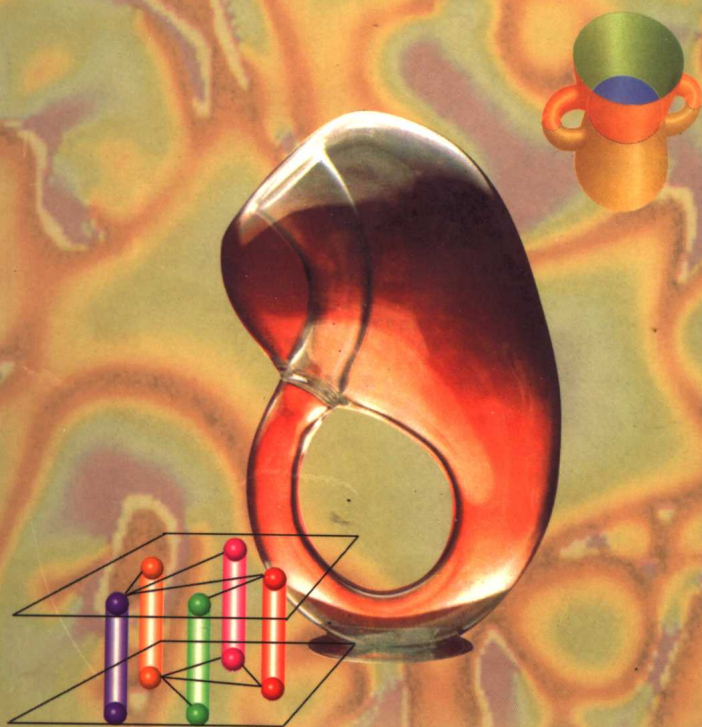


科学 (科学美国人中文版) 办刊二十周年纪念

数学游戏

(下)

郭凯声等 编著



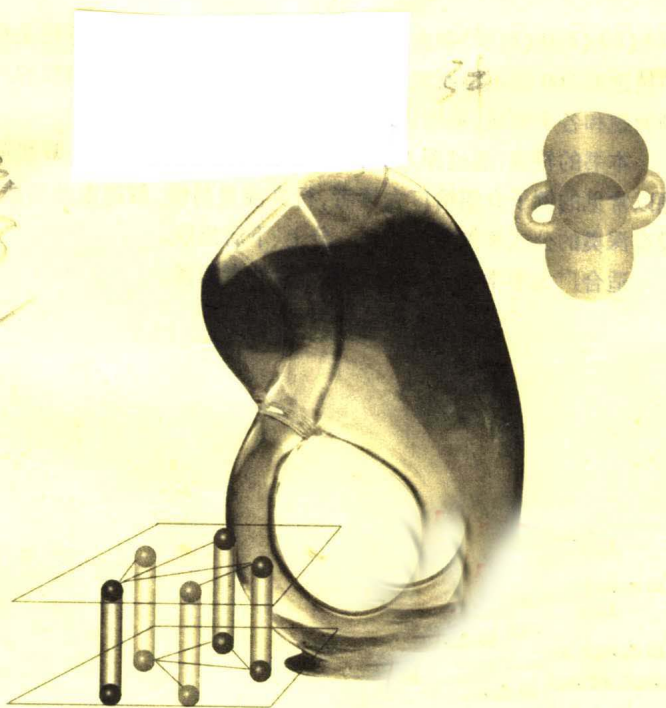
科学丛书

科学技术文献出版社

数学游戏

郭凯声等 编著 (下)

科学丛书



田 科学技术文献出版社

01-49

图书在版编目(CIP)数据

数学游戏/郭凯声等编著.-北京:科学技术文献出版社,1999.10
(科学丛书)

ISBN 7-5023-3427-0

I. 数… II. 郭… III. 数学-普及读物 IV. O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 40766 号

出 版 者:科学技术文献出版社

图 书 发 行 部:北京市复兴路 15 号(中央电视台西侧)/100038

图 书 编 务 部:北京市西苑南一院东 8 号楼(颐和园西苑公汽站)/100091

邮 购 部 电 话:(010)68515544-2953,(010)68515544-2172

图书编务部电话:(010)62878310,(010)62878317(传真)

图书发行部电话:(010)68514009,(010)68514035(传真)

E-mail:stdph@istic.ac.cn;stdph@public.sti.ac.cn

策 划 编 辑:科 文

责 任 编 辑:陈家显

责 任 校 对:赵文珍

责 任 出 版:周永京

封 面 设 计:宋雪梅

发 行 者:科学技术文献出版社发行 新华书店总店北京发行所经销

印 刷 者:三河市富华印刷包装有限公司

版 (印) 次:1999 年 10 月第 1 版第 1 次印刷

开 本:850×1168 32 开

字 数:319 千

印 张:11.875 彩插 8

印 数:1~5000 册

定 价:21.00 元(下) 上下册共 42.00 元

© 版权所有 违法必究

购买本社图书,凡字迹不清、缺页、倒页、脱页者,本社发行部负责调换。

传播科学知识
推进社会进步

宋健

一九九九年六月

科学丛书序

苍宇时空无垠,科学前沿无涯。马克思说“科学是历史的有力杠杆”,“是最高意义上的革命力量”。人类在地球上繁衍、生存和发展,愚昧—文明—更文明的变革和发展史就证明了这一伟大的真理,古埃及的金字塔和木乃伊、中国的长城和四大发明无不是科学的丰碑。近代的工业革命和当今的新技术革命无不是科学的辉煌。

“科学技术是第一生产力”已为世人共识,当今世界科学已走出试验室步入整个人类社会,并成为—个国家综合国力的具体象征。

把中国建设成科技强国,是我国几代领导人的夙愿,亦是国人梦寐以求的事,“科教兴国”已成为我们的国策。当今世界现代科学技术发展日新月异,新的科技革命蓬勃兴起,知识经济正迎着新世纪的曙光向我们走来。时代赋予我们机遇和挑战,科教界肩负历史重任,我们必须抓住机遇,迎接挑战,拼搏开拓,创新进取,增强国家综合国力,圆科技强国之梦。

在社会变革和技术、知识创新中,科学知识读物的作用是十分重要的。科学(科学美国人中文版)杂志是

融自然科学、社会科学和人文科学为一体的综合科学期刊,享誉世界。它是 70 年代周恩来总理接受著名科学家、诺贝尔奖得主杨振宁的建议、倡导,与美国合办的,至今已办刊 20 年,出版了 250 多期杂志。《科学美国人》创刊已 150 多年,文稿多系知名专家学者撰写,其中有 110 多位诺贝尔奖得主为其撰稿近 200 篇。该刊深入浅出地介绍科技前沿发展水平和成就,深受广大读者喜爱。

在人类即将跨入新的千年之际,科学杂志社以其杂志为蓝本并特约国内专家学者编写了《宇宙探索》、《生命的起源与进化》、《脑与意识》、《数学游戏》、《世纪电脑》、《考古探秘》、《动物行为的奥秘》、《建筑科学与文化》、《生命的卫士——免疫系统》9 册科学丛书,奉献给广大的科学爱好者和读者。毫无疑问,科学丛书的出版对于落实“科教兴国”战略,实施技术和知识创新,普及科学文化知识,拓展人们的科技视野、提高科学文化素质,推动经济、社会发展与进步均有所裨益,希望广大科教界工作者和广大的科学爱好者阅读它、喜爱它,增强自己的科技才干,努力创新,勇于攀登科学高峰,为把我国建设成为科技强国做出贡献!

柳 杨

科学丛书前言

人类在天地间发展,20 世纪作为人类有史以来最重要里程碑所提示的最高哲理就是“科学技术是第一生产力”。未来的 21 世纪更是科学与艺术、技术与文化、社会与自然融合、发展的新时代——人类将步入一个蔚为壮观、五彩缤纷的超级世界。为此,无论是总结 20 世纪科技文化的发展,还是展望 21 世纪绮丽的未来,都需要一套多视角、多方面探讨、介绍科学重要发展、应用及其走向的科普丛书。现奉献给读者的**科学丛书**就是为此所做的努力。

科学丛书系以**科学**(科学美国人中文版)杂志为蓝本,加上中国专家近作编辑而成。全套书共 9 个分册,即《宇宙探索》、《生命的起源与进化》、《脑与意识》、《数学游戏》、《世纪电脑》、《考古探秘》、《动物行为的奥秘》、《建筑科学与文化》、《生命的卫士——免疫系统》。

《科学美国人》杂志创刊于 1845 年,是历史悠久、享誉世界的综合性科学杂志。该刊内容丰富,广涉自然科学、社会科学、技术科学和人文科学诸领域。其文精辟详实、观点新颖、格调高雅,并采用朴素的语言和精美彩图让相关或非相关领域之读者均能及时了解到各科学领域前沿最新发展走向及其社会意义。



撰稿者多为世界著名学者,至今已有 110 多位诺贝尔奖得主先后在该刊上发表了近 200 篇文章,该刊深受读者热爱。它以中、英、德、法、日等 10 多种文字在世界上发行,总发行量逾 100 万份。

科学杂志是 1979 年正式在我国出版的,至今已出版 250 多期。把中国建设成科学强国是中国几代领导人的夙愿,1973 年 7 月毛泽东在中南海书房接见美籍华人诺贝尔奖得主杨振宁博士,坐陪的有周恩来总理和周培源先生,谈话中周总理请杨振宁想个好办法激励科学在中国的发展,杨说:“……尤其值得做的事也许是将《科学美国人》译成中文……”。之后,周总理请方毅副总理办此事。当时《科学美国人》出版发行人杰拉德·皮尔对中国十分友好,愿意与我国合作办刊。方毅同志专题报告给邓小平和李先念同志,经同意,国家科委下文(78 国科学发 238 号)责成中国科学技术情报研究所重庆分所与美国合办。

“激励科学在中国的发展”是老一辈领导人的夙愿,“科教兴国”是当今中国的国策。为发展科学、迎接知识经济的挑战,庆祝新中国成立 50 周年和**科学**杂志办刊 20 周年,在新世纪的钟声即将敲响之际,我们编辑**科学丛书**,献给祖国母亲,献给新世纪,献给所有关怀、支持**科学**出版的领导、学者和读者。在此我们衷心地感谢《科学美国人》杂志社的朋友对我们工作的大力支持和友好合作。

此次编辑出版时间十分仓促,错误和不足之处在所难免,敬请读者批评指正。

王元凯

科学丛书 编委会

顾问 惠永正 严东生 张存浩 张玉台
白春礼 黎懋明 陈源曙

编委 (以姓氏笔画为序)

王大珩	王绶琯	王文清	王元凯
王顺昌	王葆青	王 琦	朱 伟
朱锡华	孙佐满	李国杰	李伯谦
李 竞	张树义	邹大挺	金 磊
赵玉芬	赵国辉	郭凯声	常 平
程天民	曾晓东		

总编 王元凯

目 录

前言	1
1. 沙里淘金寻因子	2
2. 玻璃克莱因瓶	9
3. 拓扑裁缝	14
4. 纽结与连接	21
5. 化方为方	29
6. 拼板难题	34
7. 填充的奥妙	38
8. 如何把圆沙丁鱼塞满罐头	47
9. 球的堆集	54
10. Lisp 入门	64
11. Lisp 与递归	81
12. 关于 Lisp 语言的乐趣	98
13. 闯过华容道	114

14. 保持社交距离	124
15. 网格图案	134
16. 画曲线的隐身教授	142
17. 古代索一轮计算机	151
18. “星际旅行”游戏	161
19. 智能小车	173
20. 虚拟股评家	182
21. 算法生成的旋律	191
22. 吞食屏幕的螃蟹	201
23. 探索遗传算法	210
24. 无形量尺	220
25. 电脑棋手	229
26. 电脑模拟的星团舞会	239
27. 机器人漫游奇境	248

目 录

28. 赛伯空间中的花样飞行	254
29. 模拟气体压力、液体扩散及临界质量	263
30. 探索数字生物王国	272
31. 处理大数	281
32. 乌龟几何	293
33. 表格软件与细胞自动机	304
34. 思维列车与算法轨道	312
35. 给编程新手的礼物	319
36. 着色问题与电子学	330
37. 投下一丝黑暗	335
38. 如何玩正方棋(Quad)	341
39. 美术馆需要多少保安人员	346
40. 马能走遍棋盘吗	355
41. 月球上的帝国	360

前 言

本书是从《科学》杂志(Scientific American 中文版)自 1978 年创刊以来发表的数学游戏及计算机游戏专栏文章中精选近 100 例汇编而成的。《Scientific American》从 1952 年起开辟《数学游戏》专栏,特邀著名游戏数学专家马丁·加德纳及其他数学家与计算机科学家先后为该专栏撰稿,至今不断。该专栏的内容广涉数学游戏和计算机游戏的各种问题和各个领域,集知识性、趣味性和娱乐性为一体。作者以深入浅出地把一些复杂的数学和计算机问题通过常见的例子介绍给广大读者,行文浅显易懂,叙述生动活泼,没有深奥的公式和抽象的论证。凡具有高中数学水平的人一般都能看懂。

本书适合于广大中学生和大学生阅读;对于爱好数学的成人,本书也有相当大的吸引力。我们希望它能起到启迪思维、开阔视野、激发想象力和创造力的作用。本书内容如有错误或不当之处,敬请广大读者批评指正。

1. 沙里淘金寻因子

把一个大数分解因子是数论中最富挑战性的问题之一。读者应当记得,某数的一个因子就是能够整除该数的任何一个数;如果一个数除了1和它自身外没有其他任何因子,则这个数就是素数。其次来谈一点“布局”的情况。素数王国——由素数组成的世界——在数轴上的分布趋势是越来越稀疏,而且是相当随机的。但因子王国——这是一个整数世界——则大不相同。素数(它们只有一个因子,就是它们自己)东一个西一个地嵌插在因子王国中。大多数的数都不是素数。很明显,有一半的数是2的倍数,1/3的数是3的倍数,而2/3的数不是2的倍数就是3的倍数(为什么不是5/6的数?读者自己去想想)。但是有相当大一部分数没有小因子。如果你能找到某数的哪怕一个因子,那么剩下的因子就是此因子除该数后所得的商的因子,而商比原来那个数要小。因此,难就难在要找到第一个因子。

这的确是件名符其实的难事:1903年,美国数学家F. N. Cole花了3年的星期天用纸和笔进行计算后发现了 $2^{67} - 1 = 193\,707\,721 \times$



761 838 257 287。佐治亚大学的 Carl Pomerance 在 1996 年 12 月号《美国数学学会通告》上考察了这方面的最新进展。

学校里教的把一个数分解因子的方法是形式化的试错法：先用 2 来试除，然后是 3，这样试除下去直到该数的平方根。此方法的效率低得无可救药。到 1970 年，改进了的因子分解法只能对付有 20 位的任意数字。到 1980 年，位数的上限已上升到 50 位。到 1990 年达 116 位，1994 年达 129 位。1996 年，一个新的最佳算法诞生了，它成功地分解了一个有 130 位的数字，所需的时间只有先前方法的 $1/6$ 。

这一改进部分应归功于计算机功能的增强。然而，把计算机运行速度提高 100 万倍只能使因子分解的记录又增加几位数。因此，主要的改进在于概念上的进步。

本世纪初期，数学家 Allan J. C. Cunningham 和 Herbert J. Woodall 发起了所谓 Cunningham 工程，即分解形如 $r^k \pm 1$ 的数，其中 r 的取值范围为 2 到 12， k 则是一个大数。这些数字包括趣味数学中许多吸引人的数：Mersenne 数 $M_k = 2^k - 1$ ，费马数 $F_k = 2^{2^k} + 1$ ，以及所谓的“repunit”（重复单位）数 $R_k = 1111 \cdots 1 = (10^k - 1)/9$ 。对付这类问题的一种通用方法是 Pomerance 提出的“平方筛”。

这个方法之所以称为筛，是因为它把因子王国当作一片沙漠，从中一次一颗地筛掉不需要的数。筛法的鼻祖——称为 Eratosthenes 筛——可追溯到古希腊。在因子王国中漫游时，用筛筛掉 2（这是第一个素数）的所有倍数。这时剩下来的第一个数是 3，它是 2 之后的下一个素数。然后经过因子王国剩下的地盘，用筛筛掉 3 的所有倍数。然后用筛筛掉 5 的所有倍数，如此类推。在这无穷无尽的沙漠被筛过了无穷多次之后，筛里就只剩下素数王国了。

Pomerance 是从他在读高中时遇到的一个问题着手的。在 5 分钟内不用计算器把 8 051 这个数分解因子。他断定这道题非得有捷



径才能解决,但等他发现了这条捷径时已经太晚了。把 8 051 写成两个平方之差的形式: $8\,051 = 8\,100 - 49 = 90^2 - 7^2$ 。然后,根据代数恒等式 $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$,又可以把上式写成: $(90-7)(90+7) = 83 \times 97$ 。这一巧妙办法实际可追溯到 17 世纪法国数学家彼埃尔·德·费马。

在 20 世纪 20 年代, Maurice Kraitchik——《趣味数学》一书的作者——改进了费马的方法。他注意到,在很多情况下,只要把 n 的某一倍数表示成两数平方差的形式就行了,不需要把 n 表示成平方差的形式。具体地说就是,假定我们可以写出:

$$kn = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

这个问题有一类解是 $a+b$ 和 $a-b$ 均为 n 的倍数,这类解没有什么意思,而 $a+b$ 和 $a-b$ 不是 n 的倍数这类解才是引人注意的。对于一个有意思的解来说, n 和 $a-b$ 的最大公因数(hcf)——记为 $\text{hcf}(n; a-b)$ ——必定是 n 的一个非平凡因子,也就是说不等于 n 和 1 的因子(也可以用 $\text{hcf}(n; a+b)$ 来进行计算,不过这可能是一个比较大的数,使问题更难解决)。如果你尝试用通常学校里所教的办法——“分解 n 和 $a-b$ 的因子,看它们有哪些共同的素因子”——来求 hcf,那么你不会有什么收获,因为它要求你必须分解 n 。但是可以用一种效率高得多的方法来计算 hcf,欧几里得在 2000 多年前就知道这种方法了。

假定我们想要分解 415 813 这个数。我们可能会注意到 $15 \times 415\,813 = 2\,498^2 - 53^2$, 因此一个因子是 $\text{hcf}(415\,813; 2\,498 - 53) = \text{hcf}(415\,813; 2\,445)$ 。现在我们按如下过程进行计算:

1. 用 2 445 除 415 813, 得到商和余数: $415\,813 = 170 \times 2\,445 + 163$ 。

2. 在上面这个等式中可以看出, 如果一个数能整除 415 813 和 2 445, 它也必定能整除 163。这样 $\text{hcf}(415\,813, 2\,445) = \text{hcf}(2\,445,$



163)。

3. 重复上述过程。这次是用 163 来除 2 445, 求得商和余数:
 $2\,445 = 15 \times 163 + 0$ 。

由于余数为 0, 因此 163 整除 2 445, 这样就得到 $\text{hcf}(2\,445; 163) = 163$ 。由此可知, 163 是原先的 415 813 的一个因子, 用 163 去除 415 813 就得到后者的另一个因子 2 551。

这种方法需要靠猜测去找到一个比较合适的乘数(本例中为 15)。Kraitchik 想出了一种不靠猜测的方法。从其平方刚好大于 $n = 415813$ 的最小整数 x 开始(即 $x = 645$)。随着 x 的增大, 依次列出各个 $Q(x) = x^2 - n$ 的值, 并观察它们是否比较容易分解因式。这样就得到:

x	$Q(x)$	因子
645	212	$2^2 \times 53$
646	1 503	$3^2 \times 167$
647	2 796	$2^2 \times 3 \times 233$
648	4 091	4 091
649	5 388	$2^2 \times 3 \times 449$

如此一直进行下去, 直到:

690	60 287	$19^2 \times 167$
-----	--------	-------------------

到这一步时, 我们可看出, 积 $Q(646)Q(690) = (3^2 \times 167) \times (19^2 \times 167) = 3^2 \times 19^2 \times 167^2$ 是一个完全平方数。Kraitchik 意识到, 这就使我们能够把 n 的某一倍数写成 $(646 \times 690^2) - (3 \times 19 \times 167)^2$, 由此就可以像先前那样得出一个因子。在这个例子中, 此方法得出 2551 这个因子。

下面我出一道题来考考读者们: 用上述方法分解 777 923, 603 181 和 21 720 551 这三个数。

Kraitchik 方法的实质是什么呢? 实质就在于找到有简单因子