

复变函数论

第一卷

[德] O. Carathéodory 著

赵彦达 译 谢庭藩 校



高等教育出版社

复变函数论

第一卷

【德】O. Carathéodory 著

開拉澤德里

赵彦达 译

谢庭藩 校

高等教育出版社

内 容 提 要

本书共有两卷。第一卷有五个部分。第一部分详细地介绍了圆的几何学,从而轻松地阐述了欧氏、球面和非欧几何及三角。第二部分提供了点集论和拓扑学的有关材料,论述了围道积分的概念和有关的重要定理。第三部分是解析函数理论,对于近年来占重要地位的调和测度的概念也作了扼要的介绍。第四部分讨论利用各种极限过程确定的解析函数,利用了正规族和极限振幅等概念。第五部分研究几种特殊的函数以及有关的数值计算。

此书原著为德文 «Funktionentheorie», 其英译本书名为 «Theory of Functions of a Complex Variable». 本书按照英译本(1954 年本)译出,并参照德文第二版(1960 年本)进行了校订。

本书可供理科数学专业与数学工作者参考。

复 变 函 数 论

第 一 卷

[德] C. Carathéodory 著

赵彦达 译

谢庭藩 校

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京顺义印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 10.875 字数 259,000

1985 年 7 月第 1 版 1985 年 7 月第 1 次印刷

印数 00,001—9 450

书号 13010·0959 定价 2.75 元

译 校 者 序

Carathéodory 的《Funktionentheorie》一书于 1950 年问世，1960 年再版。内容丰富、别致。早在六十年代初，作者的学生、我们的老师徐瑞云教授就指导我们把它译成中文，还亲自译出部分稿子作为我们的范例。可惜后来工作中断，徐老师也不幸逝世。

近年，在有关老师和同事们的关心和支持下，这部名著的中译本终于和读者见面了。

本译本是根据 F.Steinhardt 的英译本(1954 年本)译出的，并参照德文第二版(1960 年本)进行了校订。我们衷心感谢苏步青教授和程民德教授的热情鼓励。我们还要感谢侯德润教授等对本译本所作的贡献。

译者力求忠实于原文。因限于水平，不当之处，望读者指正，不胜感激。

赵彦达

谢庭藩

1982 年 12 月于杭州

编者序

本书的作者能在逝世前不久看到这部著作的出版甚为欣慰。如同他在第一次世界大战期间所写的经典著作《*Vorlesungen über Reelle Funktionen*》(《实变函数论》)那样,本书也是在大动乱时期撰写的。在那困难的岁月里,Carathéodory 虽然备尝艰辛,但他那卓越的创作才能和坚毅精神仍丝毫未减。战后,他几次病倒在床,而且往往一病数周,可是他并未因此而放慢本书的写作。在此期间,他指导我熟悉本书之全部内容。我以鉴赏的观点和做学生的角度,承担了校读原稿的任务。Carathéodory 以他特有的精力,向来访的朋友及同事介绍他源源写出的手稿,常常兴致勃勃地连续几个小时。所以我总觉得,他对这部著作特别尽心竭力。

这本书主要是一本教科书,虽然在书题上未经标出,然而,无论从题材或叙述方式上,专家们都将在本书中发现许多新颖及有趣的内容。全书分两卷,这并非由内容划定的,而只是为了便于学生选购。因此没有按通常惯例给每卷添加副标题。

德文(和英文)的函数论教科书的传统写法是在介绍复数之后,立即展开解析函数的理论;关于圆的几何学(反演理论与 Möbius 变换),一般都放在后面,仅作为应用而给出一些简单的介绍。本书的作者却采取相反的做法,将圆的几何学放在前面,接着就毫不费力地处理了欧氏的、球面的以及非欧的几何与三角。这样,当学生被引导到函数论本身时,就早已掌握了一些基本的概念,而且初步熟悉了本学科所特有的思想方法。本书第二部分一开始,就提供了点集论和拓扑学的某些材料,此乃以后发展之所需;收编这些材料用意主要是作为参考,故不作详尽之探讨。接着,就阐述复的围道积分之基本概念和有关的重要定理。

如所周知,有着多种不同的方法引进解析函数. Carathéodory 选择了 Riemann 的定义,这是基础于复函数可微性上的. 选择这一定义,对解析函数理论之进一步发展有着重大的意义. 关于解析函数的主要定理都在本书第三部分中加以论证. 对于近年来正在占重要地位的调和测度之丰富概念,这里仅介绍了最简单的形式,而对其一般思想只不过作个提示. 更详细的研究已超越本书之范围,且无甚必要. 这特别是由于 R. Nevanlinna 关于单值解析函数的名著中,已对此作了深刻的论述.

第四部分讨论利用各种极限过程确定解析函数. 这里所用的逼近方法显示出很大的优越性. 迄今为止,探究此法的教科书几乎是绝无仅有,它充分利用了 P. Montel 的正规族的概念和 A. Ostrowski 的极限振幅的概念,致使论证更为雅致,理论引人入胜.

第一卷的第五部分也即最后部分,共包含三章,讨论特殊函数. 作者特别注意三角函数的论述,联系对数函数和一般幂函数介绍了最简单的 Riemann 曲面,在学习上述函数以及 gamma 函数之中,相当有趣而又重要的一点是让学生看到,实的与复的解析函数并无根本区别,而且函数论的定理实际能够导出数值性的结果.

我要以我的尊敬的导师的名义,向所有关心本书以及给予帮助的人们表示感谢,我深信这也是他的意愿. 特别要感谢 R. Fueter 教授,他不仅读了全部校样,并且承担了与出版者洽谈之全部事宜,他对本书的出版是负责到底的. E. Schmidt 教授阅读了大部分原稿,并提出很多宝贵的意见和建议,这是值得深深感谢的. 我们还要感谢 R. Nevanlinna 教授和 A. Ostrowski 教授的积极关心与帮助,特别是后者所作的详尽评价. 应当感谢出版者 Verlag Birkhäuser 印刷本书之精良技术以及实现我们意图之

不倦的合作态度。

愿这位函数论的大师与巨匠之精神通过本书不断地鼓舞学生们,使他们衷心热爱这一瑰丽又重要的科学分支。

L. Weigand

1950.5 于 Munich

著 者 序

解析函数论渊源于十八世纪的数学。L. Euler(1707—1783)首先编纂了一个庞大的关于本学科的资料。这个精心提炼的著作，致使几代数学家为之专心研究，至今仍未完全透彻。第一个试图建立系统的函数理论的数学家是 J.-L. Lagrange (1736—1813)，他的大胆设想是在幂级数的基础上发展整个理论。有关这一时期的科学发展可以从 P. Lacroix 的综合性论文集(第二版，1810—1819)中找到。

然而，那时所知的大部分结果并不太可靠。对于许多单独的事实是由 C. F. Gauss (1777—1855) 第一次给出符合我们现代标准的证明的。但是，Gauss 从来没有发表过在这方面所特有的最为重要的思想，一直等到 A.-L. Cauchy (1789—1857)，才发现并且系统地发展了复围道积分的概念，对函数论创造了第一个有连贯性的结构。自从 N. H. Abel (1802—1829) 和 C. G. J. Jacobi (1804—1851) 于 1828—1830 发现了椭圆函数之后，Cauchy 的理论得到了进一步的发展。特别是 J. Liouville (1809—1882) 起了很大的作用，并且由 Briot 与 Bouquet 载入他们的专题论文中(1859)，即使在今日，这个文献仍值得一读。B. Riemann (1826—1865) 的天才不仅将 Cauchy 的理论带到一个更完美的境地，而且创造了函数的几何理论基础。几乎与此同时，K. Weierstrass (1815—1897) 重新提起了上面所说到的 Lagrange 的思想，在这个思想的基础上，他将函数论加以算术化，并且发展成一个在严格与雅致的观点来说都无与伦比的系统。Weierstrass 的传统已为 A. Pringsheim (1850—1941) 以特别纯粹的形式加以发展，他的书(1925—1932)是很有教益的。

在十九世纪的最后三十年中，Riemann 与 Weierstrass 的追随者形成了截然分离的两个学派。然而，十九世纪的七十年代，Georg Cantor (1845—1918) 创立了点集论。这门学科是使数学获得源泉的最原始的创造之一，也许只有公元前四、五世纪的古代数学家们的成就能与之媲美。这些古代数学家们可以说是作出了前所未见的严格的几何证明。而借助于点集论，才有可能使 Cauchy 和 Riemann 之理论与概念如同 Weierstrass 之理论那样，建立在一个牢固的基础上，而且这也导致函数论中新的重要发现与论述的简化。

致使发展还有另外的方面，这些发展有时还导致今天函数论面貌的某些变化。因为现代的课程中引进了各种各样的方法，就对函数论的发展方向上产生了深刻的影响。首先，与此有关的我们要提到 Schwarz 引理，它与圆几何中之初等映照相结合，就可估计到某些事先未知的新型的论证方法的出现，这样提出的新方法是与 E. Lindelöf (1870—1946) 的一般原理等价的。此原理较 Schwarz 引理稍晚一点发现，有些作者往往用它代替 Schwarz 引理。几乎与此同时，正规族的概念被引入函数论，并且逐渐在一大类函数论之理论证明中起着主要作用。虽然这些发展的起源可以追溯到更远一些，譬如说 T. J. Stieltjes (1856—1894)，但还是可以说是 P. Montel 首先给出正规族之确切定义，并且以一个又一个新应用来说明此概念之作用。A. Ostrowski 的一个思想同样是有重大作用的。他应用 Riemann 球面上之球面距离以避免数 ∞ 在各种极限过程中必须例外考察的麻烦，我毫不犹豫地系统采纳上述各种方法所提供的全部优越性。

计划编写一本教科书之最大困难在于材料的取舍，因为一本篇幅太长的书总不太实用。因此，必须事先删去那些需要很多准备知识的题目。正因为这个缘故，我甚至没有提及诸如代数函数

之理论，或者由其函数元素之一所可能得到的最一般的解析函数的定义，而这些内容，通常总认为是函数论教程中不可短缺的部分。同样原因，我也没有给出 Riemann 曲面的一般定义，也没有去阐明单值化的理论。

本书是从讨论反演几何(圆的几何)开始的，这个课题对于函数论是如此之重要，在法国的“Classes de mathématiques spéciales”中是十分详细地教授的，但在德语(英语)大学中却往往太草率从事。我好象认为，这个几何分支为通向函数理论铺平了道路，毕竟是 H. A. Schwarz (1843—1921) 之反演几何知识使他取得所有值得称赞的成就。

目 录

第一部分 复 数

第一章 代数观点下的复数

§1 复数的发现	1
§§2—9 复数的定义	2
§10 复共轭	9
§§11—12 绝对值	10
§§13—14 么模数	12
§§15—17 复数的辐角	15
§§18—19 根	17

第二章 复数的几何

§§20—22 Gauss(或复)平面	19
§23 复平面中的圆	23
§§24—25 Moebius 变换群	23
§§26—28 保圆映照	26
§29 等角变换	28
§30 无穷远点	28
§§31—33 Riemann 球面	30
§§34—37 交比	32
§§38—40 关于圆的反射	36
§§41—44 圆之位置及大小的确定	40
§§45—50 圆束	43
§51 由两个反射产生之 Moebius 变换	46
§§52—55 将一般的 Moebius 变换表示为关于圆的反演之积	48

第三章 欧氏几何、球面几何和非欧几何

§§56—57 圆丛	52
§§58—59 圆丛的圆之方程	54
§60 关于一个丛中国圆的反演的积	55
§§61—62 欧氏几何、球面几何以及非欧几何的刚体运动	56

§§63—65	距离不变式	59
§§66—72	球面三角	62
§§73—75	非欧三角	70
§76	球面几何	76
§77	椭圆几何	77
§§78—79	球面的转动	80
§§80—81	非欧几何	83
§§82—83	非欧运动	86
§§84—85	Poincaré 半平面	89
§§86—88	弦和准弦距离	91

第二部分 点集论和拓扑学的某些结果

第一章 收敛数列和连续的复函数

§§89—90	收敛性的定义	94
§91	紧致点集	96
§92	Cantor 对角线方法	97
§§93—94	点集的分类	98
§§95—98	复函数	100
§99	复函数的边界值	103

第二章 曲线与区域

§§100—101	连通点集	104
§102	曲线	106
§103	区域	106
§§104—105	保邻域映照	107
§§106—109	Jordan 曲线	108
§§110—113	单连通与多连通区域	111

第三章 围道积分

§114	有长曲线	116
§§115—119	复围道积分	117
§§120—122	围道积分之主要性质	123
§123	平均值定理	125

第三部分 解析函数

第一章 理论基础

§124 复函数的导数	127
§§125—127 可积函数	128
§128 正则解析函数的定义	133
§129 Cauchy 定理	134
§§130—131 Cauchy 积分公式	136
§132 解析函数的一些基本性质	139
§§133—134 Riemann 定理	140

第二章 最大模原理

§135 函数在圆上的平均值	142
§§136—139 最大模原理	143
§§140—141 Schwarz 引理	145
§§142—143 正则解析函数的零点	147
§144 保邻域性	149
§§145—146 不为常数的解析函数的导数不可能恒等于零	151

第三章 Poisson 积分与调和函数

§147 由实部确定一个解析函数	153
§§148—149 圆上的 Cauchy 积分变换	154
§§150—152 Poisson 积分	157
§§153—156 Cauchy-Riemann 方程与调和函数	160
§157 Harnack 定理	164
§158 调和测度	166
§159 Riemann 的一个不等式	169

第四章 半纯函数

§§160—161 解析函数定义之扩充	171
§162—163 半纯函数的运算	172
§164 部分分式分解	175
§§165—166 孤立本性奇点	175
§§167—169 Liouville 定理及其在多项式中的应用	178

§170 代数基本定理	181
§§171—173 多项式的进一步性质	182

第四部分 通过极限过程定义的解析函数

第一章 连续收敛

§§174—175 连续收敛	186
§§176—178 极限振幅	188
§179 函数序列的正规族	192
§180 连续收敛与均匀收敛之比较	192

第二章 半纯函数的正规族

§181 半纯函数序列的极限振幅	194
§§182—183 半纯函数的正规族	196
§184 紧致正规族	197
§§185—186 局部一致有界的解析函数族	198
§§187—190 正规半纯函数族的极限函数	200
§191 Vitali 定理	204
§192 一致收敛	205
§§193—194 Osgood 定理	206
§§195—197 Moebius 变换的正规族	208
§198 A. Hurwitz 定理	210
§199 局部有界之正规族的判别法	212
§200 单叶函数	213

第三章 幂级数

§§201—204 绝对收敛的级数	215
§205 幂级数	218
§§206—207 收敛半径	219
§§208—209 Taylor 级数	222
§§210—212 幂级数的正规序列	225
§§213—214 幂级数之运算	229
§215 Abel 变换	232

第四章 部分分式分解和留数的计算

§§216—218	Laurent 展开式	236
§219	具有有限个孤立奇点的解析函数	239
§§220—222	Mittag-Leffler 定理	241
§223	具有指定简单极点的半纯函数	244
§§224—225	留数及其应用	246
§226	函数之零点个数及 Rouché 定理	248
§§227—228	解析函数的反函数	249
§§229—230	Lagrange 级数	251
§231	Kepler 方程	255
§§232—233	单值性定理	257

第五部分 特殊函数

第一章 指数函数与三角函数

§234	指数函数 e^x	261
§§235—237	三角函数	263
§§238—239	指数函数的周期性	267
§240	双曲函数	269
§§241—242	三角函数的周期与基本区域	271
§§243—244	函数 $\operatorname{tg} z$ 与 $\operatorname{th} z$	273
§245	π 的数值计算	276

第二章 对数函数和一般的幂函数

§§246—250	自然对数	273
§§251—253	对数函数的级数展开式与数值计算	282
§§254—255	一般的幂函数	285
§256	有多值反函数的正则函数	288
§257	$n!$ 的界	289
§258	级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+x}}$ 的界	290
§§259—261	$\pi \operatorname{ctg} \pi z$ 的部分分式分解式	291
§262	$\sin \pi z$ 的乘积公式以及 Wallis 公式	294

第三章 Bernoulli 数与 Gamma 函数

§263	差分之逆运算	296
------	--------	-----

§264 Bernoulli 数	298
§§265—268 E. Lucas 的符号算法	300
§269 Clausen 定理	305
§270 Euler 常数	309
§§271—273 函数 $\Gamma(s)$	311
§§274—275 Bohr-Mollerup 定理	314
§§276—277 Stirling 级数	316
§278 Gauss 乘积公式	321
§§279—280 公式的汇集、应用	323
索引	326

第一部分 复数

第一章 代数观点下的复数

复数的发现 (§1)

1. 代数学家很早就碰到过复数(约在十六世纪的初期),并且这个发现是很自然的. 而较之简单得多的负数概念,却是直到后来才引进的. 这两个概念都源于这样的代数事实:当人们用字母作代数运算时,导出了这样的表达式,它们按字母原来所表示的数来解释,是没有意义的. 但是,如对同样这些字母赋以另外的解释,就不致产生任何矛盾.

例如,倘若字母 a, b, k 和 x 都表示通常的正数,则方程

$$ax + b = k \quad (1.1)$$

可解的条件是 $a > 0, b < k$; 然而,这一方程在 $b \geq k$ 时却无解. 但是,如果这些同样的字母 a, b, k 以及 x 被解释为表示任何实数——正的、零或负的——,那末只要假定 $a \neq 0$, 方程(1.1)总是有解的.

当求解二次方程

$$ax^2 - 2bx + c = 0 \quad (a \neq 0) \quad (1.2)$$

时,我们会碰到十分类似的情况. 倘若我们只允许 a, b, c 以及 x 取实值(正的或负的); 由于方程的根是