

解析幾何学教程

Н. М. 别斯金著

51.1

高等学校教学用书



解析几何学教程

H. M. 别斯金著
王自楷 高炳兰译



高等教育出版社



本書係根據蘇聯國立技術理論書局出版社 (Государственное издательство технико-теоретической литературы) 出版的別斯金 (П. М. Бескин) 著解析幾何教程 (Курс аналитической геометрии) 1948年版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定為高等工業學校的教本。

本書由蘭州大學王自楷、高錫蘭翻譯。在翻譯過程中曾由趙繼遊教授加以協助。

解 析 幾 何 學 教 程

H. M. 別斯金 著

王自楷，高錫蘭 譯

高等教育出版社 出版

北京琉璃廠一七二號

(北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號)

商務印書館上海廠印刷 新華書店總經售

書號 533:課 592 別本 820×1168 1/32 印張 16 插頁 4 字數 101,000

一九五六年四月上海第一版

一九五六年四月上海第一次印刷

印數 1—5,000 (精裝) 每本(8) 2.50

目 次

序	9
---------	---

上篇 平面解析幾何學

緒 言

§ 1. 射影理論	11
1. 有向線段 2. 向量 3. 軸之間的交角和向量之間的交角 4. 角的加法規則 5. 向量在軸上的射影 6. 有向線段在軸上的射影 7. 折線在軸上的射影	
§ 2. 二階行列式和三階行列式	21
8. 二元一次方程組 9. 二階行列式 10. 二階行列式的基本性質 11. 三元一次方程組 12. 計算三階行列式的薩路斯規則 13. 按某一排的元素展開三階行列式 14. 三階行列式的基本性質 15. 兩個三元一次的齊次方程的方程組	

第一章 坐標法的簡單應用

§ 1. 笛卡兒坐標系	37
16. 確定平面上點的位置 17. 向量在坐標軸上的射影	
§ 2. 利用坐標法解決簡單問題	43
18. 兩點間的距離 19. 向量對坐標軸的傾斜角 20. 線段的定比劃分 21. 三角形的面積	
§ 3. 坐標變換	52
22. 問題的提出 23. 坐標原點的平移 24. 坐標軸的旋轉 25. 坐標的一般變換	

第二章 函數

§ 1. 基本概念和記號	59
26. 函數的概念 27. 函數式的繪定 28. 函數的記號 29. 函數的列表法 30. 函數的存在域	
§ 2. 函數的圖示法	69

31. 函數的圖象 32. 函數的隱式表示 33. 單值函數與多值函數 34. 函數的參數式 35. 常量看作函數

第三章 曲線的方程

§ 1. 幾何軌跡及其方程	77
36. 中心在原點的圓的方程 37. 推出曲線方程的一般法則 38. 點在曲線上的條件 39. 兩條曲線的交點	
§ 2. 一些幾何軌跡的方程的推出	80
40. 橢圓 41. 橢圓方程的推出 42. 雙曲線 43. 雙曲線方程的推出 44. 拋物線 45. 拋物線方程的推出	
§ 3. 關於自由度的概念	91
46. 解數學問題所必須的條件數 47. 曲線方程作為加在坐標上的限制	

第四章 直線

§ 1. 直線方程的各種形式	98
48. 確定平面上的直線的參數 49. 帶角系數的直線方程 50. 關於直線的基本定理 51. 參數 k 及 b 對直線位置的影響 52. 直線的法線式方程 53. 直線方程化成法線式 54. 直線的線段式方程 55. 有缺項的直線方程	
§ 2. 直線的基本問題	116
56. 直線基本問題的提出 57. 關於曲線族的概念 58. 二直線的交點 59. 直線束 60. 通過兩定點的直線方程 61. 兩直線間的交角 62. 兩直線平行與垂直的條件 63. 從一點到一直線的距離	

第五章 極坐標, 曲線的分類

§ 1. 極坐標	133
64. 極坐標系 65. 笛卡兒坐標系和極坐標系的比較 66. 化極坐標為笛卡兒坐標, 化笛卡兒坐標為極坐標 67. 方程在極坐標下的幾何意義 68. 阿基米德螺線	
§ 2. 曲線的分類	143
69. 曲線方程的坐標變換 70. 方程的分類 71. 曲線的分類 72. 兩條曲線的交點數 73. 關於代數曲線的分解	

第六章 橢圓、雙曲線和拋物線

§ 1. 圓周	153
74. 二次方程表示圓周的條件 75. 根據三個條件求圓周	
§ 2. 橢圓	157

76. 曲線對稱的判別法	77. 根據標準方程研究橢圓的形狀	78. 橢圓的離心率	79. 橢圓作為圓周的均勻收縮	80. 橢圓看作直圓柱體的截線	81. 橢圓看作圓周的射影	82. 橢圓上的點的焦向徑	83. 橢圓的焦點參數	84. 關於頂點的橢圓方程	85. 橢圓的極坐標方程
§ 3. 雙曲線	172								
86. 根據標準方程研究雙曲線的形狀	87. 雙曲線的離心率	88. 雙曲線的漸近線	89. 共軛雙曲線	90. 等邊雙曲線	91. 雙曲線上的點的焦向徑	92. 雙曲線的焦點參數	93. 雙曲線關於頂點的方程	94. 雙曲線的極坐標方程	
§ 4. 拋物線	189								
95. 根據標準方程研究拋物線的形狀	96. 用橫坐標表示拋物線上任何點的焦向徑的公式	97. 拋物線的極坐標方程	98. 二次三項式的圖形	99. 參數對於二次三項式的圖象的影響					
§ 5. 橢圓、雙曲線和拋物線的直徑	198								
100. 橢圓的直徑	101. 橢圓的共軛直徑	102. 橢圓的共軛直徑的幾個性質	103. 雙曲線的直徑	104. 雙曲線的共軛直徑	105. 雙曲線的共軛直徑的幾個性質	106. 拋物線的直徑	107. 拋物線的直徑的幾個性質		
§ 6. 橢圓、雙曲線和拋物線的準線	208								
108. 到某一點與到某一直線的距離之比為常數的點的幾何軌跡	109. 橢圓的準線	110. 雙曲線的準線	111. 拋物線的準線						

第七章 二次曲線的一般理論

§ 1. 問題的提出與一般的理論	212								
112. 問題的提出	113. 關於中心的定理	114. 關於軸的定理	115. 二次曲線分解的條件	116. 坐標原點平移時二次方程的變換	117. 坐標軸旋轉時二次方程的變換				
§ 2. 有心曲線	221								
118. 原點平移到曲線的中心	119. 坐標軸旋轉到曲線的對稱軸上	120. 關於有心曲線方程的研究	121. 例題						
§ 3. 無心曲線	229								
122. 二次方程的高次項為一完全平方的條件	123. 坐標軸旋轉到無心曲線的對稱軸	124. 一般二次方程研究結果的綜合	125. 關於拋物型曲線的中心的問題	126. 確定二次曲線的條件數					

第八章 旋輪線和螺線

§ 1. 旋輪線	239								
----------	-----	--	--	--	--	--	--	--	--

127. 普通旋輪線	128. 短幅旋輪線和長幅旋輪線	129. 圓外旋輪線
130. 心臟形線	131. 巴斯加蚱線	132. 圓內旋輪線
134. 星形線		133. 卡尔当定理
§ 2. 螺線		258
135. 阿基米德螺線	136. 对数螺線	137. 双曲螺線
		138. 圓周的漸伸線

第九章 函數的圖象

§ 1. 几个簡單函數的圖象	261
139. 幂函數	140. 反函數的概念
	141. 三角函數和反三角函數
	142. x 的整數部分
§ 2. 圖象的仿射變換	273
143. 圖象的仿射變換的一般規則	144. 一般的正弦曲線
	145. 指數函數
	146. 对數函數

下篇 空間解析幾何學

緒 言

第十章 空間坐标

§ 1. 軸上的射影	281
147. 空間的軸之間的角和向量之間的角	148. 軸上的射影
§ 2. 空間的笛卡兒直角坐标系	284
149. 確定空間點的位置	150. 空間的笛卡兒直角坐标系
	151. 右旋坐标系和左旋坐标系

第十一章 向量代數基礎

§ 1. 基本概念	292
152. 向量計算的對象	153. 向量和數量
	154. 向量的等式
	155. 向量的模
§ 2. 向量的線性組合	296
156. 向量的加法	157. 加法的公式性質
	158. 向量加法的公式性質
159. 向量的減法	160. 向量乘以數量的乘法
	161. 乘法的公式性質
162. 向量乘以數量的乘法的公式化的性質	163. 向量的線性組合
§ 3. 向量在軸上的射影	309
164. 向量的線性組合在軸上的射影	165. 向量沿給定向量或沿給定軸的分解
	166. 向量的坐标
	167. 向量間的線性關係的坐标表達式

§ 4. 空間解析幾何學的最簡單問題	319
168. 向量坐標和點坐標之間的關係 169. 兩點間的距離 170. 線段的定比分割 171. 空間方向的給定 172. 由端點坐標給出的向量的方向	
§ 5. 數量乘法	330
173. 數量乘法的概念 174. 數量乘法的幾個特殊情況 175. 數量積的力學解釋 176. 數量乘法的公式性質 177. 數量積的坐標表達式 178. 用向量和基本向量表達向量的坐標 179. 應用數量積求角和長	
§ 6. 向量乘法	343
180. 面積向量 181. 向量乘法的概念 182. 向量積的幾個簡單性質 183. 向量積的幾個特殊情況 184. 向量乘法的公式化的性質 185. 向量積的坐標表達式	
§ 7. 三向量的積	357
186. 混合積的概念及其幾何意義 187. 混合積的幾個性質 188. 混合積的坐標表達式 189. 三階行列式性質的幾何解釋 190. 二重向量積	

第十二章 坐標變換

§ 1. 空間的笛卡兒直角坐標變換公式的推出	366
191. 坐標原點的平移 192. 坐標軸的旋轉 193. 坐標的一般變換	
§ 2. 在空間關於笛卡兒直角坐標變換的補充知識	370
194. 用以確定坐標軸旋轉的參數的個數 195. 九個余弦變換的性質 196. 尤拉角	

第十三章 方程在空間的幾何意義

§ 1. 一個三變量方程	377
197. 二變量函數的幾何表示 198. 二變量函數的存在域 199. 三變量方程的幾何意義 200. 不全含三坐標的方程	
§ 2. 兩個三變量方程	387
201. 兩個三變量方程的幾何意義 202. 曲線方程的推出 203. 三個三變量方程	
§ 3. 曲線的參數方程、向量方程	393
204. 空間曲線的參數方程 205. 螺旋線 206. 關於方程在空間的幾何意義的問題的一般觀點 207. 向量方程	

第十四章 平面和直線

§ 1. 平面的解析表示法	403
208. 確定平面的參數 209. 平面的法向式方程 210. 平面的線段式方程	

211. 根据参数建立平面方程及根据方程求参数	212. 有缺项的平面方程	
§ 2. 關於平面的基本問題		415
213. 二平面之間的角	214. 平面把的方程	215. 通过三定點的平面
216. 从一點到一个面的距离		
§ 3. 空間直線的解析表示法		422
217. 两个一次方程	218. 从已知方程組推出的結果	219. 直線在坐标面上的射影
220. 直線的向量方程, 直線的对称方程	221. 平行於坐标面的直線的对称方程	222. 直線方程化成对称式
§ 4. 關於直線和平面的基本問題		439
223. 兩直線之間的角和直線与平面之間的角	224. 直線和平面的交點	
225. 二直線相交的条件	226. 通过兩定點的直線	227. 确定平面和直線的条件數
第十五章 關於曲面的一些知識		
§ 1. 二次曲面		452
228. 截面法	229. 橢圓面	230. 單叶双曲面
231. 双叶双曲面	232. 橢圓抛物面	233. 双曲抛物面
234. 从鞍形面推出其为直紋面		
§ 2. 關於曲面的一些補充知識		479
235. 旋轉曲面	236. 單叶旋轉双曲面看作直線旋轉面成的曲面	237. 圓錐曲面
238. 關於研究一般二次方程的說明		
習題答案		490
習題提示		508

序

在高等工業學校里解析幾何學教程有其特殊的任務，不應該是大學教程的縮本。大學教程的特征是：它只限制在一次及二次形象。根據所採用的方法，大學的解析幾何學是與無限小量分析和微分幾何無關的代數幾何的一部份。

高等工業學校解析幾何學教程的編著者不應忽視下列兩種情況：

1. 高等工業學校中通常只研究兩種數學的知識——解析幾何學與數學分析。因此一般人認為工程師所必需的數學知識應當包含在這兩個教程之一。例如，超越曲線的研究就是這樣的。凡在研究時不利用分析的方法，但本身卻為分析的預備知識者，則把它包含在解析幾何學教程中較為恰當。

2. 工程師不僅要研究實際物体外形的曲線，而且要研究那些描繪物體運動過程的象徵曲線，就是圖象。所以在高等工業學校的解析幾何學教程中應當反映出兩個觀點——幾何的（普通的）和分析的（圖象的研究）。有了這兩個觀點就要求列出各種不同的被研究的曲線。因為在其幾何性質方面最有意義的曲線倒不一定是哪些最重要的函數圖解。在圖象的研究中，有這麼一部份曲線，將它們放在解析幾何學里比放在分析中更為恰當些[參考‘圖象的仿射變換’（第九章 §2）]。

應當指出，作者的特殊觀點反映在小號字中，而不涉及於某一一些新方法的列舉。本書作為高等工業學校的教本之用，所以大號字符符合於現行的教學大綱。同時，講授者感到對於高等工業學校的解析幾何學教程有改進的必要時，可將各部份的小號字加以利用。特別是我們建議不要省略自由度的概念，沒有這個概念，便不可能對解析幾何學進行

有意識的研究。

小号字中包含着比較精細的部份和例子。

为了避免因插入輔助性的知識而打斷解析几何學的敘述程序，先在‘緒言’中講解了這些輔助性的知識。为了教員自行支配在‘緒言’中所敘述的問題起見，解析几何學的學習可从第一章開始。

尼·別斯金

1947年4月15日莫斯科。

上篇 平面解析几何學

緒 言

§ 1. 射影理論

1. 有向線段 解析几何學與初等几何學的重要差別之一就是初等几何把線段看作本質的正量，而解析几何給線段加上正負号，也就是把線段看作相對的量。

在一條直線上有兩個相反的方向，我們用箭頭表出其中的一個（不論那一個），並且把它稱為正；把相反的方向稱為負。在圖 1 中從左到右是正方向，從右到左是負方向，有正方向和負方向區別的直線稱為軸。

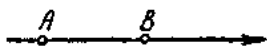


圖 1. 軸。

為了要確定軸上的一個線段，必須要給出兩個點並指明那一個作為線段的起點，那一個作為線段的終點。線段用兩個字母表示，而且把線段的起點記在第一位，終點記在第二位。位於軸上的有起點和終點的線段稱為有向線段。

有向線段以相對的數表示。這個數的絕對值是線段的長度；如果線段的方向（從起點到終點的方向當作線段的方向）和軸的方向^①一致，在這個長度的前面記以正号；如果線段的方向和軸的方向相反，就記以負号。例如，在圖 1 上

$$AB = 13 \text{ 毫米}^{\text{②}}, \quad BA = -13 \text{ 毫米}.$$

① 為了簡便起見，只說‘軸的方向’代替‘軸的正方向’。

② 正号通常省略。

顯然成立

$$BA = -AB, \quad (1)$$

即当表示線段的兩個字母調換時，線段的符号就改變，而其絕對值仍然不變。

關於有向線段有下列公式成立：

$$AB + BC = AC, \quad (2)$$

即所謂沙尔公式^①。这个公式對於初等几何學中所研究的不帶符号的線段，只有 B 點在 AC 之間時才是正确的，對於有向線段只要 A 、 B 和 C 三點在一个軸上，这个公式永远是正确的。例如，在圖 2 中間的圖，

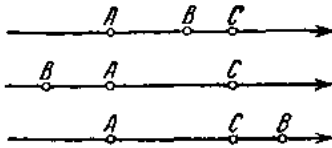


圖 2. $AB + BC = AC$ 。

線段 AB 是負的，線段 BC 是正的，而它們的和等於 AC 。

我們以後要应用沙尔公式，記住公式的圖樣，就不必每次去看圖。这个公式可以这样表述：任一有向線段 AB ，可

利用此線段上的任意一點 C ，把它划分成为兩個線段的和。

現在研究若干个有向線段的和

$$AB + BC + CD + \dots + KL + LM,$$

其中每一个線段的起點和前一个線段的終點重合。根据沙尔公式，首兩線段的和 $AB + BC$ 可用 AC 代替；然后 $AC + CD$ 的和可用 AD 代替，繼續下去，結果我們得到

$$AB + BC + CD + \dots + KL + LM = AM. \quad (3)$$

公式(3)称为沙尔的推廣公式，諸點 A 、 B 、 C 、 D 、 \dots 、 K 、 L 、 M 任意配置，只要它們在一个軸上，公式(3)總是正确的。

2. 向量 如果我們研究平面上(而不僅在一个軸上)的線段，那么这些線段有無窮多不同的方向(而不止兩個)，因而不可能用相对的數來表征它們。

① 米史里沙尔(1798—1880)——法國几何學家。

研究一些線段時，不僅注意其長度，同時又注意其方向，這種線段稱為向量。向量與有向線段之間的差別在於有向線段只能在軸上研究，所以用相對的數表示。向量可以有無窮多的方向而且不要求在其所在的直線上預先規定正方向。如果我們研究一維的（僅僅在一個軸上的）幾何學，有向線段和向量之間就沒有差別。

向量用兩個字母表示，其中第一個表示向量的起點，第二個表示終點；在這兩個字母上畫一橫線代替‘向量’二字。於是，記號 \overline{AB} 表示起點為 A 終點為 B 的向量。在圖上，向量用箭頭表示（圖 3）。因為向量的表征不僅用長度而且也用方向。所以描繪在圖 3 上的向量 AB 和 CD ，雖然有同樣的長度，絕不能認為是相等的^①。

向量的長度，或者向量的模表示如： $|\overline{AB}|$ ；向量的長度是正量。注意，向量不能用數表示，因為數不能表示向量的長度和它的方向^②。所以等式 $\overline{AB} = 5$ 厘米是無意義；但是等式 $|\overline{AB}| = 5$ 厘米是成立的。

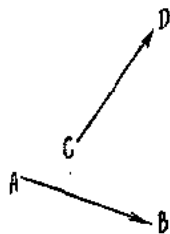


圖 3. 向量。

3. 軸之間的交角和向量之間的交角 兩條直線相交後形成四個角。確定兩條直線的交角時，我們取銳角或取鈍角都是可以的。兩個軸間的交角却是另外一回事。確定兩個軸的交角時，我們不僅要注意這兩個軸配置在那兩條直線上，而且還要注意到怎樣建立這兩個軸的正方向。

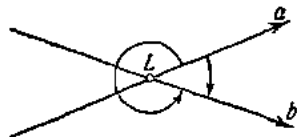


圖 4. 兩軸之間的交角。

設已知兩軸 a 和 b 相交於點 L （圖 4），第一個軸繞點 L 旋轉使它的正方向和第二軸的正方向重合所成的角度稱為軸 a 和 b 之間的交角。這個角記作： (a, b) 。從定義看出，兩個軸之間的交角

① 怎樣的向量算作相等，讀者在第 154 款中可以知道。

② 我們說的是實數。在平面上用複數可以表示向量的長度和它的方向，所以在平面上用複數表示向量是可以的。

依靠於把那一軸当作第一个,那一軸当作第二个。

使軸 a 的正方向旋轉到和軸 b 的正方向重合,其方法不只一种。实际上,如果軸 a 已經被轉到了这样的角度,那么以后它还可以按順時針或逆時針的方向再轉若干轉,並且使它的正方向依然和軸 b 的正方向重合。於是,符号 (a, b) 不是一个值而是無窮多个值。如果用 α_0 表示軸 a 和 b 的交角的一个值,角 (a, b) 的所有的值就包含在公式

$$(a, b) = \alpha_0 + 360^\circ \cdot n \quad (4)$$

中, n 是任意整數(正、負或零)。例如在圖 4 中可假定 $\alpha_0 = -40^\circ$ (反時針方向的角为正)。当 $n=1$ 時公式(4)得出 $(a, b) = 320^\circ$; 这两个角在圖上用弧表示。

虽然两个軸間的交角 (a, b) 可以寫出無窮多的值,这个角的所有的三角函數却是完全确定的量,因为 360° 为所有的三角函數的週期。例如,从公式(4)得到

$$\sin(a, b) = \sin(\alpha_0 + 360^\circ \cdot n) = \sin \alpha_0。$$

以上我們确定了兩軸間的交角。類似地可以确定向量和軸間的交角。只須取定軸的正方向和向量的方向,向量的方向是从其起點到終點,就是箭头所指的方向。如果有必要的話,可以把向量延長直到和軸相交。向量 \overrightarrow{AB} 和軸 l 的交角以 (\overrightarrow{AB}, l) 表示。

兩向量的交角用 $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ 表示,可以類似地确定。軸的交角具有下列的性質:

1° 如果兩軸中的一个平行移動,兩軸的交角並不改變,当然,两个軸也可以一同平行移動。

2° 如果改變兩軸之一的方向为相反的方向,那末兩軸的交角就增大 180° ①。

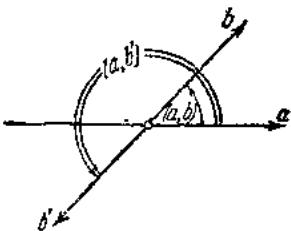


圖 5. $(a, b') = 180^\circ + (a, b)$ 。

① 为了肯定,常常認定角增大 180° 而不是減小 180° 。实际上,如果 α_0 表示兩軸交角的一个值,且以 $\alpha_1 = 360^\circ + \alpha_0$ 表示另一值,那末 $\alpha_0 + 180^\circ = \alpha_1 - 180^\circ$ 。

如果用 b' 表示與 b 位於同一直線上，但與 b 的方向相反的軸，那末

$$(a, b') = 180^\circ + (a, b). \quad (5)$$

圖 5 說明了這公式。

3° 調換軸的順序時，角僅改變符號：

$$(b, a) = -(a, b). \quad (6)$$

註 1. 研究軸與軸的交角時，必須永遠記住其交角有無窮多的值，彼此相差 360° 的整倍數。因此把任一公式當作單獨的一項 (a, b) ，如果我們試作檢驗，在軸 a 和 b 之間的角任意選取某一值以代替 (a, b) ，便可証得它不正確。如果公式左右兩端相差 360° 的整倍數，我們便可完全認為它是正確的。換句話說：如果當 (a, b) 代換以此角的一個確定數值時公式正確，我們就認為它是正確的。例如，令 $(a, b) = 200^\circ$ 。在這種情況下按公式 (5) 得到 $(a, b') = 380^\circ$ 。同樣可認為 $(a, b') = 380^\circ - 360^\circ = 20^\circ$ 。如果把 $(a, b) = 200^\circ$ ， $(a, b') = 20^\circ$ 代入公式 (5)，公式好像是不正確的，但左右兩端相差 360° 。如果再把 $(a, b) = 200^\circ$ ， $(a, b') = 380^\circ$ 代入公式 (5)，那末左右兩端恰好相等。讀者用圖說明此例。

註 2. 以上所述兩軸間的交角的三個性質完全可適用於向量與軸間的交角以及兩向量間的交角。

4. 角的加法規則 設已知三個軸 a, b 和 c 通過一個點，繞這一個點旋轉軸 a 使其正方向與軸 b 的正方向重合。然後繞同一個點（從新的位置開始）再旋轉一次使其正方向與軸 c 的正方向重合。這兩次旋轉的和等於 $(a, b) + (b, c)$ 。但因這兩次旋轉的結果，軸 a 的正方向和軸 c 的正方向重合，所以這個和等於 (a, c) ，即：

$$(a, b) + (b, c) = (a, c). \quad (7)$$

公式 (7) 稱為角的加法規則。

當這三個軸不通過同一點時，加法的規則仍是正確的，因為角的大小與這個情況無關[第 14 頁，性質 1°]。

我們可用以前沙尔的推廣公式的同一方法把公式(7)推廣到許多軸的情況，於是得到：

$$(a, b) + (b, c) + (c, d) + \cdots + (k, l) + (l, m) = (a, m). \quad (8)$$

公式(8)称为加法的一般規則。

角的加法規則和有向線段的沙尔公式是類似的。但有一个差別，就是公式(7)和(8)，不計及 $360^\circ \cdot n$ 之差，是正确的 [這須回憶第 15 頁註 1 中所說的意义]。

把这些軸換为向量時，公式(7)和(8)也可以適用。

5. 向量在軸上的射影 點 A 到軸 l 上的垂足称为點 A 在軸 l 上的射影(圖 6)。

設已知軸 l 和向量 \overline{AB} 。有向線段 $A'B'$ 称为向量 \overline{AB} 在軸 l 上的射影， A' 是向量的起點在軸 l 上的射影， B' 是向量的終點在同一軸上的射影。射影用下列記号：

$$A'B' = \text{射影 } \overline{AB}.$$

在此定义中我們着重指出兩個極重要的關鍵。第一，向量在軸上的射影不是向量，而是有向線段或數^①。第二，从向量起點的射影到向量終點的射影的線段称为向量的射影；如果从 A' 到 B' 的方向与軸的正方向一致，射影以正數表示，在相反的情況下射影是負的。

圖 6. 點在軸上的射影。

向量在軸上的射影依賴於(1)被投射的向量的長度，(2)这个向量与射影軸的交角。圖 7 上画出了向量關於軸的各種不同的配置情況。在四個圖上軸 l 和向量間的角用 $\alpha = (l, \overline{AB})$ 表示，由向量的起點引平行於軸的直線，这条直線与垂線 BB' 的交點用 C 表示。

於是(對於四種情況)：

$$AC = AB \cdot \cos \widehat{BAC}. \quad (*)$$

① 有時不在軸上研究而在直線上研究向量的射影，並且把這種射影当作向量。在本書中無論任何地方我們不研究向量在直線上的射影。