泛函分析讲义

第一卷

F. 黎 茨
B. 塞克佛尔維-納吉 著

梁 文 騏 譯
冷 生 明 校

科 学 出 版 社

1 9 8 3

内 容 簡 介

本书是在著者们历年来讲授"实函数""积分方程式"及"Hilbert 空间"等课程的基础上产生的．全书共分两部分，本卷是其中的第一卷．这一部分主要是介绍一元函数及多元函数的微分与积分理论的基本问题．在这里，Lebesgue 积分的概念的建立不是利用测度理论，而是基于线性泛函的开拓概念．此外，本卷还阐明了空间 L^2 与 C 的基本性质．

F. RIESZ, B. SZ.-NAGY

LECONS D'ANALYSE FONCTIONNELLE

AKADÉMIAI KIADÓ

BUDAPEST 1955 3ème édition

泛函分析讲义

第一卷

F.黎茨 B.塞克佛尔维-纳吉 著

梁文骐 译

冷生明 校

*

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院开封印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1963年12月第一版　开本：850×1168 1/32

1983年9月第四次印刷　印张：5 5/8

印数：16,501—23,250　字数：140,000

统一书号：13031·1561

本社书号：2141·13—1

定价：0.85 元

目 录

第一部分：微分与积分的近代理論

第一章 微 分

第二章 Lebesgue 积分

第三章 Stieltjes 积分及其推广

第 一 部 分

微分与積分的近代理論

第一章 微 分

§1. 关于单調函数的微商的 Lebesgue 定理

1. 不可微的連續函数的例. 在古典分析中，一般是假定所討論的函数具有微商，甚而至于是具有直到某一阶的連續微商. 有时在一些个别的点上，微商可能不存在或是发生間断. 然而直到本世紀初，間或提出的問題只不过是：某种函数，例如連續函数或单調函数，是不是一定具有微商呢？或者某种函数是不是处处都沒有微商或至少在一个集合上可能沒有微商呢？在这方面所得到的不过是一些差不多显而易見的結果，例如凸函数左边可微并且右边可微. 由此推知，在 x 的每一个值上，它的微商皆存在，至多只有可于(无穷)多个 x 值是例外.

这些問題一般要追溯到 1806 年，Ampère 的一篇論文“关于导函数的理論”[1][1]，当时这位伟大的学者曾徒劳无功地企图建立“任何一个”函数的可微性，而仅在变数的某些“特殊的与孤立的”值上可以有例外. 可是当我們进一步考慮到函数概念的发展时，就可觉察到，Ampère 所考慮的差不多只能是分段单調的函数——虽然在原著中沒有明說出这一点来.

在其后的数十年中，尽管数学分析的发展是何等的光輝灿烂，而关于这个問題的解决却未获得进展[2]. 仅只是到了 Weierstrass

---

1) 方括号中的数字表示书末所載文献的序号.

2) 俄譯本注. 这不完全正确. Н. И. Лобачевский 早已确切地区别了“漸近性”(即連續性)与“連續性”(即可微性)之間的异同. 例如可参看 Успехи матем. наук, 卷1(1946)，第 1(11) 期的第 15—21 頁 “Мысли и высказывания Н. И. Лобачевского”，特别是其中第 17 頁. 連續而无微商的函数的第一个例系 Bolzano 所建立. 参閱 Успехи матем, наук, 卷 4 (1949), 第 2(30) 期的第 15 頁.

建立了連續而处处沒有微商的函数的例[1]，方才最終地結束了想要証明最一般形式的連續函数的可微性的企图．由于其他一些間題的緣故，差不多十九世紀后叶所有从事数学分析的卓越数学家都曾經致力于构造一些更簡单的这种函数以及闡明它們的性質；这种研究延綿至今犹未停止．下面所举的一个例或許要算是最初等的了，这是由 van der Waerden [1] 所作出的，其基本原理是以下这一显明的事实：由整数所組成的无穷序列只有在它的項从某一处开始恆保持相同这一情形下，才可能收斂．

和平常一样，如果当 $h\to0$ 并且对于 $x+h$ 所經历的值 $f(x+h)$ 皆有意义的时候，比值

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

趋于一个有穷的并确定的极限，那么我們就称函数 $f(x)$ 在 x 点处有微商．我們用 $\{x\}$ 来表示 x 与相邻最近的整数之間的距离．作了这些規定之后，我們来构造以下的函数：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\{10^nx\}}{10^n};\tag{1}$$

由于这級数中各項都是連續函数，而且这級数还以几何級数 $\Sigma 10^{-n}$ 为控制級数，所以函数 $f(x)$ 是連續的．往下我們試着来計算一下它在 x 点处的微商，就会得出一个否定的結果．

为要达到这个目的，注意我們显然可以只討論 $0\leqslant x<1$ 的情形，并将 x 写成以下形状：

$$x=0.a_1a_2\cdots a_n\cdots,$$

規定当 x 为有穷小数时就在后面添上一串零．我們按照

$$0.a_{n+1}a_{n+2}\cdots\leqslant\frac{1}{2}\text{ 或 }>\frac{1}{2}$$

而分成两种情形．在第一种情形下，

$$\{10^nx\}=0.a_{n+1}a_{n+2}\cdots,$$

而在第二种情形下，

1) 系 Du Bois-Reymond[1] 所发表．

$$\{10^n x\} = 1 - 0.a_{n+1}a_{n+2}\cdots.$$

当 a_m 等于 4 或 9 的时候，我們令 $h_m = -10^{-m}$，而对于其他的 a_m，則令 $h_m = 10^{-m}$. 我們来考察以下的比值

$$\frac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m}; \tag{2}$$

根据(1)式，这比值可以表成这样形式的級数：

$$10^m \sum_{n=0}^{\infty} \pm \frac{\{10^n(x\pm 10^{-m})\}-\{10^n x\}}{10^n}.$$

显而易見，分子对于 $n \geqslant m$ 都等于零，而对于 $n < m$ 則簡化成 $\pm 10^{n-m}$；这样一来，級数中相应的各項就等于± 1，因而比值(2)的值是一个整数，也許是正数也許是負数也许是零，但是无論如何其奇偶性总是与 m 一致的. 比值(2)的数列既是由奇偶相間的一串整数所形成，当然决不可能收斂.

2. 关于单调函数的微商的 Lebesgue 定理. 零測度集合. 現在我們来考察单调函数类. 以下的一个定理属于 Lebesgue，系实变数分析中最引人注目与最重要的定理之一.

定理. 任何一个单调函数 $f(x)$ 对于所有的点 x（可能要除去一个零測度集合的点 x）都有有穷的、确定的微商；或者这样来說，函数几乎处处有有穷的、确定的微商.

我們来闡释一下这些話的含义. 在此先附带說明一点，Lebesgue 曾于 1904 年在他的初版的积分論[*] 的最后一章末尾証明了他的这个定理(不过这是在 $f(x)$ 連續这一附加假定之下証明的)，作为是全部理論的最終归結. 虽然如此，在这个定理的叙述中却无論是积分概念还是測度概念都沒有用到. 事实上，零測度集合的概念，就其本質而言并不一定要依賴于測度的一般理論，而且零測度集合的各項主要性質也可以避免使用一般測度論的术語而建立起来.

依照 Lebesgue 的命名，我們称 x 值的一个集合为零測度集合，如果这集合能够含于有穷个或可数无穷多个区間之内，而这些区間的总长度(即各区間长度的和数)可以任意小. 由这个定义立

即推知，零測度集合的任何一个子集合也是一个零測度集合．有穷个或可数无穷多个零測度集合的并集也是一个零測度集合；事实上，我們只須把这些零測度集合分别用总长度不超过 $\varepsilon/2^n$ 的区間系統复盖起来，那么这些区間系統中的所有区間就盖住了这些零測度集合的并集，而其总长度不超过 ε．特别言之，每一有穷个或可数无穷多个 x 值的集合是一个零測度集合．

有时把我們的定义用以下的形式表出来是有方便之处的，如果集合 E 可以用一个总长度有穷的可数区間系統复盖起来，而同时 E 中的每一个点都是这区間系統中无穷多个区間的內点，則称集合 E 为零測度集合．这两种定义乃是等价的．事实上，第二个定义包含了第一个定义，因为当集合 E 适合第二个定义的时候，E 中全部的点就属于无穷个总长度有穷的区間系統，而去掉有穷个区間之后我們就可以使区間系統的总长度任意小了．反之，当 E 是第一个定义意义下的零測度集合时，我們只要依次用总长度不超过 2^{-n} 的区間系統来盖住 E，并且若是有必要的話就将这些区間向左右方各放长一些，例如說放长一倍；那么这些区間系統的并集就合乎第二个定义中的要求了．

“几乎处处”这一用語是表示所論之主題处处成立，只可能在一个零測度集合上有例外．

在証明 Lebesgue 的这一基本定理之前，我們首先指出，就某一方面而言，这个定理已然尽其极致，不能再有所增強了．实际上，給出一个零測度集合 E 以后，我們可以构造出一个递增函数来，使其在 E 的那些点上沒有有穷的微商（确切言之，这个函数在那些点上具有无穷的微商）．为此目的，我們只須用第二个定义中所提到的那些区間把 E 复盖起来，并令 $f(x)$ 等于在 x 点左边的那些区間与部分区間的长度的和；由此定义出来的函数 $f(x)$ 显然具备所要求的性質．

3. Lebesgue 定理的証明． 我們直接証明单調函数几乎处处可微，而不利用积分論．这种不依賴于积分論的証明，系 G. Faber[1]以及 G. C. Young 与 W. H. Young[1]所首創．

为了語言上的簡便，我們暫且假定所研究的是連續的单調函数，而直到最后再指出为要摆脫連續性这一假定所必要的修正，虽說这差不多是显而易見的。

証明主要是依据以下的一条引理：

引理[1]. 設 $g(x)$ 是确定在区間 $a \leqslant x \leqslant b$ 上的一个連續函数，并設 E 是这个区間中具备下述性質的內点 x 的集合：对于点 x 总可以在其右方找到一个点 ξ，使得 $g(\xi) > g(x)$. 于是集合 E 或者是空集合或者是开集合，也就是說，E 是由有穷个或可数无穷多个彼此不相啣接的开区間 (a_k, b_k) 組成的，而对于所有这些区間有

$$g(a_k) \leqslant g(b_k).$$

为要証明这个引理，我們首先注意 E 是一个开集合，因为如若 $\xi > x_0$ 并且 $g(\xi) > g(x_0)$，那么由于連續性的緣故，对于 x_0 某一邻域中的 x 恆有不等式 $\xi > x$, $g(\xi) > g(x)$. 現在設 (a_k, b_k) 是組成 E 的那些开区間中的一个，于是点 b_k 不屬于 E. 設 x 是 a_k 与 b_k 之間的一个点；我們来証明 $g(x) \leqslant g(b_k)$，在其中令 x 趋于 a_k 就推出了引理中的不等式. 为此我們設 x_1 是 x 与 b_k 之間距 b_k 最近而使 $g(x_1) \geqslant g(x)$ 的点，我們来証明 x_1 就是 b_k. 倘若不是这样的話，那么根据引理的假定与 x_1 相对应的那些 ξ_1 一定是在 b_k 的右边，同时因为 b_k 不屬于 E，我們有 $g(x_1) < g(\xi_1) \leqslant g(b_k) < g(x_1)$，从而就得出了矛盾.

我們可以进而証明出来，而且讀者也不难想到，我們恰有 $g(a_k) = g(b_k)$，但可能对 $a_k = a$ 有例外. 然而这对下文并沒有用.

于是現在我們設 $f(x)$ 是一个在区間 $a \leqslant x \leqslant b$ 上連續的单調函数；为了确定起見，我們假定 $f(x)$ 是遞增的. 为要考察 $f(x)$ 的可微性，我們把导数 (nombres dérivés) 进行比較. 同平常一样，我們把比値 $\frac{1}{h}[f(x+h) - f(x)]$ 当 $h > 0$, $h \to 0$ 时的上极

1) F. Riesz[17].

限与下极限称为右上导数与右下导数，并分别記作 Λ_d 与 λ_d；类似地，我們可以定义左上导数 Λ_g 与左下导数 λ_g. 我們允許这些导数以 $\pm\infty$ 为值. 如果在 x 点四个导数有相同的有穷的値，則在 x 点存在有穷的、确定的微商.

为要証明 Lebesgue 定理，只須証明几乎处处有

$$1^\circ \Lambda_d < \infty; \qquad 2^\circ \Lambda_d \leqslant \lambda_g.$$

实际上，将2°应用到函数 $-f(-x)$ 上以后，就可以推知，我們也几乎处处有

$$\Lambda_g \leqslant \lambda_d;$$

一并考虑到 1° 与 2°，就得出

$$\Lambda_d \leqslant \lambda_g \leqslant \Lambda_g \leqslant \lambda_d \leqslant \Lambda_d < \infty.$$

所以显然可見，其中的各个等号并皆成立，而这就是所要証的.

断言 1° 是說使 $\Lambda_d = \infty$ 的那些点 x 所作成的集合 E_∞ 是一个零測度集合，欲証实这一点，我們注意集合 E_∞ 是包含在使 $\Lambda_d > C$ 的那些点 x 所作成的集合 E_C 之內的，这里 C 是一个可以取得任意大的数. 而由不等式 $\Lambda_d > C$，可以推知存在一个 ξ，使 $\xi > x$ 并且

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} > C.$$

若設 $g(x) = f(x) - Cx$，則上式可写成 $g(\xi) > g(x)$. 因此集合 E_C 是包含在引理所說的那些区間 (a_k, b_k) 之內的，而根据引理我們有

$$f(b_k) - Cb_k \geqslant f(a_k) - Ca_k,$$

亦即

$$C(b_k - a_k) \leqslant f(b_k) - f(a_k).$$

于是对于 k 来作和数，便得

$$C\sum(b_k - a_k) \leqslant \sum[f(b_k) - f(a_k)] \leqslant f(b) - f(a).$$

由此推知，当 C 充分大时，区間 (a_k, b_k) 的总长度必須任意小. 而这也就是說 E_∞ 是一个零測度集合.

断言 2° 的証明的方法与此相似，不过只是在不同的两种形式

下交迭使用而已. 設 c 与 C 是两个正数，并且 $c < C$. 我們首先定义函数 $g(x) = f(-x) + cx$，同时設 Σ_1 是由我們的引理所給出的那些区間 (a_k, b_k) 的系統；或者直捷了当，我們就設 Σ_1 是这个系統以原点为心的对称系統. 于是仿照証明 1° 时的論証，可以推知 Σ_1 包含了所有使 $\lambda_g < c$ 的那些点 x. 其次，在 Σ_1 的每一个区間 (a_k, b_k) 中分別定义函数 $g(x) = f(x) - Cx$，并設 Σ_2 是分別根据我們的引理而对应出来的那些区間 (a_{kl}, b_{kl}) 的系統. 对于 Σ_1 及 Σ_2 的这些区間，我們有

$$f(b_k) - f(a_k) \leqslant c(b_k - a_k),$$

$$C(b_{kl} - a_{kl}) \leqslant f(b_{kl}) - f(a_{kl}),$$

因而

$$C|\Sigma_2| \leqslant V_2 \leqslant V_1 \leqslant c|\Sigma_1|,$$

亦即

$$|\Sigma_2| \leqslant \frac{c}{C}|\Sigma_1|,$$

其中 $|\Sigma_1|$ 与 $|\Sigma_2|$ 表示区間系統 Σ_1 与 Σ_2 的总长度，而 V_1 与 V_2 表示函数 $f(x)$ 在 Σ_1 的各个区間上与在 Σ_2 的各个区間上的全变差的和数.

将这两步手續交迭施行，我們就得到一序列区間系統 $\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots$，其中每一系統都包含在前一系統之內，而恆有

$$|\Sigma_{2n}| \leqslant \frac{c}{C}|\Sigma_{2n-1}|.$$

由此推知

$$|\Sigma_{2n}| \leqslant \left(\frac{c}{C}\right)^n |\Sigma_1| \to 0.$$

那些同时使 $\Lambda_d > C$ 与 $\lambda_g < c$ 的点 x 显然是包含在每一区間系統 Σ_n 之內的；这就說明这些点 x 所作成的集合 E_{cC} 是一零測度集合. 最后，每一个使 $\Lambda_d > \lambda_g$ 的点 x 都屬于某一个集合 E_{cC}，并且我們还可以假定 c 与 C 都是有理数，因为两个不同的实数之間总可以插进两个有理数去. 由此推知，若对于所有的有理数对 $\{c, C\}$ 作出集合 E_{cC} 来，则其并集 E^* 就包含了所有那些使 $\Lambda_d > \lambda_g$ 的点 x. 而另一方面，有理数对只有可数无穷多个，所以集合 E^* 是

可数无穷多个零測度集合的并集，从而 E^* 本身也是一个零測度集合，而那些使 $\Lambda_d > \lambda_g$ 的点 x 所构成的集合是包含在 E^* 里面的，当然就更是一个零測度集合了.

这样一来，我們就对于連續的单調函数 $f(x)$ 証明了 Lebesgue 定理. 为了要将定理推广到 $f(x)$ 不連續的情形，我們注意，开始所講的那条引理經过一些差不多是理所当然的修正以后，就对不連續的函数也成立了. 实际上，为了我們的目的可以只考虑极限 $g(x-0)$ 与 $g(x+0)$ 都存在的情形，因为对于单調函数 $f(x)$ 显然就是这种情形，从而对于函数 $f(x)-Cx$ 与 $f(-x)+cx$ 也是这种情形. 現在我們用 $G(x)$ 来表示数值 $g(x-0)$, $g(x)$ 与 $g(x+0)$ 中之最大者，并且为了要在写法上一致，我們規定 $g(a-0)=g(a)$ 以及 $g(b+0)=g(b)$. 于是如若在区間 (a, b) 之內存在这样的点 x，使得可找到一个 $\xi > x$ 而 $g(\xi) > G(x)$，那么这些点 x 就构成一个开集合，而对于其每一組成区間 (a_k, b_k)，我們有 $g(a_k+0) \leqslant G(b_k)$.

为要証明这种推广形式的引理，并利用它来对于不連續的单調函数証明 Lebesgue 定理，只要在前面的論証中作一些修正，而这些修正是如此明显以致无庸贅述. 我們只要着重指出一点，卽函数 $G(x)$ 的引进对于連續点并无影响，至于不連續点则因为它們构成一个可数集合[1)]，当然更是一个零測度集合，从而可以視我們的需要而随时把它加进来或是剔除出去.

4. 囿变函数. 現在我們試将以上所得到的結果推广到更广泛的一类函数，卽囿变函数. 这类函数在分析的許多領域中，特别是在 Fourier 級数論，曲綫求长問題以及积分論中占有重要位置.

---

1) 我們只須注意，如果 k 是任何一个正整数，那么使得以下不等式

$$|g(x+0)-g(x-0)| > \frac{1}{k}$$

成立的那些点 x 就至多只有有穷个. 实际上，倘使是有无穷个，那么我們可以在其中分出一个单調递增或单調递减的收斂子序列来. 設以 ξ 表其极限，于是极限 $g(\xi-0)$ 与 $g(\xi+0)$ 之中至少要有一个不存在，这就和所作假定不相符合了.

我們注意，如果函数 $f_1(x)$ 与函数 $f_2(x)$ 都是几乎处处可微的，則它們的差 $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$ 也具有这个性质，并且如果 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 是递增函数，則对于将区間 (a, b) 划分成子区間 $(x_{k-1}, x_k)(k=1, 2, \cdots, n; x_0=a, x_n=b)$ 的一切划分法都显然有以下的不等式:

$$\sum_1^n |f(x_k)-f(x_{k-1})| \leqslant f_1(b)-f_1(a)+f_2(b)-f_2(a),$$

循此即可导致囿变函数的概念.

一个函数 $f(x)$（无論連續与否），如果它使得和数

$$\Sigma_{ab}=\sum_1^n |f(x_k)-f(x_{k-1})| \tag{3}$$

不超过某一固定的不依賴于划分法的选择的常数，我們就說它是**有界变分的**，或称之为**囿变函数**.这种和数的上确界称为**函数** $f(x)$ **在区間** (a, b) **上的全变分**，并用 $T(a, b)$ 表示它.

全变分是“可加集合函数”，这意思是說，如果点 c 在 a 与 b 之間，則当而且只当 $f(x)$ 在 (a, c) 与 (c, b) 上都有全变分时，$f(x)$ 方才在 (a, b) 上有全变分，而且这时

$$T(a, b)=T(a, c)+T(c, b).$$

欲証此事，只須注意和数 Σ_{ab} 于增添新分点时不可能变小，因此我們可以只考虑其中恰有某个 x_k 等于 c 的那种划分法；于是在这种情形下，$\Sigma_{ab}=\Sigma_{ac}+\Sigma_{cb}$，取上确界即得我們所要求的等式.

我們所証明了的仅是两个递增函数之差有全变分，其逆定理系由 Camille Jordan 首先給出.

定理. **任何囿变函数恆可表成二个递增函数之差.**

定理的証明非常簡单. 我們引进函数 $T(x)=T(a, x)$，它等于函数 $f(x)$ 在任意区間 (a, x) 上的全变分；和不定积分相类似，我們称这个函数为函数 $f(x)$ 的**不定全变分**. 于是 $T(x)$ 与 $T(x)-f(x)$ 都是递增函数，并且它們給出我們所需要的分解式:

$$f(x)=T(x)-[T(x)-f(x)].$$

$T(x)$ 的递增性是显而易見的；事实上，如果 $x<\xi$，則

$$T(a,\xi)=T(a,x)+T(x,\xi),$$
由此推知，
$$T(\xi)-T(x)=T(x,\xi)\geqslant 0.$$
为要証明
$$T(x)-f(x)\leqslant T(\xi)-f(\xi)$$
或者完全等价的
$$f(\xi)-f(x)\leqslant T(\xi)-T(x)=T(x,\xi),$$
我們注意 $|f(\xi)-f(x)|$ 是和数 $\Sigma_{x\xi}$（当 x 与 ξ 之間沒有分点时）的特殊情形；因此
$$|f(\xi)-f(x)|\leqslant T(x,\xi).$$

最后这个不等式使我們能够把 $f(x)$ 用另一种方法表成二个单調函数之差：
$$f(x)=P(x)-N(x),$$
其中函数 $P(x)$ 与 $N(x)$ 的定义如下：
$$P(x)=\frac{1}{2}[T(x)+f(x)],\qquad N(x)=\frac{1}{2}[T(x)-f(x)];$$
它們（或者与它們相差一个常数加項的函数）分別称为 $f(x)$ 在区間 (a,x) 上的正变分与負变分，我們也称之为函数 $f(x)$ 的不定正变分与不定負变分.

最后，因为 $f(x)=P(x)-N(x)$ 在 $P(x)$ 与 $N(x)$ 同时可微的地方总是可微的，而两个零測度集合的并集仍是零測度集合，所以我們就得到以下的最后結果：

Lebesgue 定理. 任何囿变函数几乎处处具有有穷的微商.

§ 2. Lebesgue 定理的若干直接結論

5. 关于单調項級数的逐項微分的 Fubini 定理. 現在我們試考察若干或多或少系由适才所証的基本定理直接得出的結論. 首先我們来考察关于单調項級数的逐項微分的 Fubini 定理.

Fubini 定理[1)]. 設

1) Fubini[2]; 还可参看 Tonelli[1], Rajchman 与 Saks[1].