f(x)=x$,则 $f(\frac{3}{2})$ 的值为 (B)

(A)$\frac{11}{2}$ (B)$\frac{5}{2}$ (C)$-\frac{5}{2}$ (D)$-\frac{11}{2}$

4. 已知 $f(x)=x^2-bx+c$, $f(0)=3$, $f(1+x)=f(1-x)$,则有 $c=3$, $b=2$ (B)

$x\geq 0$ $a^x\leq b^x$; $x<0$ $b^x<a^x<0$

(A)$f(b^x)\geqslant f(c^x)$ (B)$f(b^x)\leqslant f(c^x)$

(C)$f(b^x)<f(c^x)$ (D)不能确定

5. 已知 $f(x)$ 是以 12 为周期的奇函数,若 $f(3)=1$,则 $f(9)=$ (A)

(A)-1 (B)1 (C)-3 (D)3

6. 设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的偶函数,且在 $[0,+\infty)$ 上是增函数,则 $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$ 的大小关系是 (B)

(A)$f(-2)<f(0)<f(1)$

(B)$f(0)<f(1)<f(-2)$

(C)$f(0)<f(-2)<f(1)$

(D)$f(-2)<f(1)<f(0)$

7. 函数 $f(x)=\log_a x$ 在 $[2,4]$ 上的最大值比最小值大 2,则 a 的值为 (D)

(A)2 或 $\frac{1}{2}$ (B)2

(C)$\sqrt{2}$ (D)$\sqrt{2}$ 或 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

8. 设函数 $f(x)$ 对任意 x、y 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$,且 $f(2)=4$,则 $f(-1)$ 等于 (A)

奇
$f(0)=0$
$f(2)=-f(-2)$

(A)-2 (B)$\pm\frac{1}{2}$ (C)± 1 (D)2

9. 若方程 $a^x-x-a=0$ ($a>0$,且 $a\neq 1$)有两实根,则 a 的取值范围为 (A)

(A)$a>1$ (B)$0<a<1$ (C)$a>0$ (D)$a>2$

10. 设 $y=f(x)$ ($x\in R$)是以 3 为周期的周期函数,且为奇函数,又 $f(1)>1$, $f(2)=a$,那么 a 的取值范围是 (D)

(A)$a>2$ (B)$a<-2$

(C)$a>1$ (D)$a<-1$

(二)填空题

11. 若函数 $f(x)=\log_2(x^2+ax-a)$ 的值域为 R,则实数 a 的取值范围为 $(-\infty,-4]\cup[0,+\infty)$.

$\Delta\geq 0$

12. 设 $f(x)=a\sin x+b\sqrt[3]{x}+4$ ($a,b\in R$),若 $f(\lg\frac{1}{3})=5$,则 $f(\lg 3)=$ 3 .

13. 已知 $f(x)=\frac{1}{3^x-1}+a$ 为奇函数,则常数 $a=$ $\frac{1}{2}$.

14. 对于给定的函数 $f(x)=2^x-2^{-x}$,有下列四个结论:(1) $f(x)$ 的图像关于原点对称;(2) $f(x)$ 在 R 上是增函数;(3) $f^{-1}(2)=\log_2 3$;(4) $f(|x|)$ 有最小值 0.
其中正确结论的序号是 2,1,4 .

如果 $f(x)$ 在 R上是个,那么 $F(x)=f(x)-f(-x)$ 在R上也个 且 $F(x)$ 为奇函数。

(三)解答题

15. 已知函数 $f(x)=\log_a\frac{3+x}{3-x}$ ($a>0$,且 $a\neq 1$).

(1)求 $f(x)$ 的定义域;

(2)判断 $f(x)$ 的奇偶性;

(3)若 $f(x)\geqslant\log_a(2x)$,求 x 的取值范围.

解: $\frac{3+x}{3-x}>0$ ∴ $-3<x<3$

∴ $f(x)$ 的定义域 $(-3,3)$

$f(-x)=\log_a\frac{3-x}{3+x}=\log_a(\frac{3+x}{3-x})^{-1}$

$=-\log_a\frac{3+x}{3-x}=-f(x)$

∴ $f(x)$ 为奇函数。

$\log_a\frac{3+x}{3-x}\geq\log_a 2x$

① 当 $a>1$ $\frac{3+x}{3-x}\geq 2x$ ∴ $\frac{3}{2}\leq x\leq 3$ 或 $0<x\leq 1$

② 当 $0<a<1$ $\frac{3+x}{3-x}\leq 2x$

∴ $1\leq x\leq\frac{3}{2}$ 或 $x\geq 3$ (舍去)

已知函数 $f(x)=x^2+ax+b$. $A=\{x\mid f(x)=2x\}=\{2\}$. 求 $f(x)$ 表达式及单调区间.

$x^2+(a-2)x+b=0$. $\therefore a=-2$, $b=4$. $f(x)=x^2-2x+4=(x-1)^2+3$

$\therefore 4+2(a-2)+b=0$

$(a-2)^2-4b=0$

16. 设 $f(x)=\frac{1}{x+2}+\lg\frac{1-x}{1+x}$.

(1)试判断 $f(x)$ 的单调性,并给出证明; $f(x_1)-f(x_2)$

(2)若 $f(x)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$,证明 $f^{-1}(x)=0$ 有唯一解;

(3)解关于 x 的不等式 $f[x(x-\frac{1}{2})]<\frac{1}{2}$.

解: $\because x+2\neq 0$, $\frac{1-x}{1+x}>0$

$\therefore -1<x<1$ 令 $-1<x_1<x_2<1$

~~$f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{x_1+2}+\lg\frac{1-x_1}{1+x_1}-\frac{1}{x_2+2}-\lg\frac{1-x_2}{1+x_1}$~~

~~$=\frac{x_2-x_1}{(x_1+2)(x_2+2)}+\lg\frac{(1-x_1)(1+x_2)}{(x_1+1)(1-x_2)}$~~ $\because g(x)=\frac{1}{x+2}$

在 $(-1,1)\downarrow$. $u(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$ 在 $(-1,1)\downarrow$

$\therefore f(x)$ 在 $(-1,1)\downarrow$. $=\lg(\frac{2}{1+x}-1)$ $f^{-1}(x)\uparrow$

$\because f(0)=\frac{1}{2}$ $\therefore f^{-1}(x)=0$ 有一个解为 $\frac{1}{2}$

假设还有一根 $x_0\neq\frac{1}{2}$, 即 $f(0)=x_0\neq\frac{1}{2}$ 与

前等式矛盾. $\therefore f^{-1}(x)=0$ 有唯一解.

$\frac{1}{x(x-\frac{1}{2})+2}+\lg\frac{1-x(x-\frac{1}{2})}{1+x(x+\frac{1}{2})}<\frac{1}{2}$

$\lg\frac{1-x^2+\frac{1}{2}x}{1+x^2-\frac{1}{2}x}<\frac{1}{2}=\lg\sqrt{10}$

$\begin{cases}\frac{1-x^2+\frac{1}{2}x}{1+x^2-\frac{1}{2}x}>0\\ \frac{1-x^2+\frac{1}{2}x}{1+x^2-\frac{1}{2}x}<\sqrt{10}\end{cases}\Rightarrow(\frac{1-\sqrt{17}}{4},0)\cup(\frac{1}{2},\frac{1+\sqrt{17}}{4})$

17. 设 $f(x)=\frac{a}{x}+bx$ $(a>0,b>0)$,求 $f(x)$ 的单调区间,确定其增减性,并证明你的结论.

$\because f(x)=\frac{a}{x}+bx$. $f(-x)=-\frac{a}{x}-bx=-f(x)$

$\therefore f(x)$ 为奇函数. 设 $x_1<x_2$ $\therefore f(x_1)-f(x_2)$

$=\frac{a}{x_1}+bx_1-\frac{a}{x_2}-bx_2=b(x_1-x_2)+a(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2})$

$=b(x_1-x_2)+\frac{a(x_2-x_1)}{x_1x_2}=(x_1-x_2)(b-\frac{a}{x_1x_2})$

$=(x_1-x_2)(b-\frac{a}{x_1x_2})=b\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}(x_1x_2-\frac{a}{b})$

1)当 $x_1,x_2\in(0,\sqrt{\frac{a}{b}}]$ 时 $x_1-x_2<0$, $x_1x_2-\frac{a}{b}\leq 0$

$\therefore f(x_1)-f(x_2)>0$ 即 $f(x)\downarrow$. 同理在 $[-\sqrt{\frac{a}{b}},0)$.

$f(x)\downarrow$. 2)当 $x_1,x_2\in[\sqrt{\frac{a}{b}},+\infty)$, $x_1-x_2<0$

$x_1x_2-\frac{b}{a}>0$ $\therefore f(x_1)-f(x_2)<0$ 即 $f(x)\uparrow$

同理在 $(-\infty,-\sqrt{\frac{a}{b}}]$, $f(x)\uparrow$

$\therefore f(x)$ 的单调 $\begin{cases}\text{递减区间}: [-\sqrt{\frac{a}{b}},0)\cup(0,\sqrt{\frac{a}{b}}]\\ \text{递增区间}: (-\infty,-\sqrt{\frac{a}{b}}]\cup[\sqrt{\frac{a}{b}},+\infty)\end{cases}$

18. 设函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-ax$,其中 $a>0$.

(1)解不等式 $f(x)\leq 1$;

(2)求 a 的取值范围,使函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调函数.(2000年高考题).

$\sqrt{x^2+1}-ax\leq 1$ $\boxed{1+ax\geq 1,\ \therefore x\geq 0}$

$x^2+1\leq(1+ax)^2$

$x^2+1\leq ax^2+1+2ax$

$(1-a^2)x^2-2ax\leq 0$

$x[(1-a^2)x-2a]\leq 0$

$0\leq x\leq\left|\frac{2a}{1-a^2}\right|$

当 $0<a<1$ 时. $x\in[0,\frac{2a}{1-a^2}]$

当 $a\geq 1$ 时. $x\in[0,+\infty)$

(II) 令 $0\leq x_1<x_2<+\infty$

$f(x_1)-f(x_2)=\sqrt{x_1^2+1}-ax_1-\sqrt{x_2^2+1}+ax_2$

$=\sqrt{x_1^2+1}-\sqrt{x_2^2+1}-a(x_1-x_2)$

$=\frac{x_1^2+1-(x_2^2+1)}{\sqrt{x_1^2+1}-\sqrt{x_2^2+1}}-a(x_1-x_2)$

$=(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-a)(x_1-x_2)$

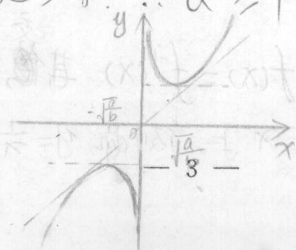
$\because x_1-x_2<0$.

且 $a\geq 1$. $\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}<1$

$\therefore\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-a<0$

$\therefore f(x_1)-f(x_2)<0$

即 $f(x_2)>f(x_1)$ $\therefore f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)\uparrow$. $\therefore a\geq 1$



2 指数函数和对数函数

一 高考热点分析

主要考查内容有：指数函数、对数函数的图像和性质，指数方程、对数方程，以及指数不等式、对数不等式，重点在综合性和应用性题目上．主要考查的数学思想方法有：分类讨论、同解变形、数形结合、化归等．

二 典型例题研究

例 1 已知 $y=\log_a(2-ax)$ 在 $[0,1]$ 上是 x 的减函数，则 a 的取值范围是 （B）．(95年高考题)

(A) $(0,1)$ B $(1,2)$ (C) $(0,2)$ (D) $[2,+\infty)$

例 2 已知函数 $f(x)=\lg(ax^2+2x+1)$．

(1)若函数 $f(x)$ 的定义域为 R，求实数 a 的取值范围；

(2)若函数 $f(x)$ 的值域为 R，求实数 a 的取值范围．

解：$ax^2+2x+1>0$ ∵ $f\in R$

∴ $\Delta<0$ 即 $4-4a<0$，$a>0$

∴ $a>1$

2) $ax^2+2x+1>0$ 且 $f(x)\in R$

则 $ax^2+2x+1>0$ 可取遍一切正数

∴ $a\geq 0$． $\Delta\geq 0$． $4-4a\geq 0$

∴ $a\in[0,1]$

$f(x)=f^{-1}(x)$ 其交点不一定都落在直线 $y=x$ 上。例如 $y=\frac{1}{x}$．

例 3 已知函数 $f(x)=\log_a\frac{2x+b}{2x-b}$ $(a>0,a\neq 1,b<0)$．

(1)求函数 $f(x)$ 的定义域；

(2)判断函数 $f(x)$ 的奇偶性，并予以证明；

(3)求函数 $f(x)$ 的反函数．

解：$\frac{2x+b}{2x-b}>0$ ∴ $x<\frac{b}{2}$ 或 $x>-\frac{b}{2}$

∵ $f(-x)=\log_a\frac{-2x+b}{-2x-b}=\log_a\left(\frac{2x-b}{2x+b}\right)$

$=\log_a\left(\frac{2x+b}{2x-b}\right)^{-1}$

$=-\log_a\frac{2x+b}{2x-b}=-f(x)$

∴ $f(x)$ 为奇函数。

令 $f(x)=y=\log_a\frac{2x-b}{2x+b}$

∴ $a^y=\frac{2x-b}{2x+b}$

∴ $x=\frac{b}{2}\left(\frac{a^y+1}{a^y-1}\right)$

∴ $f^{-1}(x)=\frac{b(a^x+1)}{2(a^x-1)}$ $(x\in R,且x\neq 0)$

$M=\{x|\frac{\lg 2ax}{\lg(a+x)}<1\}$，$N=\{x|\frac{x-2}{1-x}\geqslant 0\}$ 若 $M\subseteq N$，求 $a\in$？

$\Rightarrow N=\{x|1<x\leqslant 2\}$

例 4　已知 $a>0,a\neq 1$，试求使方程 $\log_a(x-ak)=\log_{a^2}(x^2-a^2)$ 有解的 k 的取值范围．

解：$\begin{cases}x-ak>0\\x^2-a^2>0\\(x-ak)^2=x^2-a^2\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}x-ak>0\\(x-ak)^2=x^2-a^2\end{cases}$

$\therefore 2kx=a(k^2+1)$

① $k=0$．由于 $a>0$．无解　② 当 $k\neq 0$．

$x=\frac{a(k^2+1)}{2k}$，代入 $x-ak>0$．得：

$\frac{a(k^2+1)}{2k}-ak>0$ $\therefore a\frac{(1+k)(1-k)}{2k}>0$

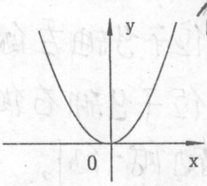
$\therefore\frac{(1+k)(k-1)}{2k}<0$　$\therefore k\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$

三　重点题目训练

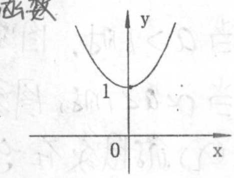
(一)选择题

1. 函数 $y=a^{|x|}(a>1)$ 的图像是　　(B)

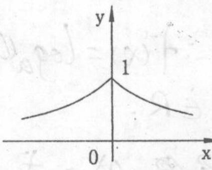
偶函数



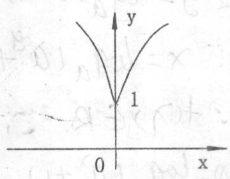
(A)



(B)



(C)



(D)

2. 函数 $y=\frac{1+a^{2x}}{1-a^{2x}}$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$　　(A)

(A)是奇函数　(B)是奇函数又是偶函数

(C)是偶函数　(D)是非奇非偶函数

3. 将 $y=2^x$ 的图像　　(D)

(A)先向左平移 1 个单位　$y=2^{x+1}$

(B)先向右平移 1 个单位　$y=2^{x-1}$

(C)先向上平移 1 个单位

(D)先向下平移 1 个单位

再作关于直线 $y=x$ 对称的图像，可得到函数 $y=\log_2(x+1)$ 的图像．

4. 若全集 $I=R$，$A=\{x|\sqrt{x+1}\leqslant 0\}$，$B=\{x|\lg(x^2-2)>\lg x\}$，则 $A\cap\overline{B}$ 是　　(D)

(A)$\{2\}$　(B)$\{-1\}$

(C)$\{x|x\leqslant -1\}$　(D)$\varnothing$

5. 定义在 R 上的任意函数 $f(x)$ 都可以表示成一个奇函数 $g(x)$ 和一个偶函数 $h(x)$ 之和，如果 $f(x)=\lg(10^x+1)$，$x\in(-\infty,+\infty)$，那么　　(C)

$f(x)=g(x)+h(x)$

$f(-x)=g(-x)+h(-x)\Rightarrow f(-x)=-g(x)+h(x)$

(A)$g(x)=x$，$h(x)=\lg(10^x+10^{-x}+2)$　$\therefore h(x)=\frac12[f(x)+f(-x)]$

(B)$g(x)=\frac12[\lg(10^x+1)+x]$，$h(x)=\frac12[\lg(10^x+1)-x]$　$g(x)=\frac12[f(x)-f(-x)]$　$\therefore g(x)=\frac{x}{2}$

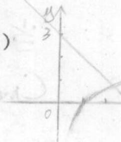
(C)$g(x)=\frac{x}{2}$，$h(x)=\lg(10^x+1)-\frac{x}{2}$

(D)$g(x)=-\frac{x}{2}$，$h(x)=\lg(10^x+1)+\frac{x}{2}$

6. 方程 $\lg x+x-3=0$ 的解所在的区间为　(C)

(A)$(0,1)$　(B)$(1,2)$

(C)$(2,3)$　(D)$(3,+\infty)$



7. 0.3^2，$\log_2 0.3$，$2^{0.3}$ 这三个数之间的大小顺序是　　(C)

(A)$0.3^2<2^{0.3}<\log_2 0.3$

(B)$0.3^2<\log_2 0.3<2^{0.3}$

(C)$\log_2 0.3<0.3^2<2^{0.3}$

(D)$\log_2 0.3<2^{0.3}<0.3^2$

8. 如果 $\log_a 2>\log_b 2>0$，那么　　(A)

(A)$1<a<b$　(B)$1<b<a$

(C)$0<a<b<1$　(D)$0<b<a<1$

9. 已知函数 $f(x)=\log_a(-x^2+\log_{2a}x)$ 对任意 $x\in(0,\frac12)$ 都有意义，则实数 a 的取值范围是

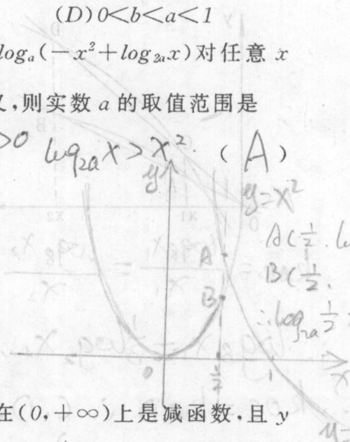
$\Leftrightarrow -x^2+\log_{2a}x>0$　$\log_{2a}x>x^2$　　(A)

(A)$\frac{1}{32}\leqslant a<\frac12$

(B)$\frac{1}{64}\leqslant a<\frac12$

(C)$\frac{1}{128}\leqslant a<\frac12$

(D)$\frac{1}{16}\leqslant a<\frac12$



$A(\frac12,\log_{2a}\frac12)$　$B(\frac12,\frac14)$　$\therefore\log_{2a}\frac12\geqslant\frac14$

10. 若 $y=\log_{(a^2-1)}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，且 y

$0<2a<1$　$0<a<\frac12$

$(\log_{2a}x)_{min}=\log_{2a}\frac12\geqslant\frac14$　$\therefore 2a\geqslant\frac{1}{16}$

$(2a)^{\frac14}\geqslant\frac12$　$a\geqslant\frac{1}{32}$

$=a^x$ 是增函数,则 (D)

(A) $|a|>1$ (B) $|a|<\sqrt{2}$

(C) $1<|a|<\sqrt{2}$ (D) $1<a<\sqrt{2}$

(二)填空题

11. 设 $f(x)=4^x-2^{x+1}(x\geqslant 0)$,则 $f^{-1}(0)=$ 1 .

12. 若 $f(x)=x^2+lg(x+\sqrt{1+x^2})$,且 $f(2)=4.627$,则 $f(-2)=$ 3.373 .

$f(2)-f(-2)=2lg(x+\sqrt{1+x^2})$ $\therefore f(2)=f(-2)-2lg(x+\sqrt{1+x^2})$

13. 若 $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}6=-2(a+1)$,则 $\log_2 1.5=$ a−1 .

14. 已知 $a>1, m>p>0$,若关于 x 的方程 $x+\log_a x=m$ 的解是 p,那么方程 $x+a^x=m$ 的解是 m−p .

$\log_a p=m-p \Rightarrow x=m-p$

$a^x=\log_a p$

(三)解答题

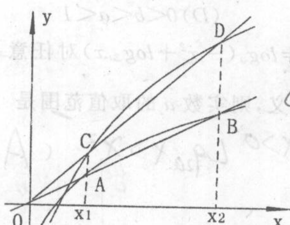
15. 设 $y=lg\dfrac{2^x+3^x+9^xc}{7}$ 在 $(-\infty,1]$ 上有意义,求实数 c 的取值范围.

解: $\dfrac{2^x+3^x+9^xC}{7}>0$, $x\in(-\infty,1]$ ∵在 $(-\infty,1]$ 2^x 3^x 9^x 为↑ ∴ ① 为↑ ∴

当 $x=1$ 时最得最大值 $C=-\dfrac{2^x+3^x}{9^x}>0$

$C_{min}=-\dfrac{5}{9}$ ∴ $C\in(-\dfrac{5}{9},+\infty)$

16. 已知过原点 O 的一条直线与函数 $y=\log_8 x$ 的图像交于 A、B 两点,分别过 A、B 作 y 轴的平行线与函数 $y=\log_2 x$ 的图像交于 C、D 两点,证明点 C、D 和原点在同一条直线上.



$A(x_1,\log_8 x_1)$

$B(x_2,\log_8 x_2)$

$C(x_1,\log_2 x_1)$

$D(x_2,\log_2 x_2)$

$k_{OC}=\dfrac{\log_2 x_1}{x_1}$

$k_{AB}=\dfrac{\log_8 x_1}{x_1}=\dfrac{\log_8 x_2}{x_2}$ $k_{OD}=\dfrac{\log_2 x_2}{x_2}$

$\therefore \log_8 x_1=\frac{1}{3}\log_2 x_1$, $\log_8 x_2=\dfrac{\frac{1}{3}\log_2 x_2}{x_2}$

$\therefore k_{OC}=k_{OD}$ ∴ C, D 与原点在同一直线上。

17. 解不等式 $\sqrt{3\log_a x-2}<2\log_a x-1$ $(a>0, a\neq 1)$.

解: $\begin{cases}x>0\\3\log_a x-2>0\end{cases}$ $\log_a x>\frac{2}{3}$

令 $\log_a x=t$, 则原式可化成

$\sqrt{3t-2}<2t-1$ $\therefore (2t-1)^2>3t-2$

$\therefore 4t^2-7t+3>0$ $\therefore t<\frac{3}{4}$ 或 $t>1$

当 $a>1$ 时 $\frac{2}{3}<\log_a x<\frac{3}{4}$ 或 $\log_a x>1$

$\therefore a^{\frac{2}{3}}<x<a^{\frac{3}{4}}$ 或 $x>a$

当 $0<a<1$ 时, $a^{\frac{3}{4}}<x<a^{\frac{2}{3}}$ 或 $0<x<a$

∴不等式的解集为:

$a>1$ 时, $x\in(a^{\frac{2}{3}},a^{\frac{3}{4}})\cup(a,+\infty)$

$0<a<1$ 时, $x\in(a^{\frac{3}{4}},a^{\frac{2}{3}})\cup(0,a)$

18. 已知函数 $f(x)=\log_a(a^x-1)$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$.

(1)证明函数 $f(x)$ 的图像在 y 轴的一侧;

(2)求函数 $y=f(2x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像的交点坐标.

解: 由题知: $a^x-1>0$ $\therefore a^x>1$

当 $a>1$ 时, 图象位于y轴左侧

当 $0<a<1$ 时, 图象位于y轴右侧

∴ $f(x)$ 的图象在y轴的一侧。

令 $y=\log_a(a^x-1)$, $a^y=a^x-1$

$\therefore x=\log_a(a^y+1)$ $\therefore f^{-1}(x)=\log_a(a^x+1)$

$\because f^{-1}(x)\in R$ $\therefore x\in R$.

$\begin{cases}f^{-1}(x)=\log_a(a^x+1)\\f(2x)=\log_a(a^{2x}-1)\end{cases}$ 解得 $a^x=2$ 或 -1(舍去)

$\therefore x=\log_a 2$ $y=\log_a 3$

∴交点坐标为 $(\log_a 2, \log_a 3)$

专题 2　二次函数

3　二次函数的基本问题

一　高考热点分析

1. 二次函数可设为三种形式：

(1) $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$；

(2) $y=a(x+h)^2+k\ (a\neq 0)$；

(3) $y=a(x-x_1)(x-x_2)\ (a\neq 0)$.

要在具体问题中选用最佳形式.

2. 二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 的图像是以直线 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 为对称轴的抛物线，顶点坐标为 $\left(-\dfrac{b}{2a},-\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$，它与 x 轴的交点的横坐标是方程 $f(x)=0$ 的实根；它在 x 轴上截得的线段长为 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$；当 $a>0,\Delta<0$ 时，有 $f(x)>0$ 恒成立；当 $a<0$ 且 $\Delta<0$ 时，有 $f(x)<0$ 恒成立.

3. 二次函数问题经常涉及到一元二次方程、一元二次不等式等问题，借助其图像，可以有助于解答此类问题.

二　典型例题研究

例 1　已知二次函数 $f(x)$ 满足条件 $f(1+x)=f(1-x)$，且 $y_{max}=15$，又 $f(x)=0$ 的两根立方和等于 17. 求 $f(x)$ 的解析式.

解：∵ $f(x+1)=f(1-x)$ ∴设 $f(x)$ 的表达式为 $f(x)=a(x-1)^2+15$

∴ $y=ax^2+a-2ax+15$

∵当 $y=0$ 时，两根立方和为 17

∴ $x_1+x_2=2$，$x_1x_2=\dfrac{15+a}{a}=1+\dfrac{15}{a}$

$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2-x_1x_2)$

$=(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2-x_1x_2]$

$=2\left(4-3\cdot\dfrac{15+a}{a}\right)=17$

∴ $4-\dfrac{45}{a}-3=\dfrac{17}{2}$

$4-3-\dfrac{17}{2}=\dfrac{45}{a}$ ∴ $a=-6$

∴ $f(x)=-6(x-1)^2+15$

$=-6x^2+12x+9$

例 2　如果函数 $f(x)=x^2+bx+c$ 对任意实数 x 都有 $f(1+x)=f(-x)$，那么（ C ）.

(A) $f(-2)<f(0)<f(2)$

(B) $f(0)<f(-2)<f(2)$

(C) $f(0)<f(2)<f(-2)$

(D) $f(2)<f(0)<f(-2)$

$x=\dfrac{1}{2}$

$f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 为偶函数 $\Rightarrow b=0$

例 3　已知二次函数 $f(x)$ 的二次项系数是负值，对任意的实数 x 恒有 $f(2+x)=f(2-x)$ 成立，试问：在 $f(1-2x^2)$ 与 $f(1+2x-x^2)$ 满足什么关系时，才有 $-2<x<0$.

解：由题知，$f(x)$ 的对称轴为直线 $x=2$ 且二次项系数为负值，∴在 $(-\infty,2]$ $f(x)\uparrow$，在 $[2,+\infty)$，$f(x)\downarrow$

∵ $1-2x^2\leq 1$，$1+2x-x^2=2-(x-1)^2\leq 2$

∴对于 x 为任何值，都有 $1-2x^2\in(-\infty,2]$，$1+2x-x^2\in(-\infty,2]$

则只须考虑：$1-2x^2>1+2x-x^2$ ① 或 $1-2x^2<1+2x-x^2$ ② 两种情况。

由①得 $-2<x<0$.

由②得 $x<-2$ 或 $x>0$

∴当 $f(1-2x^2)>f(1+2x-x^2)$ 时，才有 $-2<x<0$。

例 4　某工厂生产甲、乙两种产品，设投入资金 x(万元)，甲产品获利润 y_1(万元)，乙产品获利润 y_2(万元)，根据经验，投入资金与所获利润的函数关系式是：$y_1=\frac{1}{4}x$，$y_2=\frac{5}{4}\sqrt{x}$，现有资金10万元准备投入甲、乙两种产品的生产，为获得最大的总利润，生产甲、乙两种产品应各投入资金多少万元？能获得最大的总利润为多少万元？

解：设甲投入 $10-x$ 万元，乙投入 x 万元，时，可获得最大利润 y_{max}

$y=y_1+y_2=\frac{1}{4}(10-x)+\frac{5}{4}\sqrt{x}$，$x\in[0,10]$

$=-\frac{x}{4}+\frac{5}{4}\sqrt{x}-\frac{5}{2}$　令 $\sqrt{x}=t$，$t\in[0,\sqrt{10}]$

$\therefore y=-\frac{1}{4}t^2+\frac{5}{4}t-\frac{5}{2}=-\frac{1}{4}(t^2+5t+\frac{25}{4})+\frac{5}{2}+\frac{5}{16}$

$=-\frac{1}{4}(t+\frac{5}{2})^2+\frac{65}{16}$　$\therefore$ 当 $t=\frac{5}{2}$ 时，有最大值 $y_{max}=\frac{65}{16}$ 万元，$\therefore x=\frac{25}{4}$，即当对甲投入 $\frac{75}{4}$ 万元，对乙投入 $\frac{25}{4}$ 万元，可获得最大利润 $\frac{65}{16}$ 万元。

三　重点题目训练

(一)选择题　$b=-2$　(2,

1. 设 $f(x)=x^2+bx+c$，且 $f(-1)=f(3)$，则
$x=1$
(B)

(A) $f(1)>c>f(-1)$　(B) $f(1)<c<f(-1)$

(C) $c>f(-1)>f(1)$　(D) $c<f(-1)<f(1)$

2. 若 $f(x)=(m-1)x^2+2mx+3$ 是偶函数，则 $f(x)$ 在 $(-5,-2)$ 上　(A)

(A)是增函数　(B)是减函数

(C)增减性与 m 有关　(D)无单调性

3. 设 $k\in R$，x_1、x_2 是方程 $x^2-2kx+1-k^2=0$ 的两个实根，则 $x_1^2+x_2^2$ 的最小值是　(C)

(A) -2　(B) 0　(C) 1　(D) 2

4. 函数 $y=x^2-2x+3$ 在闭区间 $[0,m]$ 上有最大值 3，最小值 2，则 m 的取值范围是　(D)

(A) $[1,+\infty)$　(B) $[0,2]$

(C) $(-\infty,2]$　(D) $[1,2]$

5. 函数 $y=2-\sqrt{4x-x^2}$ $(0\leqslant x\leqslant 4)$ 的值域是　(B)

(A) $[-2,2]$　(B) $[0,2]$

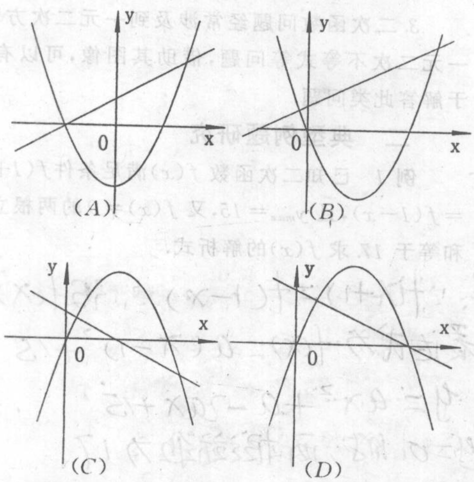
(C) $(1,2]$　(D) $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

6. 若 $y=(m^2-m)x^{m^2+m}$ $(x\in R)$ 是二次函数，则 m 的取值为　(B)

(A) 1　(B) -2

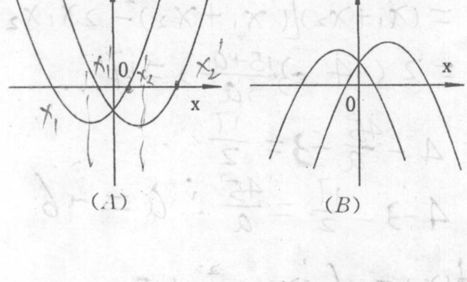
(C) 1 或 -2　(D)以上都不对

7. $y=ax^2+bx$ 与 $y=ax+b$ $(ab\neq 0)$ 的图像只可能是　(D)



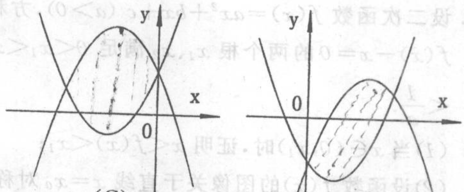
(A)　(B)　(C)　(D)

8. 两个二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 与 $g(x)=bx^2+ax+c$ 的图像只可能是　(D)



(A)　(B)

7667 1056497



(C) (D)

9. 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 图像的顶点在第一象限，与 x 轴的两个交点分居原点的两侧，那么 a、b、c 的符号为 (B)

(A) $a<0,b<0,c<0$ (B) $a<0,b>0,c>0$

(C) $a<0,b<0,c>0$ (D) $a<0,b>0,c<0$

10. 抛物线 $y=x^2+(m-2)x+5-m$ 与 x 轴的交点都在点 $(2,0)$ 的右方，则 m 的取值范围是 (A)

(A) $(-5,-4]$ (B) $(-\infty,-4]$

(C) $(-\infty,-2)$ (D) $(-\infty,-5)\cup(-5,4)$

(二)填空题

11. 已知函数 $y=2x^2+4(a-3)x+5$ 在区间 $(-\infty,-3)$ 上是减函数，则 a 的取值范围是 $(-\infty, 6]$. $y=2[x+(a-3)]^2+5-2(a-3)^2$

12. 二次函数 $y=f(x)=ax^2+2ax+1$ 在区间 $[-3,2]$ 上的最大值是 4，则 a 的值为 -3 或 $\frac{3}{8}$

13. 若二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 的图像与 x 轴有公共点，则它在 x 轴上截得的线段长可用 a、b、c 表示为 $\sqrt{b^2-4ac}/|a|$

14. 关于 x 的方程 $2kx^2-2x-3k-2=0$ 的两实根一个小于 1，另一个大于 1，则实数 k 的取值范围是 $(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$. $\begin{cases} k>0 & f(1)<0 \\ k<0 & f(1)>0 \end{cases}$

(三)解答题

15. 二次函数 $f(x)=x^2-4ax+a+\frac{1}{4}$ 对 $0<x<1$ 恒为正，在此情况下求 a 的取值范围。

解：∵ 对于 $x\in(0,1)$ $f(x)$ 恒正.

∴ $f(0)>0 \Rightarrow a+\frac{1}{4}>0$ ∴ $a>-\frac{1}{4}$

$f(x)=(x-2a)^2+a+\frac{1}{4}-4a^2$ $f(1)\geq 0$

∴ $a\leq\frac{5}{12}$ ∴ $-\frac{1}{4}\leq a\leq\frac{5}{12}$

当 $-\frac{1}{4}\leq a<0$ 时，$f(0)\geq 0$

当 $0\leq a\leq\frac{5}{12}$，$\Rightarrow 0<2a<\frac{10}{12}$，则 $a+\frac{1}{4}-4a^2>0$

∴ $\frac{1-\sqrt{5}}{8}<a<\frac{1+\sqrt{5}}{8}$ ∴ $0\leq a<\frac{1+\sqrt{5}}{8}$

∴ $-\frac{1}{4}\leq a<\frac{1+\sqrt{5}}{8}$

16. 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，有 $f(-1)=0$，问是否存在常数 a、b、c，使 $x\leq f(x)\leq\frac{1}{2}(1+x^2)$ 对一切实数 x 都成立，并证明结论。

解：$f(-1)=0 \Rightarrow a-b+c=0$ $\Rightarrow b=\frac{1}{2}$

$x=\frac{1}{2}(1+x^2)=1 \Rightarrow a+b+c=1$

$c=\frac{1}{2}-a$ 代入不等式，则有

$x\leq ax^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-a\leq\frac{1}{2}(1+x^2)$

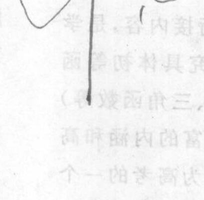
由 $x\leq ax^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-a$ 在 R 上恒成立

则 $ax^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-a\geq 0$ ∴ $\begin{cases} a>0 \\ \Delta\leq 0 \end{cases}$

∴ $a=\frac{1}{4}$. 同理，对于 $ax^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-a\leq\frac{1}{2}(1+x^2)$ 在 R 上恒成立，则有 $(a-\frac{1}{2})x^2+\frac{1}{2}x-a\leq 0$

∴ $(\frac{1}{2}-a)x^2-\frac{1}{2}x+a\geq 0$ ∴ $\begin{cases} \frac{1}{2}-a>0 \\ \Delta\geq 0 \end{cases}$

∴ $a=\frac{1}{4}$ 故当 $a=\frac{1}{4}$ 时，不等式组在 R 上都成立 ∴ 存在常数 $a=\frac{1}{4}$，$b=\frac{1}{2}$ $c=\frac{1}{4}$. 使 $x\leq f(x)\leq\frac{1}{2}(1+x^2)$ 对于一切实数都成立。



17. 某商品在最近的 100 天内的价格 $f(t)$（元）与时间 t（天）的函数关系是：

$$f(t)=\begin{cases}\frac{1}{4}t+22 & (0\leqslant t\leqslant 40, t\in N)\\ -\frac{t}{2}+52 & (40\leqslant t\leqslant 100, t\in N)\end{cases}$$

，销售量 $g(t)$ 与时间 t 的函数关系是：$g(t)=-\frac{1}{3}t+\frac{109}{3}$ $(0\leqslant t\leqslant 100, t\in N)$. 求这种商品在 100 天内的日销售额 $s(t)$ 的最大值.（日销售额＝日价格×日售量）

$S(t)=f(t)\cdot g(t)$

当 $t\leq 40$ 时. $S(t)=(\frac{1}{4}t+22)(-\frac{1}{3}t+\frac{109}{3})$

$=-\frac{t^2}{12}-\frac{21}{12}t+\frac{2398}{3}=-\frac{1}{12}(t-\frac{21}{2})^2+\frac{147}{16}$

$+\frac{2398}{3}$ ∴ $S(t)_{max}=808.5$ $(t=\frac{22}{2}=11)$

当 $40<t\leq 100$ 时. $S(t)=(-\frac{t}{2}+52)(-\frac{t}{3}+\frac{109}{3})$

$=\frac{1}{6}(t-\frac{213}{2})^2-\frac{25}{24}$ ∴ $S(t)_{max}=736$.

$(t=40)$ ∵ $808.5>736$

∴ $S(t)_{max}=808.5$

18. 设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a>0)$，方程 $f(x)-x=0$ 的两个根 x_1、x_2 满足 $0<x_1<x_2<\frac{1}{a}$.

(1) 当 $x\in(0,x_1)$ 时，证明 $x<f(x)<x_1$；

(2) 设函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=x_0$ 对称，证明 $x_0<\frac{x_1}{2}$.

4　二次函数的综合运用

一　高考热点分析

二次函数作为初高中数学的衔接内容，是学生学习函数的一般研究方法和研究具体初等函数（如幂函数、指数函数、对数函数、三角函数等）的桥梁；同时由于二次函数有着丰富的内涵和高等数学背影，使得二次函数问题成为高考的一个命题热点，历考而不衰. 对于二次函数的考查主要体现在：

1. 理解二次函数的概念，会依据条件求它的解析式（用"待定系数法"可选用一般式、两点式、顶点式）.

2. 熟练掌握二次函数的图像（如开口，对称轴，顶点，各种定位条件等），从图像上观察（必要时给出证明）它的一些性质（如单调性、最值、值域，特别是给定区间的最值、值域等），并利用它们来解决问题.

3. 考查二次函数有关知识应用于方程（如探求一元二次方程实数根分布的充要条件）、不等式（如研究含参的二次不等式）、三角、解几、复数、数列和应用性问题.

根据二次函数的地位和历年高考考查的特点可以预测，考查二次函数的基础知识和应用将仍是高考命题的一个重点；同时可综合考查二次函数、二次方程与二次不等式三者之间的内在联系，深入考查二次函数的图像和性质. 这些都对学生的逻辑思维能力以及灵活运用数学知识和方法分析、解决问题的能力有较高的要求.

二　典型例题研究

例 1　已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx$ （a、b 为常数，且 $a\neq 0$）满足条件：$f(-x+5)=f(x-3)$，且方程 $f(x)=x$ 有等根.

（1）求 $f(x)$ 的解析式；

（2）是否存在实数 m、n （$m<n$），使 $f(x)$ 的定义域和值域分别为 $[m,n]$ 和 $[3m,3n]$，如果存在，求出 m、n 的值；如不存在，说明理由.

解：1) 由题知 $f(-x+5)=f(x-3)$

$\therefore -\frac{b}{2a}=1 \therefore b=-2a$

$\because f(x)=x$ 有等根，即 $ax^2+bx=x$

$\therefore ax^2+(b-1)x=0 \Rightarrow \Delta=0$

$\therefore (b-1)^2=0 \therefore b=1$ 得 $a=-\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x$.

$f(x)=-\frac{1}{2}(x^2-2x+1)+\frac{1}{2}$

$=-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)\leq\frac{1}{2} \quad \therefore 3n\leq\frac{1}{2} \quad \therefore n\leq\frac{1}{6}$

$\therefore$ 在 $[m,n]$，$f(x)\uparrow \quad f(m)=3m$

$f(n)=3n \quad \therefore \begin{cases} -\frac{1}{2}m^2+m=3m \\ -\frac{1}{2}n^2+n=3n \end{cases}$

$\because m<n \quad \therefore m=-4, \ n=0$

例 2　已知函数 $f(x)=x^2+bx+c$ 为偶函数，$g(x)=f[f(x)]$. 如果点 (x_0,y_0) 在函数 $f(x)$ 的图像上，则点 (x_0,y_0^2+1) 在函数 $g(x)$ 的图像上.

（1）求 b、c 的值；

（2）设 $F(x)=g(x)-\lambda f(x)$，问是否存在实数 λ，使得 $F(x)$ 在 $(-\infty,-1]$ 上为减函数，在 $[-\frac{\sqrt{2}}{2},0]$ 上为增函数？如果存在，请找出 λ 的所有值来；如果不存在，说明理由.

解：$\because f(x)$ 为偶函数 $\therefore b=0$

$\therefore f(x)=x^2+c \quad g(x)=(x^2+c)^2+c$

$\because$ 点 (x_0,y_0) 在 $f(x)$ 上，点 (x_0,y_0^2+1) 在 $g(x)$ 上 $\therefore \begin{cases} y_0=x_0^2+c \\ y_0^2+1=(x_0^2+c)^2+c \end{cases}$

$\therefore c=1$

$\therefore f(x)=x^2+1, \ g(x)=(x^2+1)^2+1$

$F(x)=(x^2+1)^2+1-\lambda(x^2+1)$

$=x^4+(2-\lambda)x^2+(2-\lambda)$

设 $-\infty<x_1<x_2\leq-1 \quad \therefore f(x_1)>f(x_2)$

$\Rightarrow x_1^4+(2-\lambda)x_1^2+(2-\lambda)-[x_2^4+(2-\lambda)x_2^2+2-\lambda]>0$

$x_1^4-x_2^4+(2-\lambda)(x_1^2-x_2^2)>0$

$(x_1^2-x_2^2)(x_1^2+x_2^2+2-\lambda)>0$

$\therefore x_1^2+x_2^2+2-\lambda>0$

$\therefore \lambda<x_1^2+x_2^2+2 \quad \lambda\leq4$

又设 $x_1, x_2\in[-\frac{\sqrt{2}}{2},0]$，且 $x_1<x_2$

则 $F(x_1)<F(x_2) \quad F(x_1)-F(x_2)<$

$F(x_1)-F(x_2)=(x_1^2-x_2^2)(x_1^2+x_2^2+2-$

$\therefore x_1^2+x_2^2+2-\lambda<0 \quad \therefore \lambda\geq3$

$\therefore \lambda\in[3,4]$