

TB301
4-2

高等学校试用教材

材 料 力 学

下 册

天津大学材料力学教研室编
苏翼林 主编

人民教育出版社

本书是根据一九七七年高等学校工科基础课力学教材会议制定的高等工业院校“材料力学(机械类)编写大纲”编写的。

本书分上、下两册出版。上册包括绪论、拉伸与压缩、材料的力学性质、拉伸(压缩)超静定问题、剪切、扭转、弯曲、应力分析、强度理论、组合变形、曲杆、平面图形的几何性质及接触应力简介等内容。下册包括变形能法、超静定系统、交变应力、稳定、厚壁圆筒与旋转圆盘、弹性力学平面问题、实验应力分析、平面有限单元法基础及线弹性断裂力学等内容。

参加本书编写工作的有:苏翼林(主编,第四章,第九章,第十章,第十三章至第十九章);曹湘(第三章,第六章,第七章,第八章);任治宏(第二章,第五章,附录II);罗至善(绪论,第一章,第十一章,第十二章,附录I);张守鑫(第二十章);黄观鸿(第二十一章)。上册底图由罗至善、任治宏绘制,下册底图由任治宏绘制。黄观鸿、佟振勋参加上册校对工作。

本书由北京航空学院高镇同、单辉祖审阅。

本书可作为高等工业院校机械类专业材料力学教材,也可作为机械工程技术人员参考书。

高等学校试用教材

材 料 力 学

下 册

天津大学材料力学教研室编

苏翼林主编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/16 印张 17.25 字数 380,000

1980年5月第1版 1980年10月第1次印刷

印数 00,001—14,000

书号 15012·0253 定价 1.45 元

符 号 表 (下册)

符 号	意 义	常用单位	符 号	意 义	常用单位
α	位相差	rad	$\Psi_{\sigma}, \Psi_{\tau}$	材料常数(交变应力下)	无量纲
	应力强度因子表达式中的形状因子	无量纲	Ω	载荷弯矩图面积	Nm ² , kNm ²
α_1	由应变花定出的主应变方向	度(角度)	a, b, c	厚壁圆筒或圆盘的半径	cm
β	表面状态系数或表面强化系数	无量纲	a, A	振幅	mm
δ, Δ	广义位移(线位移或角位移)	mm 或 rad	a	椭圆形裂纹短半轴, 穿透性裂纹长度	mm
Δ	半径过盈(公盈)	mm	a_c	临界裂纹尺寸	mm
δ_{ij}	影响系数	mm/N, mm/Nm, rad/N, rad/Nm	a_i	初始裂纹尺寸	mm
			A	三角形单元的面积	m ²
δ_{ip}	由载荷在 i 点沿 i 方向引起的位移	mm或rad	B	试件厚度	mm
δ^*	虚位移	同上	c	椭圆形裂纹长半轴	mm
δ_j	静变形	同上	C	裂纹亚临界扩展幂次公式的系数	与幂次 n 有关
δ_d	动变形	同上		应力光学系数	(MPa) ⁻¹
θ	角位移, 角度	rad 或度	$[D]$	弹性矩阵	
ε	尺寸系数	无量纲	F	外载荷	N, kN
$\varepsilon_r, \varepsilon_{\theta}$	径向应变, 环向应变	无量纲	f	材料条纹值	kN/m · 级
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$	应变分量	无量纲	g	重力加速度	m/s ²
$\varepsilon_x^*, \varepsilon_y^*, \gamma_{xy}^*$	虚应变分量	无量纲	$\mathcal{G}$	弹性能释放率	N/m, kN/m
$\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c$	由应变花测出的应变值	无量纲	$H_{11}, H_{12}, H_{21}, H_{22}$	刚度系数	N/m, kN/m
ε_{du}	由应变指示器上读出的应变读数	无量纲	i, j, m	三角形单元的节点号	
λ	波长	μ m	I	电流	A(安培)
μ	柔度(压杆)	无量纲	k_{σ}, k_{τ}	光强	
ρ	长度系数(压杆)	无量纲	K_{σ}, K_{τ}	有效(应力)集中系数	无量纲
$\sigma_r, \sigma_{\theta}, \tau_{r\theta}$	密度	kg/m ³	K	综合影响系数	无量纲
$\sigma_{mx}, \sigma_{min}$	应力分量(极坐标)	MPa	K, K_I	灵敏系数(应变片)	无量纲
	交变应力中的最大应力, 最小应力	MPa	K_c	应力强度因子	MNm ^{-3/2}
σ_m, σ_a	交变应力中的平均应力, 应力幅度	MPa	K_e	平面应变断裂韧度	MNm ^{-1/2}
σ_R	循环特征 R 时的疲劳限	MPa	K_{Imax}, K_{min}	断裂韧度	MNm ^{-1/2}
σ_{-1}, τ_{-1}	交变应力的最大, 最小应力强度因子	MPa	K_Q	条件断裂韧度	MNm ^{-3/2}
σ_0, τ_0	对称循环的疲劳限	MPa	$\Delta K, \Delta K_I$	应力强度因子幅	MNm ^{-3/2}
σ_{lj}	脉动循环的疲劳限	MPa	ΔK_{Ih}	材料的界限应力强度因子幅	MNm ^{-3/2}
σ_{Ij}	临界应力	MPa	l, m	在 x, y 坐标下的方向余弦	无量纲
$\sigma_A = \sigma_{mx} - \sigma_{min}$	在 x, y 坐标下的方向余弦	MPa	M', M_n	单位力引起的弯矩, 扭矩	Nm, kNm
σ_c	交变应力幅	MPa	N', Q'	单位力引起的轴力, 剪力	N, kN
σ_{ys}	断裂临界应力	MPa	N	应力循环次数, 疲劳寿命	无量纲
	屈服单元体的 y 向正应力分量	MPa	N_0	循环基数	无量纲
φ	折减系数	无量纲	N_i, N_j, N_m	位移模式中的形态函数	无量纲
	应力函数	N, MN	n_{σ}, n_{τ}	构件工作安全系数	无量纲
			n	折射率	无量纲

续前表

符 号	意 义	常用单位	符 号	意 义	常用单位
	条纹级数	无量纲	R, R_e, R_i, R_c	裂纹尖端塑性区特征尺寸	mm
	裂纹疲劳亚临界扩展幂次公式的幂次	无量纲	s	位移(光波振动)	mm
n_w	稳定安全系数	无量纲	S	三点弯曲试件支点间距	mm
n_k	断裂安全系数	无量纲	$[S]$	应力矩阵	
P_{lj}	临界力	N, kN	t	时间	s
P_x, P_y	集中力的 x, y 方向分量	N, kN	T	周期	s
P	形成单位面积裂纹新表面所消耗的塑性功	N/m	T_0	动能	J
P_p	裂纹突进时的载荷	N, kN	u	径向位移	mm
p_1, p_2, p	压强	Pa, MPa	u, v	位移分量(直角坐标下)	mm
p^*, p^{**}	厚壁筒内压强的极限值	Pa, MPa	u_m, v_m	节点 m 的实位移	mm
q_{lj}	圆环的临界压力	N/m, kN/m	u_m^*, v_m^*	节点 m 的虚位移	mm
r, θ	极坐标的向径和极角	cm, rad	v_m	裂纹嘴张开位移	mm
r	过渡圆角半径	cm, mm	V	波速	m/s
r_y	塑性松弛的裂纹等效扩展量	mm	W_e	外力虚功	J
r_y^*	塑性松弛前沿裂纹前方弹、塑性区分界处的向径值	mm	W_i	内力虚功(虚变形功)	J
			W	试件宽度	mm
				能量消耗	J
R	循环特征	无量纲	$\bar{X}, Y$	体积力分量	N/m ³ , kN/m ³
	应变片电阻	Ω (欧姆)	$\bar{X}, \bar{Y}$	表面力分量	Pa, MPa
	程差	μm	X_1, X_2, X_3	多余反力或反力偶	N 或 Nm, kN 或 kNm

注: 上册中的符号在下册中仍继续采用, 不再列出。

目 录

符号表(下册).....	1
--------------	---

第十三章 变形能法

§ 13-1 杆件基本变形的变形能.....	1
§ 13-2 单位力法求变形.....	4
§ 13-3 图形互乘法.....	7
§ 13-4 变截面梁的弯曲变形.....	10
*§ 13-5 剪力对弯曲变形的影响.....	11
*§ 13-6 曲杆变形.....	13
§ 13-7 互等定理.....	15
*§ 13-8 虚功原理.....	17
*§ 13-9 能量法解冲击问题.....	20
习 题	24

第十四章 超静定系统

§ 14-1 一次超静定梁的解法.....	29
§ 14-2 二次超静定梁的解法.....	32
§ 14-3 力法及正则方程.....	36
*§ 14-4 连续梁.....	40
*§ 14-5 内力超静定系统.....	45
习 题	49

第十五章 交变应力

§ 15-1 金属疲劳.....	53
§ 15-2 疲劳限.....	56
§ 15-3 疲劳限图.....	57
§ 15-4 影响疲劳限 σ_{-1} 的因素.....	58
§ 15-5 对称循环的疲劳强度校核.....	63
§ 15-6 非对称循环的疲劳强度校核.....	64
§ 15-7 疲劳公式的推导.....	66
§ 15-8 扭转联合下的疲劳强度.....	68
*§ 15-9 有限寿命计算简介.....	71
§ 15-10 提高抵抗疲劳能力的措施·结束语.....	74
习 题	76

第十六章 稳 定

§ 16-1 稳定平衡与不稳平衡.....	81
§ 16-2 两端铰支的压杆的临界力.....	82
§ 16-3 杆端约束的影响.....	83
§ 16-4 临界应力图.....	84
§ 16-5 压杆稳定校核.....	86
*§ 16-6 折减系数法.....	88
§ 16-7 提高压杆抗失稳措施.....	89
§ 16-8 能量法求临界力.....	90
*§ 16-9 纵横弯曲.....	93
*§ 16-10 圆环的稳定.....	95
习 题	98

第十七章 厚壁圆筒与旋转圆盘

§ 17-1 厚壁筒的基本方程.....	107
§ 17-2 厚壁筒的位移和应力.....	109
§ 17-3 组合筒.....	113
*§ 17-4 厚壁筒的塑性问题.....	116
*§ 17-5 等厚度旋转圆盘.....	120
习 题	124

第十八章 弹性力学平面问题

§ 18-1 概说.....	128
§ 18-2 平面应力.....	128
§ 18-3 平衡方程与边界条件.....	129
§ 18-4 位移和应变分量.....	131
§ 18-5 协调方程.....	132
§ 18-6 平面应变.....	134
§ 18-7 应力函数.....	136
§ 18-8 用多项式作为应力函数.....	137
§ 18-9 自由端受力的悬臂梁.....	141
§ 18-10 用极坐标解平面问题.....	145
§ 18-11 轴对称问题.....	147

*§ 18-12 曲杆的纯弯曲	149
§ 18-13 有中心小孔的板条的拉伸	151
*§ 18-14 受集中力的楔形体	155
*§ 18-15 沿直径受压的圆盘	157
习 题	159

第十九章 实验应力分析

§ 19-1 前言	163
§ 19-2 用电阻应变仪测量应变	163
§ 19-3 测量电桥的接法	167
§ 19-4 两向应力状态下主方向已知时的应力测定	168
§ 19-5 两向应力状态下主方向未知时的应力测定	169
§ 19-6 应变花	171
*§ 19-7 平面应变分析	173
*§ 19-8 动态应变测量简介	175
§ 19-9 平面偏光	176
§ 19-10 应力光学定律	178
§ 19-11 平面模型在平面偏光下的光学效应	179
§ 19-12 材料条纹值	183
§ 19-13 等倾线与等差线的区分	184
*§ 19-14 圆偏光	184
*§ 19-15 平面模型在圆偏光下的光学效应	186
*§ 19-16 边界应力和应力集中系数的测定	188
*§ 19-17 补偿方法	189

*§ 19-18 剪应力差法	191
*§ 19-19 三向光弹性简介	197
习 题	198

第二十章 平面有限单元法基础

§ 20-1 概述	202
§ 20-2 单元的划分与单元位移模式	203
§ 20-3 用虚功原理求节点位移	207
§ 20-4 平衡方程的实际写法	214
§ 20-5 例题	216
*§ 20-6 矩阵写法	226
§ 20-7 简短的总结	229
习 题	230

第二十一章 线弹性断裂力学

§ 21-1 概述	231
§ 21-2 裂纹尖端附近的应力和位移·应力强度因子	232
*§ 21-3 断裂判据 $K_I = K_{Ic}$ 的证明	240
§ 21-4 裂纹尖端的塑性区及应力强度因子的修正	244
§ 21-5 平面应变断裂韧度 K_{Ic}	248
§ 21-6 低应力断裂判据的应用	254
§ 21-7 线弹性断裂力学在疲劳问题上的应用	257
习 题	261
习题答案	263

第十三章 变 形 能 法

§13-1 杆件基本变形的变形能

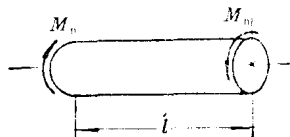
当作用于弹性体的外力由零逐渐增至最后值时,弹性体的变形也由零增至其最后值,在这个过程中外力将完成一定量的功。在弹性范围内,外力作的功在数值上等于存储于弹性体内的变形能。在§1-8讨论直杆轴向拉伸变形能时即运用了上述概念。在§9-8讨论从物体中切割出的单元体的变形能时,把作用于单元体侧面上的应力当作外力看待,也运用了上述概念。利用变形能法来研究材料力学中的某些问题,特别是求杆件或结构的变形,是非常有效的。本章就讲述用能量方法求结构的变形。为此先研究杆件在基本变形下的变形能。

由§1-8知,对于直杆的轴向拉伸(图1-18),外力在轴向伸长上作功,在弹性范围内,此功等于储存于杆件内的变形能,即

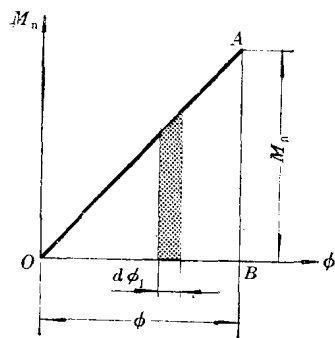
$$U = \frac{N\Delta l}{2} = \frac{N^2 l}{2EA} = \frac{(\Delta l)^2 EA}{2l} \quad (1-7)$$

这里 N 为轴力, Δl 为杆的轴向伸长, l 为杆的原长, EA 为抗拉刚度。

对于直杆扭转(图13-1a),当截面上扭矩由零增至 M_n 时,扭角亦由零增加至 ϕ 。在弹性范围内扭角与扭矩呈线性关系,如图13-1b的 OA 直线。图中阴影面积表示当扭角有微小增量 $d\phi$ 时扭矩作的功,故三角形 OAB 的面积表示扭矩由零逐渐增加至 M_n 时所作的总功。此功等于储存于杆件中的扭转变形能,即



(a)



(b)

图 13-1

$$U = \frac{M_n \phi}{2} \quad (a)$$

因为

$$\phi = \frac{M_n l}{GI_n} \quad (b)$$

所以

$$U = \frac{M_n^2 l}{2GI_n} = \frac{\phi^2 GI_n}{2l} \quad (13-1)$$

这里 l 为杆长, GI_n 为杆的抗扭刚度。如杆为圆截面, 则 I_n 应代以极惯矩 I_p ; 如为矩形截面, 则 I_n 应代以 $\beta b^3 h$ (见 § 5-9)。

当直杆承受 P_1, P_2 力而发生弯曲变形时(图 13-2a), 我们自梁中 x 处取出一微段 dx 。此 dx 段两侧面作用着弯矩 M 和剪力 Q , 如图 13-2b 所示。当载荷由零逐渐增长至最后值 P_1, P_2 时, 弯矩和剪力亦由零增长至最后值 M 和 Q 。对应着弯矩, dx 段两侧面的相对转角亦由零增长至最后值 $d\theta$, 因之弯矩在相对转角上所作的功 $M \cdot d\theta/2$ 等于储存于此微段内的弯曲变形能 dU ,

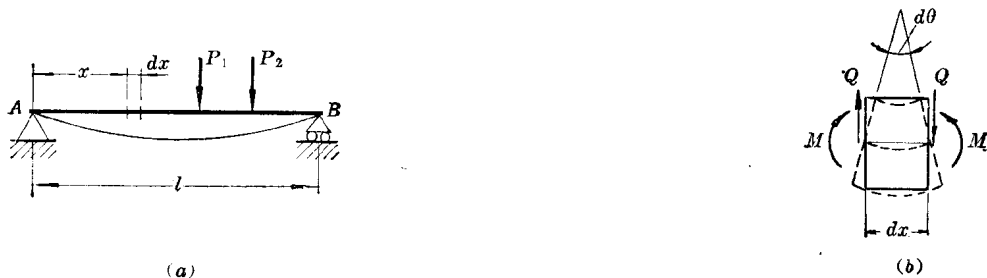


图 13-2

$$dU = \frac{M d\theta}{2}$$

于是整个梁的弯曲变形能为

$$U = \int_l \frac{M d\theta}{2} \quad (13-2a)$$

由第八章 § 8-3 知 $\frac{d\theta}{dx} = y'' = \frac{M}{EI}$, 即 $d\theta = \frac{M}{EI} dx$, 代入上式

$$U = \int_l \frac{M^2 dx}{2EI} \quad (13-2b)$$

又因 $EI y'' = M$, 代入上式得弯曲变形能的另一表达式

$$U = \int_l \frac{1}{2} EI (y'')^2 dx \quad (13-2c)$$

再看图 13-2b, 当 dx 微段左右侧面发生相对转角 $d\theta$ 时, 剪力 Q 并不做功; 但由于 Q 的作用, dx 段左右侧面要发生相对错动(图中未画出), 剪力 Q 在相对错动上要做功, 因而 dx 段还储存有剪切变形能。在通常情况下剪切变形能比弯曲变形能为小而可以略去, 有些情况则不能略去, 参看 § 13-5。

由上面的讨论可看出变形能 U 是内力 (N, M_n, M) 或变形 ($\Delta l, \phi, y''$) 的二次函数。如图 13-2, 由 P_1 或 P_2 单独作用时任一截面 x 的弯矩为 M_1 或 M_2 , P_1 和 P_2 同时作用时 x 截面的弯矩 $M = M_1 + M_2$, 将此式代入 (13-2b) 式, 得出

$$U = \int_l \frac{(M_1 + M_2)^2 dx}{2EI} = \int_l \frac{M_1^2 dx}{2EI} + \int_l \frac{M_2^2 dx}{2EI} + \int_l \frac{M_1 M_2 dx}{EI}$$

上式右方的第一,二两项分别表示 P_1 , P_2 单独作用时的变形能。所以 P_1 , P_2 单独作用时产生的变形能之和并不等于两者同时作用时的变形能。故一般说来, 变形能不能叠加。如果构件上有两种载荷, 其中任一种载荷在另一种载荷引起的变形上如不作功, 则此两种载荷单独作用时的变形能可以叠加, 以得到同时作用时的变形能。例如一直杆同时承受弯曲和扭转, 扭矩在弯曲引起的转角 $d\theta$ 上不作功, 弯矩在扭转引起的扭角 $d\phi$ 上也不做功。故杆件的拉、弯、扭变形能可单独计算, 然后叠加求出三者同时作用的总变形能。

杆件上作用载荷时, 其作用点因杆件变形而发生位移, 故载荷在此位移上做功, 此功等于杆内的变形能。所以也可以用载荷的功来求变形能。今以图 13-3 的杆系结构为例, 其上承受载荷 P_1 、 P_2 、 P_3 (载荷统一用 P 表示, 注意此处 P_3 是一力偶)。因在弹性范围内结构储存的变形能与加载次序无关 (这一点在本节末讨论), 而只依赖于载荷的最后值, 所以我们可以认为诸载荷均由零按同一比例增加。如果结构变形 (位移) 和载荷之间是线性关系 (这种结构常称为线性结构), 则变形在加载过程中也象载荷那样按某一比例增加。在计算载荷做功时我们用到的是相应位移。对于集中载荷, 相应位移指的是载荷作用点沿载荷方向的分位移而不是总位移; 对于力偶, 则相应位移指的是角位移, 即力偶作用截面的转角。例如结构变形后 C 点移到 C' 点, 所以 P_2 力只在总位移 CC' 沿 P_2 方向的分位移 δ_2 (即是 P_2 力的相应位移) 上做功, 当上述比例关系存在时, P_2 力的功是 $P_2\delta_2/2$ ①。同理力偶 P_3 在相应位移即角位移 δ_3 上所作的功为 $P_3\delta_3/2$ 。将所有载荷所作的功相加, 得到结构的变形能,

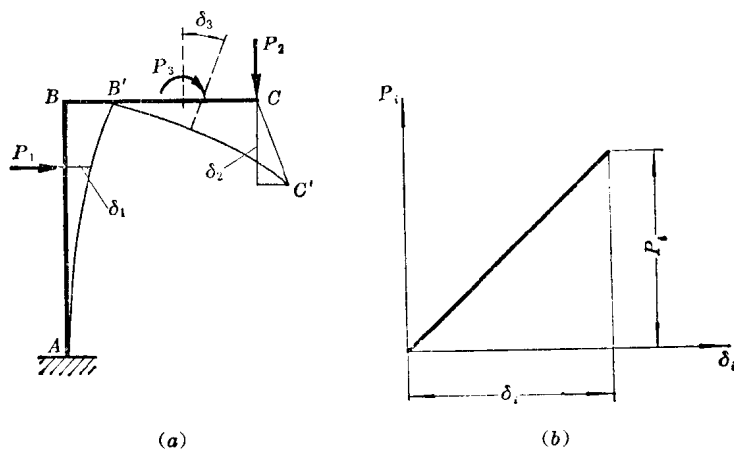


图 13-3

$$U = \frac{1}{2}P_1\delta_1 + \frac{1}{2}P_2\delta_2 + \frac{1}{2}P_3\delta_3 \quad (c)$$

在上式并不包括固定端 A 处反力所作的功, 因为它们作的功为零。这里我们强调上式只能用于

① 因为位移与载荷是线性关系, 故 δ_2 可写为 $\delta_2 = K_1P_1 + K_2P_2 + K_3P_3 = P_2 \left(K_1 \frac{P_1}{P_2} + K_2 + K_3 \frac{P_3}{P_2} \right)$, 其中 K_1 、 K_2 、 K_3 均为常数 (决定于具体结构)。在比例加载的过程中 P_1/P_2 和 P_3/P_2 也是常数, 故 δ_2 表示式中圆括弧中的诸项和是一常数。所以 δ_2 与 P_2 的关系是线性的, 对照图 13-3b, 可知 P_2 力的功是 $P_2\delta_2/2$ 。

线性结构。对于非线性结构(变形和载荷之间呈现非线性关系)上式不适用, 因为变形 δ_i 和载荷 P_i 之间不存在线性关系时, P_i 的功不是 $P_i \delta_i / 2$ 。

最后我们再讨论一下在弹性范围内变形能与加载次序无关的问题。以第八章图 8-11 的简支梁为例, 中点受集中力 P , 右支座受有力偶 m 。梁中点的挠度为

$$\delta = \frac{Pl^3}{48EI} + \frac{ml^2}{16EI}$$

梁右端的转角为

$$\theta = \frac{Pl^2}{16EI} + \frac{ml}{3EI}$$

根据(c)式, 梁内的变形能为

$$U = \frac{1}{2} P\delta + \frac{1}{2} m\theta = \frac{1}{EI} \left(\frac{P^2 l^3}{96} + \frac{m^2 l}{6} + \frac{mPl^2}{16} \right) \quad (d)$$

如果在这梁上先加 P 力后, 再加力偶 m , 则 P 与 m 所作的功为

$$U = \frac{1}{2} P \cdot \frac{Pl^3}{48EI} + P \cdot \frac{ml^2}{16EI} + \frac{1}{2} m \cdot \frac{ml}{3EI} \quad (e)$$

上式中的第一项是 P 力由零增至最后值所作的功, 第三项是力偶 m 由零增至最后值所作的功, 第二项是先加于梁上的 P 力在后加的力偶 m 所引起的中点挠度 $ml^2/16EI$ 上作的功(注意此功没有因子 $1/2$)。显然(e)式和(d)式是相等的。这就说明结构的变形能与加力的次序无关, 而只决定于载荷的最终值。

§ 13-2 单位力法求变形

求结构位移的变形能法有许多种, 其中单位力法(也称为莫尔法)比较方便, 采用的也比较多。今以图 13-4a 的梁为例来说明此法求变形的原理。现在要寻找 AB 梁在 P_1, P_2 力作用下任一点 C 的竖直位移 Δ 。设沿 P_1, P_2 方向的位移分别为 δ_1, δ_2 , 载荷 P_1, P_2 分别在位移 δ_1, δ_2 上作功, 因而梁储存有变形能 U , 按照(13-2b)式,

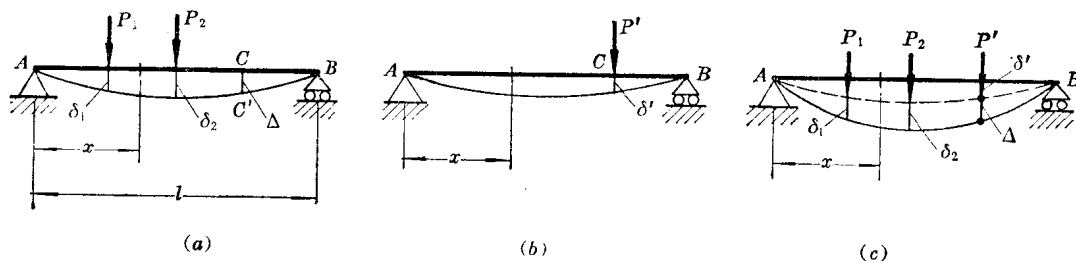


图 13-4

$$U = \int \frac{M^2 dx}{2EI} \quad (a)$$

这里 M 是 x 截面由于载荷 P_1, P_2 引起的弯矩。积分范围是整个梁长 l , 在这里被省略了。

看图 13-4b, 我们先在 C 点沿竖直方向加一单位力 $P' = 1$, 沿单位力方向的位移是 δ' , 对于此

图可写出变形能

$$U' = \int \frac{(M')^2 dx}{2EI} \quad (b)$$

这里 M' 是 x 截面由于单位力 P' 引起的弯矩。

再看图 13-4c, 其加力次序是先加 P' 力, 后加 P_1 和 P_2 力。先加 P' 力, AB 梁发生变形(如图中虚线所示), 此时梁的变形能是 U' 。在此变形的位置上再加 P_1 和 P_2 力, AB 将进一步变形, 由虚线位置变形到实线位置。在此过程中 P_1 、 P_2 力分别在位移 δ_1 、 δ_2 上作功, 梁的变形能增加了 U 。此外 P' 还将完成功 $P'\Delta$, 因为在加 P_1 、 P_2 力时 P' 已作用在梁上了, 并且 P' 力作用点的位移即是图 13-4a 的 CC' , 故最后梁的总变形能是 $U' + U + P'\Delta$ 。在最后变形位置, 梁上 x 截面的弯矩是 $M + M'$, 这里 M 对应着图 13-4a, M' 对应着图 13-4b。于是对于图 13-4c 可写出

$$U' + U + P'\Delta = \int \frac{(M + M')^2 dx}{2EI} \quad (c)$$

由(c)式减去(a)式和(b)式, 并注意 $P' = 1$, 得到

$$1 \cdot \Delta = \int \frac{M' M dx}{EI} \quad (13-3a)$$

上式 M 和 M' 分别是梁上同一截面 x 由于载荷和单位力产生的弯矩, 故应理解为 $M'(x)$ 和 $M(x)$, 此外还应按弯矩符号规定给以正负号。如上式右端积分为正, 说明单位力的功 $1 \cdot \Delta$ 是正, 故载荷引起的位移 Δ 和单位力的矢向一致; 如积分为负则说明 Δ 和单位力的矢向相反。

在上面的讨论中, 当寻求 C 点挠度时, 即在 C 点沿挠度方向加一单位力(图 13-4b)。如果求图 13-4a 上任一截面的转角, 则在该截面加一单位力偶, 仿照上面的推理仍得到(13-3a)式, 不过此时 Δ 代表该截面的角位移, 而 M' 是单位力偶引起的弯矩。此情况下, 如积分得正, 说明角位移 Δ 的转向和所加的单位力偶相同。

对于图 13-3 的杆系结构, AB 杆的每一截面上除弯矩外尚有轴力 N , 那么在(13-3a)式的右方应添入对应项 $N' N dx / EA$, 即

$$1 \cdot \Delta = \int \frac{M' M dx}{EI} + \int \frac{N' N dx}{EA} \quad (13-3b)$$

对于桁架结构, 上式中右方的第一项不存在, 又因为轴力沿每一杆长不变, 于是

$$1 \cdot \Delta = \sum \frac{N'_i N_i l_i}{E_i A_i} \quad (13-3c)$$

式中 i 为杆号, 又上式求和号应包括桁架的每一杆。

例 13-1 对于图 13-5a 的桁架, 试求节点 B 的竖直位移, 设各杆的 EA 都相同。

解: 因为各杆的 EA 都相同, 故利用(13-3c)式时只须计算 $\sum N'_i N_i l_i$ 。对照图 13-5a 求出各杆在载荷 P 作用下引起的轴力 N_i 。然后对照图 13-5b, 在 B 点加竖向单位力, 求出由此单位力引起的轴力 N'_i 。计算结果列入表 13-1。 N_i 和 N'_i 栏中正号表示拉力, 负号表示压力。最后 B 点的竖向位移为

$$\Delta_{vB} = \frac{(3 + 2\sqrt{2})Pl}{EA}$$

结果得正说明 B 点位移向下。

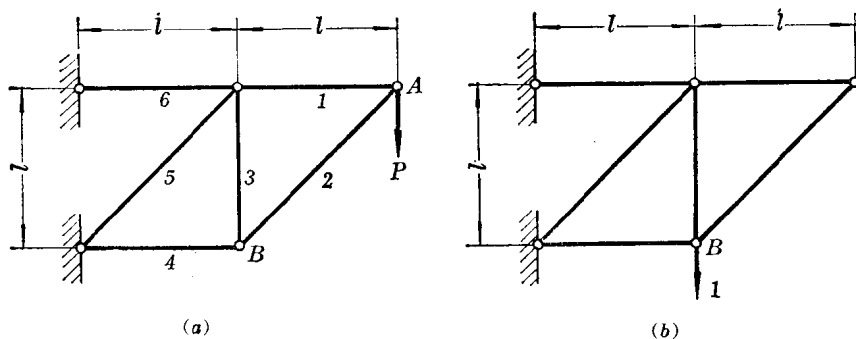


图 13-5

表 13-1

杆 号	杆 长	N_i	N'_i	$N'_i N_i l_i$
1	l	P	0	0
2	$l\sqrt{2}$	$-P\sqrt{2}$	0	0
3	l	P	1	Pl
4	l	$-P$	0	0
5	$l\sqrt{2}$	$-P\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}Pl$
6	l	$2P$	1	$2Pl$

$$\sum N'_i N_i l_i = (3 + 2\sqrt{2}) Pl$$

例 13-2 图 13-6 为一刚架, 两杆的 EI 和 EA 分别相同, 试求 C 点水平位移 Δ_{HC} 。

解: 在 C 点水平方向加一单位力, 如图 13-6b。如果人站在刚架的左下方来观察竖直杆和水平杆, 那么可写出 1、2 截面的弯矩和轴力:

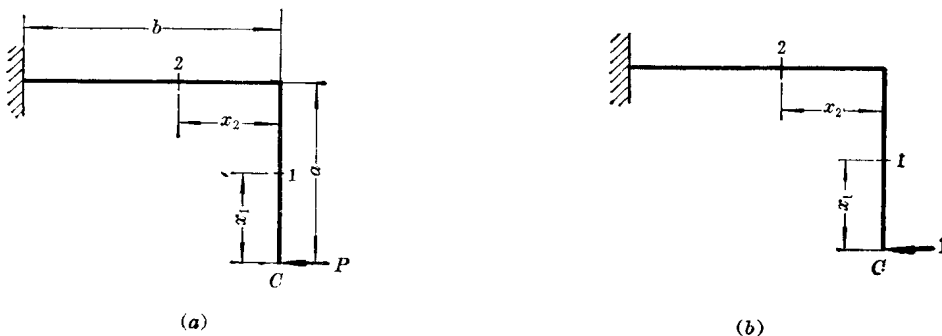


图 13-6

$$M_1 = -Px_1, \quad M_2 = -Pa$$

$$M'_1 = -x_1, \quad M'_2 = -a$$

$$N_1 = 0, \quad N_2 = -P$$

$$N'_1 = 0, \quad N'_2 = -1$$

代入 (13-3b) 式,

$$\Delta_{HC} = \frac{1}{EI} \int_0^a (-Px_1)(-x_1) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^b (-Pa)(-a) dx_2 + \frac{(-1)(-P)b}{EA}$$

$$= \frac{Pa^3}{3EI} + \frac{Pa^2b}{EI} + \frac{Pb}{EA}$$

如果 $b=a$, 则上式变为

$$\Delta_{nc} = \frac{4Pa^3}{3EI} \left(1 + \frac{3I}{4Aa^2} \right)$$

括号中的第一项对应着杆件弯曲变形引起的位移, 第二项对应着杆件拉压变形引起的位移。如两杆均为圆截面(直径为 d), 则 $I/A = d^2/16$, 括号中的第二项变为 $3d^2/64a^2$ 。如 $a=4d$, 则第二项约为 0.3%, 故在求结构位移时, 对于承受弯曲与轴向拉压联合作用的杆件, 可略去轴力的影响。

§ 13-3 图形互乘法

用单位力法求等截面杆的变形时, 杆的 EI 为常数, 这时 (13-3a) 式变为

$$\Delta = \frac{1}{EI} \int M' M dx \quad (a)$$

上式的积分可用图形互乘的代数运算来代替。因为 M' 是由单位力或单位力偶引起的弯矩, 故沿杆长方向 M' 图是由几段折线组成, 而 M 图一般是曲线。设在杆长 l 的一段内 M 图是曲线(图 13-7a), M' 图是直线(图 13-7b), 设此直线方程是

$$M' = A + Bx \quad (b)$$

把 (b) 式代入 (a) 式计算积分:

$$\begin{aligned} \int_0^l M' M dx &= \int_0^l (A + Bx) M dx \\ &= A \int_0^l M dx + B \int_0^l x \cdot M dx \end{aligned}$$

上式第一个积分代表 l 段内 M 图的面积 Ω ; 第二个积分代表此 M 图对于竖坐标轴的面矩, 其值为 Ωx_c , 此处 x_c 是 M 图形心 C 的横坐标。于是上面的积分值是

$$\begin{aligned} \int_0^l M' M dx &= A\Omega + B\Omega x_c = \Omega(A + Bx_c) \\ &= \Omega M'_c \end{aligned} \quad (c)$$

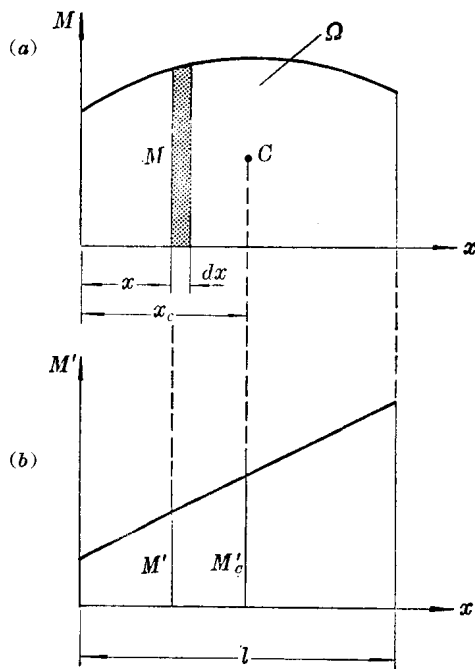


图 13-7

这里 M'_c 是和 C (M 图形心) 对应处的 M' 值。这样对于等截面杆或杆件的等截面段, (a) 式的积分可用 (c) 式代替, 即此积分可用 M 图的面积 Ω 和与 M 图形心 C 对应的 M'_c 的乘积来代替。注意当 M 图为正弯矩时, Ω 应代以正号; M 图为负弯矩时则 Ω 代以负号。 M'_c 也应按弯矩符号给以正负号。此外, 在推导 (c) 式时认为梁的 l 段内 M' 图是一直线, 如果沿梁长 M' 图是由几段直线组成时, 则必须逐段采用 (c) 式。在实际应用中, 常见的 M 图不外是矩形, 三角形和二次抛物线, 它们的面积和形心见图 13-8。

例 13-3 用图乘法求外伸梁 D 点的竖直位移(图 13-9a), 梁的 EI 为常数。

解: 首先须要画出梁在载荷作用下的弯矩图, 为便于应用图乘法可分别画出集中力和分布力的弯矩图(图

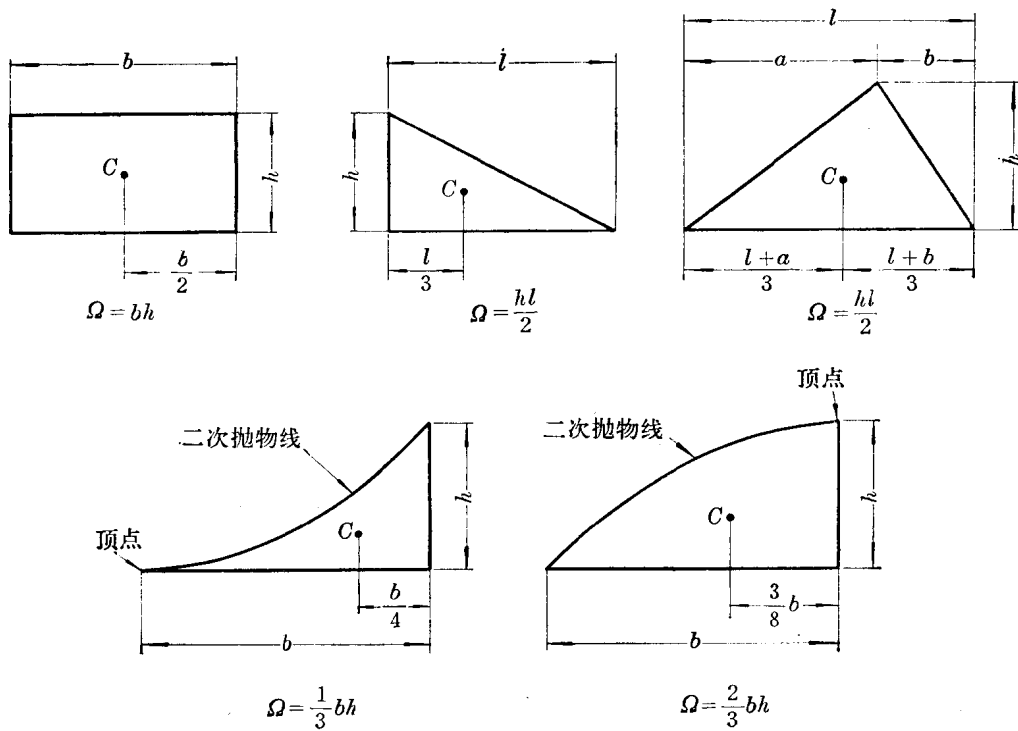


图 13-8

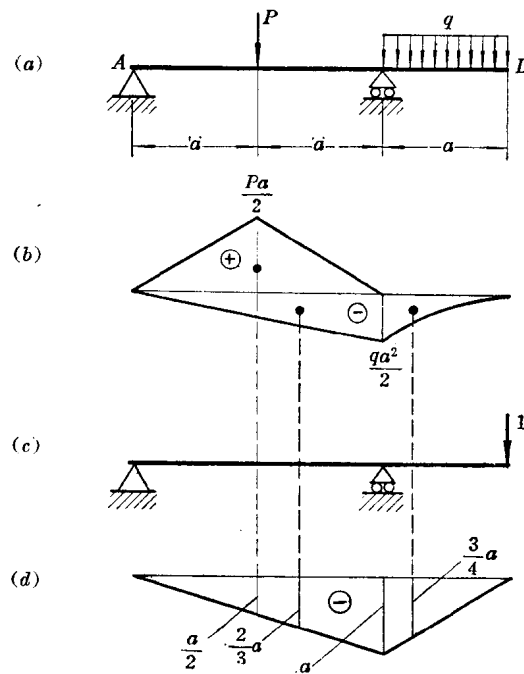


图 13-9

13-9b)。然后在 D 点加向下的单位力，再画出单位力的弯矩图 (图 13-9c, d)。图 13-9b 的弯矩图由两个三角形和一个抛物线组成，找出和它们的形心对应的 M' 图的值，在图 13-9d 上标出。

利用(c)式得到

$$\Delta_D = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{Pa}{2} \times 2a \times \frac{1}{2} \right) \left(-\frac{a}{2} \right) + \left(-\frac{qa^2}{2} \times 2a \times \frac{1}{2} \right) \left(-\frac{2}{3}a \right) + \left(-\frac{qa^2}{2} \times a \times \frac{1}{3} \right) \left(-\frac{3}{4}a \right) \right] = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{4}Pa^3 + \frac{11}{24}qa^4 \right)$$

如果 $P=2qa$, 则 $\Delta_D = -qa^4/24EI$, 负号说明 D 点挠度是向上的, 即和单位力的矢向相反。

例 13-4 图 13-10a 是由三段杆组成的刚架, 三杆的 EI 相同, 试求刚架变形后 A 、 A_1 两点的相对位移 Δ_{AA_1} 。

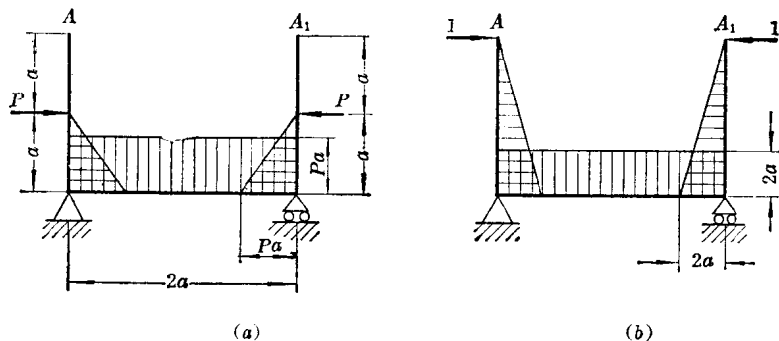


图 13-10

解: 欲求 A 、 A_1 两点之间的相对位移, 可在 A 、 A_1 两点沿两点的连线方向加一对相向的单位力, 如图 13-10b 所示。这时就可利用 (13-3a) 式求 A 、 A_1 两点间的相对位移, 因为该式左方可理解为这一对相向的单位力在 A 、 A_1 两点间相对位移上完成的功。然后分别画出此刚架的载荷弯矩图 and 单位力弯矩图, 我们规定把弯矩图画在杆件的受压纤维的一侧。这样在图形互乘时, 如果 M 图和 M' 图位于杆件的同侧, 则乘积 $\Omega M'_c$ 就是正的; 位于异侧该乘积就是负的。利用 (c) 式得出

$$\Delta_{AA_1} = \frac{1}{EI} \left[\frac{Pa \times a}{2} \times \frac{5}{3}a \times 2 + Pa \times 2a \times 2a \right] = +\frac{17}{3} \frac{Pa^3}{EI}$$

Δ_{AA_1} 得正号, 表示刚架变形后 A 、 A_1 两点的相对位移和所加的相向单位力一致, 即此两点互相靠近。

对于承受弯曲与扭转联合作用的杆件, 如采用单位力法求其变形时, 在 (13-3a) 式的右方应加入和扭矩有关的对应项。此项可比照弯矩项写出, 即把弯矩 M 和 M' 分别换为扭矩 M_n (载荷引起的) 和 M'_n (单位力或单位力偶引起的), 抗弯刚度 EI 换为抗扭刚度 GI_n , 最后

$$1 \cdot \Delta = \int \frac{M' M dx}{EI} + \int \frac{M'_n M_n dx}{GI_n} \quad (13-3d)$$

例 13-5 图 13-11a 为一折轴杆, 两杆的抗扭刚度 GI_n 和抗弯刚度 EI 分别相等, 试求截面 C 绕 x 方向的转角 θ_{x0} 。

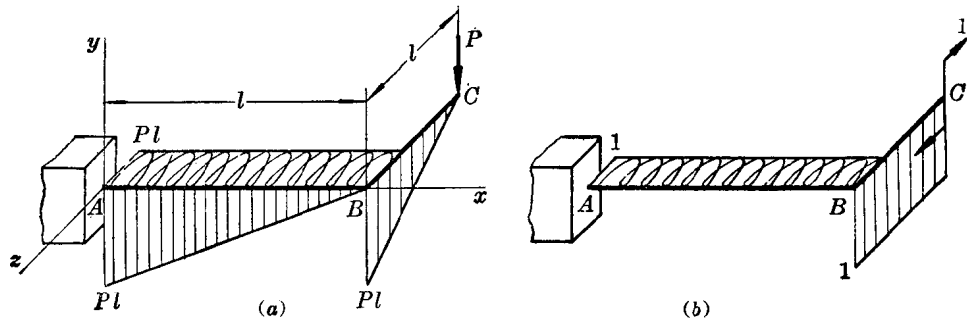


图 13-11

解: 图 13-11a 的折轴杆在 P 力作用下承受弯曲与扭转的联合作用。求截面 C 绕 x 方向的转角可在 C 处加一绕 x 方向的单位力偶 (图 13-11b)。画出折轴杆在载荷和单位力偶分别作用下的弯矩图和扭矩图, 利用 (13-3d) 式和图乘法得

$$\theta_x = \frac{1}{EI} \times \frac{Pl \times l}{2} \times 1 + \frac{1}{GI_n} Pl \times l \times 1 = \frac{Pl^2}{2EI} + \frac{Pl^2}{GI_n}$$

如 AB , BC 两杆为圆截面, 则 $I_n = I_p = 2I$, 再利用 (9-15) 式 $E = 2(1+\mu)G$, 上式变为

$$\theta_x = \frac{Pl^2}{2EI} + \frac{Pl^2 \times 2(1+\mu)}{E \times 2I} = \frac{Pl^2}{2EI} [1 + 2(1+\mu)]$$

上式中方括号内第一项和第二项分别对应弯曲变形和扭转变形引起的角位移, 由此式可看出当弯矩、扭矩同时存在时, 求变形时扭矩项不可略去。

§ 13-4 变截面梁的弯曲变形

利用单位力法求变截面梁的弯曲变形也比较简便。如梁的截面沿梁长度发生变化, 那么惯性矩将是 x 的函数 $I(x)$, 将它代入 (13-3a) 式的右端, 完成积分即得到变截面梁的变形。在机械工程上经常用到阶梯轴, 其直径成阶梯状改变, 其上由齿轮或皮带轮传来的载荷也都按集中载荷处理。这种情况下, 对阶梯轴的每一直径不变段, 可利用图乘法计算积分 $\int M' M dx$, 然后再将结果累加。图 13-12 所示为阶梯轴的某一等粗段及其对应的 M 图和 M' 图。把 M 图分为两个三角形, 标出其形心 C_1 和 C_2 。这时

$$M'_{C1} = M'_1 + \frac{1}{3}(M'_2 - M'_1)$$

$$M'_{C2} = M'_1 + \frac{2}{3}(M'_2 - M'_1)$$

利用图乘法得

$$\begin{aligned} & \int_0^a \frac{M' M dx}{EI} \\ &= \frac{1}{EI} \left\{ \frac{M_1 a}{2} \left(M'_1 + \frac{M'_2 - M'_1}{3} \right) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{M_2 a}{2} \left[M'_1 + \frac{2}{3}(M'_2 - M'_1) \right] \right\} \end{aligned}$$

上式化简后得

$$\int_0^a \frac{M' M dx}{EI} = \frac{a}{6EI} [M_1(2M'_1 + M'_2) + M_2(2M'_2 + M'_1)] \quad (13-4)$$

在利用上式时 M 和 M' 应带以正确符号。

例 13-6 图 13-13 为一阶梯轴, 用公式 (13-4) 求此轴 C 截面转角。

解: 在 C 截面加一单位力偶。画出载荷弯矩图和单位力偶弯矩图, 标出分段处的 M 值和 M' 值。利用 (13-4) 式得

$$\begin{aligned} \theta_c = & \frac{a}{6EI_1} \left[0 + \frac{1}{4} Pa \left(2 \times \frac{1}{4} + 0 \right) \right] + \frac{a}{6EI_2} \left[\frac{Pa}{4} \left(-\frac{3}{4} \times 2 - \frac{1}{2} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{Pa}{2} \left(-\frac{1}{2} \times 2 - \frac{3}{4} \right) \right] + \frac{a}{6EI_3} \left[\frac{Pa}{2} \left(-\frac{1}{2} \times 2 - \frac{1}{4} \right) + \right. \end{aligned}$$

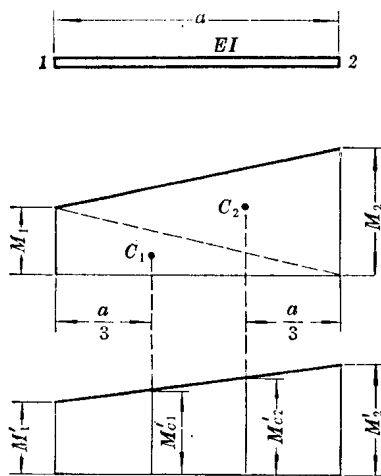


图 13-12

$$\begin{aligned}
 & + \frac{3}{4}Pa \left(-\frac{1}{4} \times 2 - \frac{1}{2} \right) \Big] + \frac{a}{6EI_2} \left[\frac{3}{4}Pa \left(-\frac{1}{4} \times 2 + 0 \right) + 0 \right] \\
 & = \frac{Pa^2}{48EI_1} - \frac{11Pa^2}{48EI_2} - \frac{11Pa^2}{48EI_3} - \frac{3Pa^2}{48EI_2} \\
 & = -\frac{Pa^2}{48EI_3} \left(-\frac{I_3}{I_1} + 14\frac{I_3}{I_2} + 11 \right)
 \end{aligned}$$

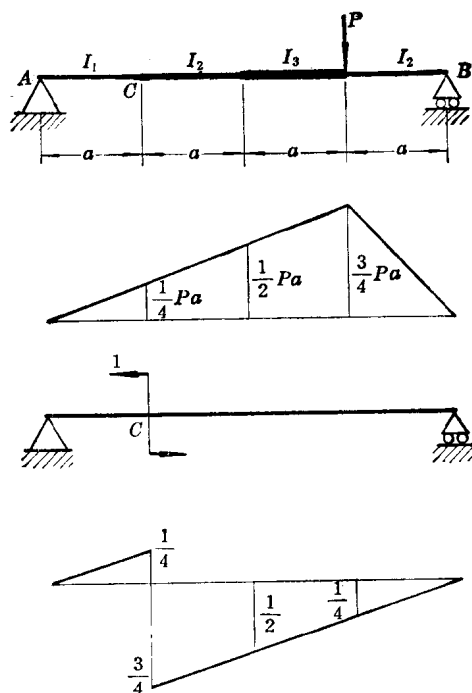


图 13-13

*§13-5 剪力对弯曲变形的影响

在第八章讨论弯曲变形时未涉及剪力对弯曲变形的影响。本节用能量方法讨论这一问题。先看弯曲时的剪切变形能。图 13-14a 示一悬臂梁，在 x 截面距中性轴为 y 处的单元体（图 13-14b）上作用着正应力 $\sigma = My/I$ 和剪应力 $\tau = QS/Ib$ 。由公式(5-5)知单位体积的剪切能（剪切能密度）为

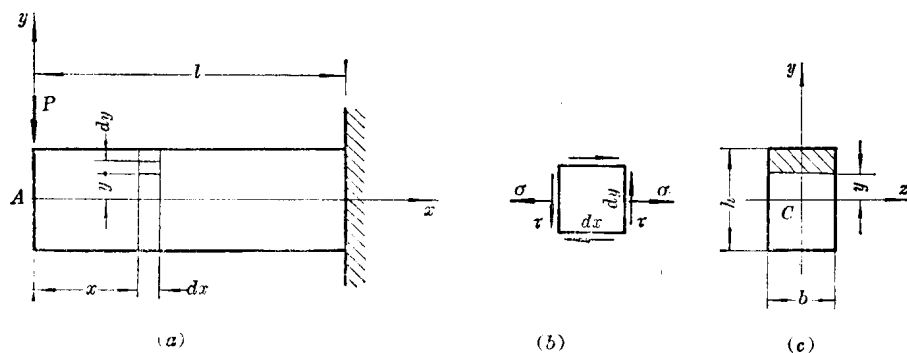


图 13-14