线性和拟线性椭圆型方程

〔苏〕O. A. 拉迪任斯卡娅
H. H. 乌拉利采娃 著

严子谦 王光烈 戴淑环 张功安 译

科学出版社

1987

内 容 简 介

本书系统阐述了二阶线性和拟线性椭圆型方程和方程组的边值问题，详细讨论了 Schauder 型和 L_2 型估计，并在此基础上建立了基本边值问题的整体可解性和解的正则性理论，研究了有关的变分问题它包含了在这个领域内当时所得到的主要成果．就二阶拟线性椭圆型方程和有关的变分问题而言，书中较完满地解答了 Hilbert 第 19，20 问题．

本书叙述清晰而系统，可使只具有泛函和偏微分方程基础知识的读者很快接触椭圆边值问题的当代水平，窥见这一领域的全貌．

本书可作为大学高年级学生、研究生、教师的参考书，也可供有关专业研究者参考．

O. A. Ладыженская H. H. уральцева
Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа
Издательство «Наука», Москва, 1973

线性和拟线性椭圆型方程

〔苏〕 O. A. 拉迪任斯卡娅 H. H. 乌拉利采娃 著
严子谦 王光烈 戴淑环 张功安 译
责任编辑 苏芳霞

科学出版社出版
北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1987 年 7 月第 一 版 开本：787×1092 1/32
1987 年 7 月第一次印刷 印张：21 5/8
印数：0001—4,000 字数：483,000

统一书号：13031・3559
本社书号：5140・13—1

定价： 5.10 元

目　　录

第一章　绪　论

本书是讨论二阶椭圆方程和若干种类椭圆方程组的．对这些方程和方程组，研究了边值问题在各种函数空间内的可解性，并对其任意解的微分性质进行了定性和定量研究．我们从描述一些能对这些问题可能得到的理论相当准确地提供轮廓的例子(§2)，并列举本书的基本结果和预期的发展(§3)，来开始我们的论述．

首先，我们引入本书从头到尾都要使用的一系列概念、记号和术语．

§1　基本记号和术语

1. 缩写记号　E_n——n 维 Euclid 空间；$x=(x_1,\cdots,x_n)$——其中的任意点；处处 $n\geqslant 2$．

Ω——E_n 中有界区域，即包含在某一半径充分大的球内的任意连通开集．

S——Ω 的边界．有时我们记之为 $\partial\Omega$．

$\bar{\Omega}$——Ω 的闭包，因此 $\bar{\Omega}=\Omega\cup S$．

Ω'——Ω 的任意严格内子域，因此 Ω' 到 $\partial\Omega$ 的距离是正的．

$$K_\rho(x_0)=K_\rho=\{x\in E_n:|x-x_0|<\rho\}$$

$$\Omega_\rho=K_\rho\cap\Omega,\qquad S_\rho=K_\rho\cap S$$

$\varkappa_n$——$\mathrm{mes}K_1$，ω_n——球体 K_1 的表面积．

若 $u(x)$ 是 Ω 内的可测函数，K_ρ 是某一个球体，则

$$u^{(k)}(x) = \max\{u(x) - k; 0\}$$
$$A_k = \{x \in \Omega : u(x) > k\}$$
$$A_{k,\rho} = \{x \in \Omega_\rho;\ u(x) > k\}$$

对任何 $m \geqslant 1$，我们令 $m' = \dfrac{m}{m-1}$，$\bar{m} = \dfrac{mn}{n-m}$.

ν，μ，ε，δ，δ_k，θ，γ——正常数.

$\nu(t)$——当 $t \geqslant 0$ 时有定义的、正的不增连续函数.

$\mu(t)$——当 $t \geqslant 0$ 时有定义的、正的不减连续函数.

δ_i^j——Kroneker 符号，即 $\delta_i^i = 1$，$\delta_i^j = 0$ 当 $i \neq j$ 时.

$\forall$——任何.

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}},\ x^2 = |x|^2,\ p = (p_1, \cdots, p_n)$$

$$|p| = \left(\sum_{i=1}^n p_i^2\right)^{\frac{1}{2}},\ p^2 = |p|^2,\ u_{x_i}^2 = (u_{x_i})^2$$

$$\nabla u \equiv u_x = (u_{x_1}, \cdots, u_{x_n})$$

$$|\nabla u| = |u_x| = \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$u_x^2 = |u_x|^2,\ |u_{xx}| = \left(\sum_{i,j=1}^n u_{x_i x_j}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$u_{xx}^2 = |u_{xx}|^2$, $a(x, u, p) = a(x_1, \cdots, x_n, u, p_1 \cdots, p_n)$

$a(x, u, u_x) = a(x_1, \cdots, x_n, u, u_{x_1}, \cdots, u_{x_n})$

若 $u(x)$ 在 $\bar{\Omega}$ 内连续，则我们把记号 $\max\limits_{\Omega} u(x)$ 和 $\min\limits_{\Omega} u(x)$ 分别理解为 $\sup\limits_{\Omega} u(x)$ 和 $\inf\limits_{\Omega} u(x)$；若 $u(x)$ 只是 Ω 上的可测函数，则理解为 $\operatorname{vrai}\sup\limits_{\Omega} u(x)$ 和 $\operatorname{vrai}\inf\limits_{\Omega} u(x)$. 有时，想要强调不事先假定 $u(x)$ 的连续性，我们便写 $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega} u(x)$ 和 $\operatorname{vrai}\min\limits_{\Omega} u(x)$ 以分别代替 $\max\limits_{\Omega} u(x)$ 和 $\min\limits_{\Omega} u(x)$；$\operatorname{osc}\{u(x);\Omega\}$

是 $u(x)$ 在 Ω 上的振幅，即 $\max\limits_{\Omega} u(x) - \min\limits_{\Omega} u(x)$.

记号 $D^k u(x)$ 表示 $u(x)$ 之形如

$$\frac{\partial^{|k|} u}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}}$$

的导数，其中 $k = (k_1, \cdots, k_n)$ 是多重指标，$k_i \geqslant 0$，$|k| = k_1 + \cdots + k_n$ 是导数的阶.

在方程中将会遇到表达式

$$\frac{d}{dx_i}[a(x, u(x), u_x(x))]$$

其含意是，在计算导数 $\frac{d}{dx_i}$ 时，不仅应当考虑包含在第一组变量 x 中的 x_i，而且应当考虑包含在其余两组，即 $u(x)$ 和 $u_x(x)$ 中的 x_i，因此

$$\frac{d}{dx_i}[a(x, u(x), u_x(x)]$$
$$= \frac{\partial a}{\partial x_i} + \frac{\partial a}{\partial u} u_{x_i} + \frac{\partial a}{\partial u_{x_k}} u_{x_k x_i}$$

此处以及以后各处，一对相同的指标表示从 1 到 n 求和，特别，

$$\frac{\partial a}{\partial u_{x_k}} u_{x_k x_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial u_{x_k}} u_{x_k x_i}$$

有时，如果不会引起混乱，全微分记号 $\frac{d}{dx_i}$ 将代之以更为通行的记号 $\frac{\partial}{\partial x_i}$. 例如，在线性方程中，我们常把 $\frac{d}{dx_i}(a_{ij}(x) u_{x_j}\cdot(x))$ 这样的项写成 $\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x) u_{x_j}(x))$ 的形状，虽然这里在微分时应当考虑两组变量：$a_{ij}(x)$ 和 $u_{x_j}(x)$ 中的 x_i.

在正文中，将会遇到决定于假设条件中已知量的各种常数，我们将用带各种下标的草书字母 c 来表示. 在不致引起

混乱的地方，在常数的值无关紧要的地方，c 的下标将被省略，因此甚至在同一证明中，带同样下标或者干脆不带下标的字母 c，可能表示不同的常数．在另外的场合，在想要强调常数对某个量的依赖关系时，则明显地指出这种依赖关系．

Ω 的截边函数 $\zeta(x)$——这是支集含于 Ω 内且取值在 0 与 1 之间的函数．它的支集是 $\zeta(x)$ 不等于零的点集的闭包．截边函数被认为是连续的，有有界的一阶导数．在它具有别的微分性质的地方，将特别予以说明．

Ω 内的有限函数——在 Ω 内有紧支集的函数．

含各种参数的函数类 $\mathfrak{A}_m(\Omega, \cdots)$，$\mathfrak{B}_m(\Omega, \cdots)$，$\mathfrak{B}_m^{N_1}(\Omega, \cdots)$ 等等，将在第二章 § 5—§ 9 中定义和研究．

若 L 是 Hilbert 空间内的算子，则用 $\bar{L}$ 表示它的闭包．L 的定义域用 $D(L)$ 表示，而值域用 $R(L)$ 表示．

$\mathbf{n}=\mathbf{n}(x)$——$\partial\Omega$ 上点 x 处指向 Ω 外的单位法向量；$\dfrac{\partial}{\partial\mathbf{n}}$ 表示沿 $\mathbf{n}$ 进行微分．

2. 基本函数空间的定义 $L_m(\Omega)$——由所有在 Ω 上可测，关于 Ω 为 $m\geqslant 1$ 次可积的函数组成的 Banach 空间．其中的模由等式 $\|u\|_{m,\Omega}=\left(\int_\Omega |u|^m dx\right)^{1/m}$ 来定义．

本书到处都采用 Lebesgue 意义的可测性和可积性．$L_m(\Omega)$ 的元素是在 Ω 上彼此等价的函数类．

我们把 $\|u\|_{\infty,\Omega}$ 理解为 $\operatorname{vrai}\sup\limits_{\Omega}|u(x)|$，而把 $\|\mathbf{u}\|_{m,\Omega}$ 理解为 $\||\mathbf{u}|\|_{m,\Omega}$，这里 $\mathbf{u}=(u_1,\cdots,u_N)$，而 $|\mathbf{u}|=\left(\sum\limits_{i=1}^N u_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$．

广义导数可以理解为目前大多数关于微分方程的工作中所使用者．其各种不同然而等价的定义和基本性质，读者可在例如 [31_8] 和 [32] 中找到．

$W_m^l(\Omega)$——由 $L_m(\Omega)$ 中所有直到 l 阶广义导数都在 Ω 上 m 次可积的元素组成的 Banach 空间. $W_m^l(\Omega)$ 中的模由等式

$$\|u\|_{m,\Omega}^{(l)} = \left(\int_\Omega \sum_{|k|=0}^{l} |D^k u|^m dx\right)^{\frac{1}{m}} \tag{1.1}$$

来定义，其中的求和是按照当 $|k|$ 从 0 变到 l 时多重指标 k 所有可能的取值进行的. 对于边界“不是很坏”的区域, $W_m^l(\Omega)$ 与所有在 $\bar{\Omega}$ 上无穷次可微的函数集合按模 (1.1) 所取的闭包一致. 例如,对边界属于 C^1 类的区域,对凸域,甚至对严格的 Lipschitz 域 (其定义将在后面给出), 这都是对的 (参看 [39_6] 第四章 § 4). 有时,特别在区域 Ω 需要往后才能明确的时候,便写成 W_m^l 以代替 $W_m^l(\Omega)$.

$\dot{W}_m^l(\Omega)$——$W_m^l(\Omega)$ 中支集含于 Ω 内的元素集合.

$\dot{W}_m^l(E_n)$——$W_m^l(E_n)$ 中具紧支集的元素集合.

$\mathring{W}_m^l(\Omega)$——$W_m^l(\Omega)$ 空间的子空间，所有支集含于 Ω 内的无穷次可微函数的总体是其中的稠密集. 众所周知, $\dot{W}_m^l(\Omega) \subset \mathring{W}_m^l(\Omega)$.

$W_{2,0}^2(\Omega)$——$W_2^2(\Omega)$ 的子空间，所有在 $\bar{\Omega}$ 上两次连续可微,在 $\partial\Omega$ 上等于零的函数是其中的稠密集.

$$W_{m,q}^1(\Omega) = W_m^1(\Omega) \cap L_q(\Omega)$$

$\overset{*}{W}{}_m^1(\Omega) = W_m^1(\Omega) \cap L_{\tilde{m}}(\Omega)$, 其中当 $m < n$ 时 $\tilde{m} = mn/(n-m)$, 当 $m > n$ 时 $\tilde{m} = \infty$, 当 $m = n$ 时 $\tilde{m}$ 取任意有限值. 在第二章 § 2 中, 将会证明, 对任意区域 Ω, $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega) \supset \mathring{W}_2^1(\Omega)$, 对不是太坏的区域 Ω, $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$ 与 $W_2^1(\Omega)$ 一致. 后者对于作为有限个严格 Lipschitz 域之并集的区域 Ω, 显然是对的(参看第 8 页).

我们将说, 函数 $u(x)$ 在区域 $\bar{\Omega}$ 内满足指数为 $\alpha(\alpha \in (0,$

1)), Hölder 常数为 $\langle u\rangle_\Omega^{(\alpha)}$ 的 Hölder 条件 (Hölder 连续), 如果

$$\langle u\rangle_\Omega^{(\alpha)} \equiv \sup \rho^{-\alpha} \operatorname{osc}\{u; \Omega_\rho^i\} < \infty \qquad (1.2)$$

这里, sup 是按一切 $\rho \leqslant \rho_0$ 的 Ω_ρ 之所有连通部分 Ω_ρ^i 来取的.

如果区域"不是很坏",例如严格 Lipschitz 域,那么 $\langle u\rangle_\Omega^{(\alpha)}$ 可以另外定义为

$$\langle u\rangle_\Omega^{(\alpha)} = \sup_{\substack{x, x' \in \Omega \\ |x-x'| \leqslant \rho_0}} \frac{|u(x) - u(x')|}{|x - x'|^\alpha} \qquad (1.2')$$

对于具有两片边界的区域, 例如对区域 $\{x \in E_2: |x_1| < 1, |x_2| < 1$, 当 $|x_1| \leqslant 1/2$ 时 $x_2 \neq 0\}$, 定义 (1.2) 和 (1.2′) 是不等价的. 这时我们采用其中的第一个.

$C^\alpha(\bar{\Omega})$——Banach 空间,其中元素是所有在 Ω 内连续,且量 $\langle u\rangle_\Omega^{(\alpha)}$ 有限的函数 $u(x)$. $C^\alpha(\bar{\Omega})$ 内的模由等式

$$|u|_\Omega^{(\alpha)} = \sup_\Omega |u(x)| + \langle u\rangle_\Omega^{(\alpha)} \qquad (1.3)$$

来定义. $C^\alpha(\bar{\Omega})$ 的元素, 可以认为已经通过 Ω 中的等价类, 从内部按连续性补充定义到 $\partial\Omega$ 上. 因此, $u(x)$在 $\partial\Omega$ 上可能是多值的.

若对任何 $\bar{\Omega}' \subset \Omega$, 函数 $u(x)$ 属于 $C^\alpha(\bar{\Omega}')$, 则说它属于 $C^\alpha(\Omega)$.

满足 $\alpha = 1$ 的条件 (1.2) 的函数 $u(x)$ 称为 Lipschitz 函数. 它们构成 Banach 空间 $\mathrm{Lip}(\bar{\Omega})$, 其中的模定义如下:

$$|u|_{\mathrm{Lip}\,\Omega} = \sup_\Omega |u(x)| + \langle u\rangle_\Omega^{(1)} \qquad (1.4)$$

$\mathrm{Lip}(\Omega)$ 是在 Ω 内连续,且对任何 $\bar{\Omega}' \subset \Omega$ 都属于 $\mathrm{Lip}(\bar{\Omega}')$ 的函数全体.

$O^l(\bar{\Omega})$, $l = 1, 2, \cdots$——本身在 Ω 内连续, $l-1$ 阶导数属于 $\mathrm{Lip}(\bar{\Omega})$, 且在 Ω 内每一点处有一阶微分的函数全体.

$C^{l+\alpha}(\bar{\Omega})$——Banach 空间，其中元素是在 Ω 内连续，且有直到 l 阶连续导数，数量

$$|u|_{\Omega}^{(l+\alpha)}=\sum_{|k|=0}^{l}\sup_{\Omega}|D^k u(x)|+\sum_{|k|=l}\langle D^k u(x)\rangle_{\Omega}^{(\alpha)} \quad (1.5)$$

有限的函数。

等式 (1.5) 规定 $C^{l+\alpha}(\bar{\Omega})$ 中的模。 $C^{l+\alpha}(\bar{\Omega})$ 的元素，可以认为是在 $\bar{\Omega}$ 上连续而且 l 次连续可微的函数。为此必须按连续性补充定义 $u(x)$ 及其导数在 $\partial\Omega$ 上的值。

$C^{l+\alpha}(\Omega)$——对任何 $\bar{\Omega}'\subset\Omega$ 都属于 $C^{l+\alpha}(\bar{\Omega}')$ 的函数集合。

Banach 空间 $C^l(\bar{\Omega})$ 和线性集合 $C^l(\Omega)$ 可以类似地定义。$C^l(\bar{\Omega})$ 内的模由等式

$$|u|_{\Omega}^{(l)}=\sum_{|k|=0}^{l}\sup_{\Omega}|D^k u(x)| \quad (1.6)$$

所定义。简单地说，$C^l(\bar{\Omega})$ 由所有在 $\bar{\Omega}$ 内 l 次连续可微的函数组成。

$\dot{C}^l(\Omega)$——$C^l(\bar{\Omega})$ 中支集含于 Ω 内的函数集合。

我们简单地用 $C(\bar{\Omega})$ 和 $C(\Omega)$ 分别表示 $C^0(\bar{\Omega})$ 和 $C^0(\Omega)$。

设 S_1 是区域 Ω 的边界 S 之一部分。我们用 $C^{l+\alpha}(\Omega\cup S_1)$ 来表示属于 $C^{l+\alpha}(\bar{\Omega}_1)$ 的函数集合，这里 Ω_1 是 Ω 的任何一个同 $S\backslash S_1$ 有正距离的子域。

3. 关于区域，区域的边界以及函数在边界上的迹 我们说区域 Ω 的边界 S（或其一部分 S_1）满足条件 (A)，如果存在这样两个正数 a_0 和 θ_0：对于中心在 S 上（相应地在 S_1 上）半径 $\rho\leqslant a_0$ 的任何球 K_ρ，以及 K_ρ 与 Ω 之交 Ω_ρ 的任何连通部分 Ω_ρ^i，都有不等式

$$\operatorname{mes}\ \Omega_\rho^i\leqslant(1-\theta_0)\operatorname{mes}\ K_\rho$$

我们用$C_{R,L}$表示柱体$\left\{x: \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 < R^2, -2LR < x_n < 2LR\right\}$，而称点$x = 0$为其中心．区域$\Omega$被称为严格 Lipschitz 域，如果对$\forall x^0 \in \partial\Omega$，都可引进坐标$y_k = c_{kl}(x_l - x_l^0)$，$(c_{kl})$为正交矩阵，使得$\partial\Omega$与$y$坐标中的柱体$\bar{C}_{R,L}$之交由方程$y_n = \omega(y_n')$，$y_n' \equiv (y_1, \cdots, y_{n-1})$给出，其中$\omega(y_n')$当$|y_n'| \leqslant R$时是 Lipschitz 函数，Lipschitz 常数不超过L，而

$$\bar{\Omega} \cap \bar{C}_{R,L} = \{y: |y_n'| \leqslant R, \omega(y_n') \leqslant y_n \leqslant 2LR\}$$

对于给定的区域Ω，数R和L是固定的．任意的凸域都是严格 Lipschitz 域．

设$x^0 = (x_1^0, \cdots, x_n^0)$是$\partial\Omega$上一点，在该处$\partial\Omega$有切平面．称$(y_1, \cdots, y_n)$为以点$x^0$为原点的局部坐标系，如果$y$和$x$由等式$y_i = a_{ik}(x_k - x_k^0)$，$i = 1, \cdots, n$所联系，其中$(a_{ik})$是正交矩阵，而轴$y_n$沿着点$x^0$处$\partial\Omega$的法线方向，指向$\Omega$外．

区域Ω被称为$C^{l+\alpha}$类域，$l \geqslant 1$（C^l类域，或O^l类域，$l \geqslant 1$），如果它是严格 Lipschitz 域，且定义中的y是局部坐标，而确定曲面$\partial\Omega$方程的函数$y_n = \omega(y_n')$属于$C^{l+\alpha}\{|y_n'| \leqslant R\}$（相应地$C^l$或$O^l$）空间．

我们也使用这样的术语：Ω是$W_q^l \cap \mathrm{Lip}$类区域．这可以作如下的理解：靠近边界的地带可用有限个区域$\Omega_i (i = 1, \cdots, N)$加以覆盖，$\Omega_i$的$\varepsilon$—邻域（对某个$\varepsilon > 0$）同$\Omega$之交$\Omega_{i,\varepsilon}$与半球$\hat{K}_\rho = \{y: |y| < 1, y_n > 0\}$同胚，而且实现这个同胚的函数$x^i = x^i(y)$属于$W_q^l(\hat{K}_\rho) \cap \mathrm{Lip}(\bar{\hat{K}}_\rho)$，Jacobi 行列式$\left|\dfrac{\partial x}{\partial y}\right|$和$\left|\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|$以某一常数为界，而$\hat{K}_\rho$之平的边界对应于$\Omega_{i,\varepsilon} \cap \partial\Omega$．当$(l-1)q > n$时，$\mathrm{Lip}(\bar{\hat{K}}_\rho) \subset W_q^l(\hat{K}_\rho)$（参看第二章 §2），所以在这种情况下可以谈论$W_q^l$类区域，

并写成 $\Omega\subset^{*)}W_q^l$.

我们经常会说：引入新的坐标，将边界 S 之落在点 x^0 的邻域内的一小块展平。这意味着，在点 x^0 的邻域内，引入新的正则坐标(一般说来,不是 Descartes 坐标) $z_i=z_i(x)$, $i=1,\cdots,n$, 使得边界 S 上的一小块在这一坐标下的方程为 $z_n=0$, 而区域 Ω 与之毗连的部分位于半空间 $z_n\geqslant 0$ 内. 新坐标 $z_1,\cdots,z_n$ 的正则性表现为新旧坐标之间存在着双方单值连续的对应关系. 在所考虑的 x 的变域内，函数 $z_i(x)$ $(i=1,\cdots,n)$ 是可微的,且 Jacobi 行列式不等于零. 此外，函数 $z_i(x)(i=1,\cdots,n)$ 具有特别指出的光滑性 (从而其反函数 $x_i(z)$ 也是如此). 对于我们刚才定义的曲面,可以在点 $x^0\in S$ 的邻域内如下引进具有这种性质的坐标：先把 x 变为 Descartes 坐标 y, 再把 y 变为新变量 z,变换公式是

$$z_i=y_i,\ i=1,\ \cdots,\ n-1$$

$$z_n=-y_n+\omega(y_1,\cdots,y_{n-1}),\ |y_n'|\leqslant R$$

若区域 Ω 的部分边界 S_1 具有严格 Lipschitz 域或者 $C^{l+\alpha}$, C^l, $O^l(l\geqslant 1)$ 类域的定义中所描述的性质，则分别称 S_1 为严格 Lipschitz 曲面或者 $C^{l+\alpha}$, C^l, O^l 类曲面.

设 S_1 是 $C^{l_1+\alpha_1}$ 类曲面，$l_1\geqslant 1$, 设在 S_1 上给定了函数 $\varphi(s)$. 我们将说 $\varphi(s)$ 是 $C^{l+\alpha}(S_1)$ 类函数，$l+\alpha\leqslant l_1+\alpha_1$, 如果它作为我们对 $\forall\, x^0\in S_1$ 所引坐标 $y_n'=(y_1,\cdots,y_{n-1})$ 的函数是 $C^{l+\alpha}(\bar{D})$ 的元素,其中 $\bar{D}$ 是对应于点 x^0 的柱体 $C_{R,L}$ 之底 $\{|y_n'|\leqslant R\}$. 我们把对于一切点 $x^0\in S_1$ 计算出来的模 $|\varphi(y_n')|_D^{(l+\alpha)}$ 中之最大者取作模 $|\varphi|_{S_1}^{(l+\alpha)}$. 类似地可以定义 $\mathrm{Lip}(S_1)$, $C^l(S_1)$, $O^l(S_1)$ 类函数.

若 $\varphi(x)$给定在 $\bar{\Omega}$ 上,$\varphi(x)\in C^{l+\alpha}(\bar{\Omega})$ $(C^l(\bar{\Omega})$, 或$O^l(\bar{\Omega})$,

---

*) 应为“$\in$”.——译者注

或 $\mathrm{Lip}(\bar{\Omega})$)，则在 $C^{l_1+\alpha_1}$ (C^{l_1}, O^{l_1} 或严格 Lipschitz) 类区域 Ω 的边界 S 上，$\varphi(x)$ 确定一 $C^{l+\alpha}(S)$ (相应地 $C^l(S)$, $O^l(S)$ 或 $\mathrm{Lip}(S)$) 类函数 $\varphi(s)=\varphi(x)|_{x=s\in S}$，其中 $l_1 \geqslant \max\{1;l\}$, $l_1+\alpha_1 \geqslant l+\alpha$. 反之亦然：若 $\varphi(s)\in C^{l+\alpha}(S)$, $S\in C^{l+\alpha}$, $l\geqslant 1$, 则 $\varphi(s)$ 可以延拓到整个区域 Ω，使延拓后的函数 $\varphi(x)$ 属于 $C^{l+\alpha}(\bar{\Omega})$. 而且，对于 $C^{l+\alpha}(S)$ 中的所有函数 $\varphi(s)$，可借助于同一构造法来作这种延拓，使得 $|\varphi(s)|_S^{(l+\alpha)}$ 和 $|\varphi(x)|_\Omega^{(l+\alpha)}$ 这两种模等价. 在通过函数 $\varphi(x)$ 陈述边界条件的时候，我们所指的正是 $\varphi(s)$ 在 Ω 上的这种延拓. 类似的事实对于 C^l, O^l ($l\geqslant 1$) 和 Lip 类 (后者是在严格 Lipschitz 域内) 也是对的.

若区域 Ω 的边界是任意的，则如下理解 $|\varphi|_S^{(\alpha)}$:

$$|\varphi|_S^{(\alpha)} = \operatorname*{vrai\,max}_{s\in S}|\varphi(s)| + \sup(\rho^{-\alpha}\operatorname{osc}\{\varphi(s);\, S_\rho^i\}) \tag{1.7}$$

这里，sup 是按中心在 S 上，$\rho\leqslant\rho_0$ 的球 K_ρ 与 Ω 之交 $\Omega_\rho = K_\rho\cap\Omega$ 的所有连通部分来取的；S_ρ^i 是 $S\cap\partial\Omega_\rho^i$.

在任意区域 Ω 的情形下，对 $W_m^1(\Omega)$ 中的函数 $u(x)$, $m\geqslant 1$，我们来规定如何理解 $\operatorname*{vrai\,max}_{\partial\Omega} u(x)$ 和 $\operatorname*{vrai\,min}_{\partial\Omega} u(x)$. 若能找到函数 $\varphi(x)\in W_m^1(\Omega)\cap L_\infty(\Omega)$，使得 $u(x)-\varphi(x)\in \overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$，我们就说 $u(x)\in W_m^1(\Omega)$ 有有限的 $\operatorname*{vrai\,max}_{\partial\Omega} u$. 用 $\mathfrak{M}$ 表示这样的 φ 所组成的函数类. 按定义，此时

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname*{vrai\,max}_{\partial\Omega} u = \inf_{\varphi\in\mathfrak{M}}\,(\operatorname*{vrai\,max}_{\Omega}\varphi(x))\\
&\operatorname*{vrai\,min}_{\partial\Omega} u = -\operatorname*{vrai\,max}_{\partial\Omega}\,(-u)\\
&\operatorname{vraiosc}\{u;\,\partial\Omega\} = \operatorname*{vrai\,max}_{\partial\Omega} u - \operatorname*{vrai\,min}_{\partial\Omega} u
\end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

对严格的 Lipschitz 域，我们对 $W_m^1(\Omega)$ 中元素 u 引进的定义(1.8) 与这些函数在 $\partial\Omega$ 上的迹的通常定义一致(关于这方面的详情，可看第二章 § 2). 对于 Ω 的一部分边界 S_1，可以类

似地定义 $\operatorname*{vrai\,max}_{S_1} u$ 和 $\operatorname*{vrai\,min}_{S_1} u$. 也就是说, $u(x)\in W_m^1(\Omega)$ 有有限的 $\operatorname*{vrai\,max}_{S_1} u$, 如果可以找到函数 $\varphi(x)\in W_m^1(\Omega)\cap L_\infty(\Omega)$, 使得 $u(x)-\varphi(x)$ 按下述意义在 S_1 上等于零, 即 $u(x)-\varphi(x)$ 属于 $W_m^1(\Omega)$ 中在 S_1 附近等于零的元素集合在 $W_m^1(\Omega)$ 模下的闭包. 用 $\mathfrak{M}_1$ 表示这种 $\varphi(x)$ 的集合. 按定义, 此时

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname*{vrai\,max}_{S_1} u=\inf_{\varphi\in\mathfrak{M}_1}\left(\operatorname*{vrai\,max}_{\Omega}\varphi(x)\right)\\&\operatorname*{vrai\,min}_{S_1} u=-\operatorname*{vrai\,max}_{S_1}(-u)\\&\operatorname{vrai\,osc}\{u;S_1\}=\operatorname*{vrai\,max}_{S_1} u-\operatorname*{vrai\,min}_{S_1} u\end{aligned}\right\}\tag{1.9}$$

有时, vrai max, vrai min 和 vrai osc 将分别代之以 max, min 和 osc.

对于函数 $u(x)\in W_m^1(\Omega)$, 若由等式 (1.7) 所定义的量 $|u|_S^{(\alpha)}$ 有限, 则说 $u(x)\in C^\alpha(S)$. 特别地, 若对某个 $\varphi(x)\in W_m^1(\Omega)\cap C^\alpha(\bar{\Omega})$, 差 $u(x)-\varphi(x)$ 属于 $\mathring{W}_m^1(\Omega)$, 则 $u(x)\in C^\alpha(S)$, 且模 $|u|_S^{(\alpha)}$ 不超过 $|\varphi|_\Omega^{(\alpha)}$.

在本书中, 我们将会遇到某常数由某些量所确定这样的断语. 与此同时, 在绝大多数场合, 我们将不指出那些十分明显或者我们不感兴趣的依赖关系. 例如, 我们常常不明指出它们对维数 n 的依赖关系, 虽然这种依赖关系在许多地方都存在. 只有在必须考虑尺寸随意小的区域和区域测度的依赖关系至关重要的地方, 我们才指出对区域的依赖关系.

§2 关于线性和拟线性方程解的概念的容许扩充

本书研究的基本对象是二阶椭圆型线性和拟线性方程.