全国优秀畅销书

高考重难点手册

主编 汪江松

高考第一轮复习

2006 数学

高考第一轮复习 2006 高考复习

华中师范大学出版社

全国优秀畅销书

高考第一轮复习
2006
高考复习

高考
重难点手册

主　编　汪江松
编　者　曾娇华　王　瑛　刘元利　邱　倍
　　　　牛达昆　杨志明　谢建萍　余　武

高考第一轮复习
数学

华中师范大学出版社

新出图证(鄂)字 10 号

图书在版编目(CIP)数据

高考重难点手册——数学/汪江松 主编. —2 版.

—武汉：华中师范大学出版社，2005.5

ISBN 7-5622-2929-5/G·1483

Ⅰ. 高… Ⅱ. 汪… Ⅲ. 数学课-高中-升学参考资料 Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 025322 号

高考重难点手册——数学 （2006 年高考第一轮复习）

主编：汪江松

责任编辑：李晓 王胜　　责任校对：罗艺　　封面设计：新视点

选题设计：第一编辑室（027-67867361）

出版发行：华中师范大学出版社 ©.

社址：湖北省武汉市珞瑜路 100 号

电话：027-67863040（发行部） 027-67861321（邮购）

传真：027-67863291

网址：http://www.ccnup.com.cn　　电子信箱：hscbs@public.wh.hb.cn

经销：新华书店湖北发行所

印刷：孝感日报印刷厂

字数：635 千字

开本：889mm×1194mm 1/16　　印张：21.75

版次：2005 年 5 月第 2 版　　印次：2005 年 5 月第 1 次印刷

印数：1—20 100　　定价：26.80 元

欢迎上网查询、购书

前言

QIANYAN

新一轮的高考改革正在如火如荼地进行，教师在探索，学生在思考，怎样才能使我们拥有卓越的竞争力？为此，我们在华中师范大学有关专家、教授的指导下，组织以“高中各科重难点手册”的原班作者为主，吸纳中南地区高中教育一线的教师参与的名师阵容，隆重推出“高考各科重难点手册”。本套书在封面设计、开本形式、栏目体例、内容讲解、材料选用等方面都给读者以全新的感受，但不变的是“重难点手册”的精华和特色。

《高考重难点手册——数学》以高中教学大纲和高考考试大纲为依据，以考点为线索，分四个栏目进行编写。

考点解读•名题诠释 每个考点通过知识梳理以达到突出重点、突破难点的目的。考点后有对应的例题，例题后有“解析”和“点评”。“解析”包括解题思路、过程和答案，重点是方法的分析；“点评”主要总结某一类题的解题规律和技巧及应注意的问题，传授应考策略。

思维拓展•能力提升 着重研究近几年高考的命题方向和学科发展的前沿，结合素质教育和研究性学习的特点，突出所学知识在实际中的运用。选材具有实效性、典型性和创新性，以提高学生灵活运用知识、分析和解决问题的能力。

考题回放•仿真预测 “高考真题回放”收录了2002年—2005年全国及上海、北京、广东、天津、河南等地的高考题，体现优选、精练的特点；“应考仿真预测”选编了全国各地的最新高考模拟题、调考题以及报刊中的优秀试题，便于教师选用和学生训练。

参考答案与提示 准确的答案及详细的提示能满足不同层次、不同水平的学生需求。

浏览本书会令您耳目一新，品味全书您必将受益匪浅。相信您通过使用本书定能在有限的时间内获得最佳的复习效果。备战2006年高考的学子们，衷心希望本书能为你们跨入理想的大学校门助一臂之力！

本书由汪江松执笔并定稿，参加本书编写及科学调研的还有曾姣华、王瑛、邱僖、赵泓、刘元利、朱达坤、左俊凤、杨志明、齐凤玲、谢建萍、李改珍、柯红兵、徐更生、陈东明、江鸿、樊年春、胡四军、余武、黄伟、张红雷、闵敏、胡桂祥、吴建华、宋威、余卫华、熊智宏、李银根、高尚等一线骨干教师及教学研究人员，在此一并致谢！书中若有疏漏错误之处，恳请读者赐教。

汪江松

目录

目录

第一章 集合与简易逻辑

考点1 集合的概念与运算

考点解读·名题诠释

1. 集合的相关概念

(1) 子集：对任意的 $x\in A$，都有 $x\in B$，则 $A\subseteq B$.

(2) 真子集：若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，则 $A\subsetneq B$.

(3) 相等的集合：若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则 $A=B$.

(4) 交集：$A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$.

(5) 并集：$A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$.

(6) 补集：设 U 为全集，$A\subseteq U$，则 $\complement_U A=\{x|x\in U$ 但 $x\notin A\}$.

例1 设集合 $A=\{x|x\in\mathbf{Z}$，且 $-10\leqslant x\leqslant -1\}$，$B=\{x|x\in\mathbf{Z}$，且 $|x|\leqslant 5\}$，则 $A\cup B$ 中元素的个数是(　　).

(A) 11　　(B) 10　　(C) 16　　(D) 15

【解】 $A=\{-10,-9,-8,\cdots,-2,-1\}$，

$B=\{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$，

故 $A\cup B=\{-10,-9,-8,\cdots,-1,0,1,\cdots,5\}$，共16个元素，选(C).

点评 这里是用列举法写出集合 A、B 的元素后再确定 $A\cup B$ 的元素.

2. 集合的主要性质

$A\subseteq A$，$\varnothing\subseteq A$，$\varnothing\subsetneq A$ (若 $A\neq\varnothing$)，

$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cup\varnothing=A$，

$A\cap B\subseteq A$(或 B)，$A\cup B\supseteq A$(或 B)，

$A\cup(\complement_U A)=U$，$A\cap(\complement_U A)=\varnothing$，

$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\complement_U(A\cap B)$，

$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\complement_U(A\cup B)$，

若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$，

$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$，$A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$.

例2 (1) 已知 $M=\{x|x\leqslant -4$ 或 $x>1\}$，$M\cap N=\varnothing$，$M\cup N=\mathbf{R}$，求集合 N.

(2) 已知全集 $U=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$，$A=\{-3,a^2,a+1\}$，$B=\{a-3,2a-1,a^2+1\}$，其中 $a\in\mathbf{R}$，若 $A\cap B=\{-3\}$，求 $\complement_U(A\cup B)$.

【分析】 解决问题(1)的关键是求出全集，解决问题(2)的关键是求 $A\cup B$.

【解】 (1) 由 $M\cap N=\varnothing$ 及 $M\cup N=\mathbf{R}$，知全集为 $\mathbf{R}$，则 $\complement_{\mathbf{R}}M=N$，

故 $N=\complement_{\mathbf{R}}M=\{x|-4<x\leqslant 1\}$.

(2) ∵ $A\cap B=\{-3\}$，

由 $a-3=-3$ 或 $2a-1=-3$，可求得

$A=\{-3,0,1\}$，　$B=\{-4,-3,2\}$，

即　$A\cup B=\{-4,-3,0,1,2\}$.

故 $\complement_U(A\cup B)=\{-2,-1,3,4\}$.

点评 准确理解集合的概念，正确使用有关符号是解集合问题的基础.

例3 已知集合 $A=\{x|(x+2)(x^2-1)>0\}$，集合满足 $A\cap B=\{x|1<x\leqslant 5\}$ 且 $A\cup B=\{x|x>2\}$，求集合 B.

【分析】 先求出集合 A，再由 $A\cap B$ 与 $A\cup B$ 确定哪些元素属于 B，哪些元素不属于 B，从而得出集合 B.

【解】 $A=\{x|(x+2)(x+1)(x-1)>0\}$

$=\{x|-2<x<-1$ 或 $x>1\}$.

∵ $A\cap B=\{x|1<x\leqslant 5\}$. 由数轴可知：

$(1,5]\subseteq B$，而 $(-2,-1)\cup(5,+\infty)\not\subseteq B$.

又 $A\cup B=\{x|x>-2\}$. 由数轴可知：

$[-1,1]\subseteq B$，而 $(-\infty,-2)\not\subseteq B$.

综合上述，有 $B=\{x|-1\leqslant x\leqslant 5\}$.

点评 借助数轴是解决此类题的有效方法，其中特别应注意取"="与不取"=".

3. 有限集的子集、真子集的个数

若有限集 A 中有 n 个元素，则 A 的子集个数有 2^n 个，即 $C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$，非空子集有 2^n-1 个，真子集有 2^n-1 个.

例4 (2000年广东) 已知集合 $A=\{1,2,3,4\}$，那么 A 的真子集的个数是(　　).

(A) 15　　(B) 16　　(C) 3　　(D) 4

【解】 真子集应为 $2^4-1=15$(个)，选(A).

点评 求真子集时千万不要忘记空集 $\varnothing$ 是任何非空集合的真子集，同时 A 不是 A 的真子集.

4. 含参数问题的解法

例5 已知集合 $A=\{x|x^2-4x+3=0\}$，$B=\{x|x^2-ax+a-1=0\}$，$C=\{x|x^2-bx+1=0\}$. 若 $A\cup B=A$，$A\cap C=C$，求 a，b 的值或取值范围.

【分析】 这里关键是理解 $A\cup B=A$ 的含义是表示 $A=B$ 或 $B\subsetneq A$.

【解】 $A=\{1,3\}$，$B=\{x|(x-1)[x-(a-1)]=0\}$.

∵ $A\cup B=A$，∴ $B\subseteq A$.

∴ $a-1=1$ 或 $a-1=3$，　即 $a=2$ 或 $a=4$.

又∵ $A\cap C=C$， ∴ $C\subseteq A$.

若 $C=\varnothing$， 则 $\Delta=b^2-4<0$， ∴ $-2<b<2$.

若 $1\in C$， 则 $1^2-b+1=0$， 即 $b=2$.

此时 $C=\{1\}$，$A\cap C=C$.

若 $3\in C$， 则 $9-3b+1=0$， ∴ $b=\frac{10}{3}$.

此时方程 $x^2-\frac{10}{3}x+1=0$ 的解为 $x=\frac{1}{3}$ 或 $x=3$.

而 $C=\left\{\frac{1}{3},3\right\}\not\subseteq A$， ∴ $b\neq\frac{10}{3}$.

综上可知，$a=2$ 或 $a=4$，$-2<b\leqslant 2$.

点评 解决交集、并集中含参数的集合问题，多根据集合元素的互异性来处理. 有时需要分情况讨论，这可考查学生处理问题的严密性和概括性. 而在有关集合问题的讨论中，特别要注意$\varnothing$在解题中的作用，防止因漏掉空集而导致解题失误. 同时，要注意对所求的值进行检验.

思维拓展·能力提升

范例 设集合 $A=\{(x,y)\mid y^2=x+1\}$，$B=\{(x,y)\mid 4x^2+2x-2y+5=0\}$，$C=\{(x,y)\mid y=kx+b\}$. 问是否存在自然数 k、b，使 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$？证明你的结论.

【分析】 本题是集合、交集、并集及解析几何有关的综合题，由于直线方程 $y=kx+b$ 中含有两个参数，解方程较繁，可转化成解析几何中曲线之间的位置关系来处理.

【解】 在同一坐标系中画出抛物线 C_1：$y^2=x+1$ 与抛物线 C_2：$4x^2+2x-2y+5=0$，如图 1-1.

要使 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$ 成立，即直线 $y=kx+b$ 与 C_1、C_2 都不相交，则 b 只有满足 $1<b<\frac{5}{2}$.

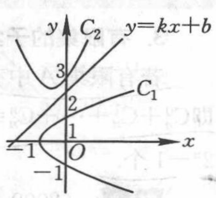


图 1-1

∵ $b\in\mathbf{N}$， ∴ $b=2$.

显然 $k>0$，又 $y=kx+b$ 在 x 轴上截距 $-\frac{2}{k}<-1$，

∴ $k<2$， 即 $0<k<2$.

又 $k\in\mathbf{N}$， ∴ $k=1$.

经检验，$y=x+2$ 与 C_1、C_2 无交点.

∴ 存在自然数 $k=1$，$b=2$ 使 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$.

点评 本题采用了数形结合的解法，就是把问题的数量关系与空间形式通过对应、转化来进行研究，这样可使复杂问题简单化，抽象问题具体化，这种方法是优化解题过程的一种重要方法.

考题回放·仿真预测

Ⅰ. 高考真题回放

1. (2004 年浙江) 若 $U=\{1,2,3,4\}$，$M=\{1,2\}$，$N=\{2,3\}$，则 $\complement_U(M\cup N)=$(　　).

(A) $\{1,2,3\}$　　(B) $\{2\}$　　(C) $\{1,3,4\}$　　(D) $\{4\}$

2. (2004 年全国卷Ⅲ) 设集合 $M=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1, x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}$，$N=\{(x,y)\mid x^2-y=0, x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}$，则集合 $M\cap N$ 中元素的个数为(B). x^2+y^2

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

3. (2004 年全国卷Ⅰ) 设 A，B，I 均为非空集合，且满足 $A\subseteq B\subseteq I$，则下列各式中错误的是(B).

(A) $(\complement_I A)\cup B=I$

(B) $(\complement_I A)\cup(\complement_I B)=I$

(C) $A\cap(\complement_I B)=\varnothing$

(D) $(\complement_I A)\cap(\complement_I B)=\complement_I B$

4. (2004 年湖北) 设集合 $P=\{m\mid -1<m<0\}$，$Q=\{m\in\mathbf{R}\mid mx^2+4mx-4<0$ 对任意实数 x 恒成立$\}$，则下列关系中成立的是(A).

(A) $P\subsetneqq Q$　　(B) $Q\subsetneqq P$

(C) $P=Q$　　(D) $P\cap Q=\varnothing$

5. (2004 年北京) 函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\in P,\\ -x, & x\in M,\end{cases}$ 其中 P，M 为实数集 $\mathbf{R}$ 的两个非空子集. 又规定 $f(P)=\{y\mid y=f(x), x\in P\}$，$f(M)=\{y\mid y=f(x), x\in M\}$. 给出下列四个判断：

①若 $P\cap M=\varnothing$，则 $f(P)\cap f(M)=\varnothing$；

②若 $P\cap M\neq\varnothing$，则 $f(P)\cap f(M)\neq\varnothing$；

③若 $P\cup M=\mathbf{R}$，则 $f(P)\cup f(M)=\mathbf{R}$；

④若 $P\cup M\neq\mathbf{R}$，则 $f(P)\cup f(M)\neq\mathbf{R}$.

其中正确判断有(　　).

(A) 1 个　　(B) 2 个　　(C) 3 个　　(D) 4 个

6. (2004 年上海) 设集合 $A=\{5,\log_2(a+3)\}$，集合 $B=\{a,b\}$. 若 $A\cap B=\{2\}$，则 $A\cup B=$ $\{1,2,5\}$.

7. (2004 年湖北) 设 A，B 为两个集合，下列四个命题：

①$A\not\subseteq B\Leftrightarrow$ 对任意 $x\in A$，有 $x\notin B$；

②$A\not\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$；

③$A\not\subseteq B\Leftrightarrow A\not\supseteq B$；

④$A\not\subseteq B\Leftrightarrow$ 存在 $x\in A$，使得 $x\notin B$.

其中真命题的序号是________. (把符合要求的命题序号都填上)

8. (1999 年上海) 设集合 $A=\{x\mid |x-a|<2\}$，$B=\left\{x\ \middle|\ \frac{2x-1}{x+2}<1\right\}$，若 $A\subseteq B$，求实数 a 的取值范围.

Ⅱ. 应考仿真预测

1. 已知全集 $U=\mathbf{R}$，$P=\left\{x\middle|x=\dfrac{1}{10^n},n\in\mathbf{N}^*\right\}$，$Q=\left\{x\middle|x=\dfrac{1}{100^n},n\in\mathbf{N}^*\right\}$，则下列关系：

① $P\cap Q=\varnothing$；② $(\complement_U P)\cap Q=\varnothing$；③ $(\complement_U Q)\cup P=U$；④ $(\complement_U P)\cup(\complement_U Q)=U$.

其中正确的是(　　).

(A) 仅②　　(B) 除①外都正确

(C) 仅②和③　　(D) 仅③和④

2. 满足条件 $\varnothing\subsetneqq M\subsetneqq\{0,1,2\}$ 的集合 M 共有(　　).

(A) 3个　(B) 6个　(C) 7个　(D) 8个

3. 如果全集 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x\mid 2<x\leqslant 4\}$，$B=\{3,4\}$，则 $A\cap(\complement_U B)$ 等于________.

4. 设集合 $A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{x\mid x-a<0\}$，若 $A\cap B\neq\varnothing$，则实数 a 的取值范围是________.

5. 已知集合 $M=\{-1,0,1\}$，$N=\{y\mid y=\cos x,x\in M\}$，求 $M\cap N$.

6. 已知集合 $M\cup\{a,b\}=\{a,b,c,d\}$，则这样的集合 M 共有多少个?

7. 已知集合 $M=\{a,0\}$，$N=\{x\mid 2x^2-5x<0,x\in\mathbf{Z}\}$，若 $M\cap N\neq\varnothing$，求 a 的值.

8. 已知函数 $f(x)=x^2+px+q$，$A=\{x\mid f(x)=x\}$，$B=\{x\mid f(x-1)=x+1\}$. 当 $A=\{2\}$ 时，求集合 B.

9. 设 $A=\{x\mid x^2+4x=0\}$，$B=\{x\mid x^2+2(a+1)x+a^2-1=0\}$.

(1) 若 $A\cap B=B$，求 a 的值；

(2) 若 $A\cup B=B$，求 a 的值.

10. 若 $A=\{x\mid x^2-x-2>0,x\in\mathbf{R}\}$，

$B=\{x\mid 2x^2+(5+2a)x+5a<0,x\in\mathbf{R}\}$，

$C=A\cap B\cap\mathbf{Z}=\{-2\}$，

求实数 a 的取值范围.

考点2 简易逻辑与充要条件

考点解读·名题诠释

1. 基本概念

(1) 命题：可以判断真假的语句叫做命题(注意它与陈述或形容一件事情的语句的区别).

(2) 逻辑联结词：把一些简单命题用“或”、“且”、“非”联结起来时，称“或”、“且”、“非”为逻辑联结词.

或：两个简单命题至少一个成立；

且：两个简单命题都成立；

非：对一个命题的否定.

(3) 简单命题与复合命题：不含逻辑联结词的命题叫简单命题；由简单命题与逻辑联结词构成的命题叫做复合命题. 常用小写拉丁字母 p、q、r、s…来表示命题. 复合命题有三类：“p 或 q”、“p 且 q”、“非 p”.

(4) 复合命题的真值表：

p	q	p 且 q	p 或 q	非 p
真	真	真	真	假
真	假	假	真	假
假	真	假	真	真
假	假	假	假	真

从表中可见：“p 且 q”为“一假必假”，“p 或 q”为“一真必真”，“p”与“非 p”为“一真一假”(可联想到集合中“交”、“并”、“补”的概念).

例1 给出命题：p：$3\geqslant 3$；q：函数 $f(x)=\begin{cases}1 & (x\geqslant 0),\\ -1 & (x<0)\end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上是连续函数. 则在下列三个复合命题：“p 且 q”、“p 或 q”、“非 p”中，真命题的个数为(　　).

(A) 0 个　(B) 1 个　(C) 2 个　(D) 3 个

【分析】 首先判断命题 p 和 q 的真假,然后再由复合命题的真值表判断.

【解】 ∵ 命题 p 为真，q 为假，

∴ “p 且 q”、“非 p”为假，“p 或 q”为真. 选(B).

点评 符号“$\geqslant$”表示“$>$”或者“$=$”，因此 $3\geqslant 3$ 是真命题；$f(x)=\begin{cases}1 & (x\geqslant 0),\\ -1 & (x<0)\end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上是不连续的分段函数，因此是假命题.

例2 (1999 年全国) α、β 是两个不同的平面，m、n 是平面 α 及 β 之外的两条不同直线，给出四个论断：① $m\perp n$；② $\alpha\perp\beta$；③ $n\perp\beta$；④ $m\perp\alpha$. 以其中三个论断作为条件,余下一个论断作为结论，写出你认为正确的一个命题：________.

【分析】 应用线线、线面、面面之间关系的判定定理与性质定理进行判断.

【解】 假设①③④为条件，即 $m\perp n$，$m\perp\alpha$，$n\perp\beta$ 成立，

如图 2-1，过 m 上一点 P 作 $PB\parallel n$，垂足为 B，则 $PB\perp m$，$PB\perp\beta$.

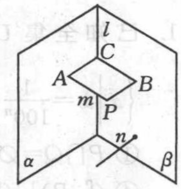


图 2-1

又设 $m\perp\alpha$ 的垂足为 A，过 PA、PB 的平面与 α、β 的交线 l 交于点 C，

∵ $l\perp PA$，$l\perp PB$，∴ $l\perp$ 平面 PAB，

∴ $l\perp AC$，$l\perp BC$，

∴ $\angle ACB$ 是二面角 α-l-β 的平面角.

显然 $\angle APB+\angle ACB=180°$.

∵ $PA\perp PB$，　∴ $\angle ACB=90°$，　∴ $\alpha\perp\beta$.

所以由①、③、④可推得②成立.

同理，如果将②③④作为条件，可推得①成立.

答案为：$m\perp\alpha$、$n\perp\beta$、$\alpha\perp\beta\Rightarrow m\perp n$；或 $m\perp n$、$m\perp\alpha$、$n\perp\beta\Rightarrow\alpha\perp\beta$.

点评 题目以立体几何知识为背景，给出了若干材料，要求考生能将其组装成具有一定逻辑关系的命题. 解题的关键是将符号语言转化为图形语言.

2. 四种命题

(1) 四种命题：一般地，用 p 和 q 分别表示原命题的条件和结论，用 $\neg p$ 和 $\neg q$ 分别表示 p 和 q 的否定,于是四种命题的形式就是：

原命题：若 p 则 q；

逆命题：若 q 则 p；

否命题：若 $\neg p$ 则 $\neg q$；

逆否命题：若 $\neg q$ 则 $\neg p$.

(2) 四种命题间的真值关系：互为逆否的两个命题同真或同假；互逆或互否的两个命题不一定同真假.

例3 (1) 命题：若 $|x+y|=|x|+|y|$，则 $xy\geqslant 0$. 写出它的逆命题、否命题、逆否命题,并判断它们的真假；

(2) 命题：已知 a、b 为实数，若 $x^2+ax+b\leqslant 0$ 有非空解集，则 $a^2-4b\geqslant 0$. 写出该命题的否定及该命题的否命题.

【解】 (1) 逆命题：若 $xy\geqslant 0$，则 $|x+y|=|x|+|y|$，为真命题；

否命题：若 $|x+y|\neq|x|+|y|$，则 $xy<0$，为真命题；

逆否命题：若 $xy<0$，则 $|x+y|\neq|x|+|y|$，为真命题.

(2) 命题的否定：已知 a、b 为实数，若 $x^2+ax+b\leqslant 0$ 有非空解集，则 $a^2-4b<0$；

否命题：已知 a、b 为实数，若 $x^2+ax+b\leqslant 0$ 没有非空解集，则 $a^2-4b<0$.

点评 “命题的否定”与“否命题”是不同的，“命题的否定”，是只否定结论，而“否命题”是既否定条件又否定结论.

3. 充要条件

(1) 充分条件与必要条件

一般地，如果已知 $p\Rightarrow q$，则 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件，可以理解为 q 不成立，则 p 一定不成立.

一般地，如果既有 $p\Rightarrow q$，又有 $q\Rightarrow p$，即 $p\Leftrightarrow q$，这时，p 既是 q 的充分条件，又是 q 的必要条件，则 p 是 q 的充分必要条件，简称充要条件.

(2) 充分条件与必要条件的判断

若 $p\Rightarrow q$，但 $q\not\Rightarrow p$，则 p 是 q 的充分不必要条件.

若 $p\not\Rightarrow q$，但 $q\Rightarrow p$，则 p 是 q 的必要不充分条件. 可理解为有 p 不一定行，但没 p 肯定不行.

若 $p\Leftrightarrow q$，则 p 是 q 的充要条件.

若 $p\not\Rightarrow q$ 且 $q\not\Rightarrow p$，则 p 既不是 q 的充分条件也不是 q 的必要条件.

例 4 (2000 年上海春) "$a=1$"是"函数 $y=\cos^2ax-\sin^2ax$ 的最小正周期为 π"的(　　).

(A) 充分不必要条件

(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件

(D) 既非充分条件又非必要条件

【分析】 先将函数 $y=\cos^2ax-\sin^2ax$ 化简，再根据三角函数的周期性进行判断.

【解】 若 $a=1$，则 $y=\cos^2x-\sin^2x=\cos 2x$，此时，$y$ 的最小正周期为 π，则 $a=1$ 是充分条件.

$y=\cos^2ax-\sin^2ax=\cos 2ax$，此时 y 的周期为 $\frac{2\pi}{|2a|}=\pi$，解得 $a=\pm1$，则 $a=1$ 不是必要条件.

选(A).

点评 充分必要条件的判断实质就是两个命题真假的判断. "若 p 则 q"为真，则 p 是 q 的充分条件，为假则不是；"若 q 则 p"为真，则 p 是 q 的必要条件，为假则不是.

例 5 证明抛物线 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$ 关于 y 轴对称的充要条件是 $b=0$.

【分析】 可根据充分条件与必要条件的定义，分别证充分性和必要性.

【证明】 先证充分性：

若 $b=0$，则抛物线方程为 $y=ax^2+c$.

设 $P(x_0, y_0)$ $(x_0\in\mathbf{R}, y_0\in\mathbf{R})$ 是抛物线上任意一点，则 $y_0=ax_0^2+c$.

$P(x_0, y_0)$ 关于 y 轴的对称点为 $P'(-x_0, y_0)$.

$\because a(-x_0)^2+c=ax_0^2+c=y_0$，

$\therefore P'(-x_0, y_0)$ 在抛物线 $y=ax^2+c$ 上.

由点 P 的任意性可知，$y=ax^2+c$ 关于 y 轴对称.

再证必要性：

若抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 关于 y 轴对称，则抛物线上任意一点 $P(x_0, y_0)$ 关于 y 轴的对称点 $P'(-x_0, y_0)$ 都在抛物线上.

$\therefore$ 对 $x_0\in\mathbf{R}$ 有 $ax_0^2+bx_0+c=a(-x_0)^2+b(-x_0)+c$ 成立，即有 $2bx_0=0$ 成立，故 $b=0$.

综上，可知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 关于 y 轴对称的充要条件是 $b=0$.

点评 有关充要条件命题的证明，一般是分必要性、充分性两步进行. 应注意不要把必要性与充分性的证明颠倒了，一般地，A 成立的充要条件是 B，由 $A\Rightarrow B$ 是证必要性，由 $B\Rightarrow A$ 是证充分性.

思维拓展·能力提升

范例 (2002 年广东) 已知 $a>0$，函数 $f(x)=ax-bx^2$.

(1) 当 $b>0$ 时，若对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x)\leqslant1$，证明：$a\leqslant2\sqrt{b}$.

(2) 当 $b>1$ 时，证明：对任意 $x\in[0,1]$，$|f(x)|\leqslant1$ 的充要条件是 $b-1\leqslant a\leqslant2\sqrt{b}$.

(3) 当 $0<b\leqslant1$ 时，讨论对任意 $x\in[0,1]$，$|f(x)|\leqslant1$ 的充要条件.

【证明】 (1) $\because f(x)=-b\left(x-\frac{a}{2b}\right)^2+\frac{a^2}{4b}$，对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x)\leqslant1$，

$\therefore f\left(\frac{a}{2b}\right)=\frac{a^2}{4b}\leqslant1$.

$\because a>0, b>0$，

$\therefore a\leqslant2\sqrt{b}$.

(2) 先证必要性：

对任意 $x\in[0,1]$，$|f(x)|\leqslant1$，　即 $-1\leqslant f(x)\leqslant1$.

据此可推得 $-1\leqslant f(1)$，　即 $a-b\geqslant-1$，

$\therefore a\geqslant b-1$.

对任意 $x\in[0,1]$，$|f(x)|\leqslant1$，　即 $f(x)\leqslant1$.

$\because b>1$，故可推得 $f\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)\leqslant1$，　即 $a\cdot\frac{1}{\sqrt{b}}-1\leqslant1$，

$\therefore a\leqslant2\sqrt{b}$.

$\therefore b-1\leqslant a\leqslant2\sqrt{b}$.

再证充分性：

$\because b>1, a\geqslant b-1$，

$\therefore$ 对任意 $x\in[0,1]$，可以推得

$ax-bx^2\geqslant(b-1)x-bx^2=b(x-x^2)-x\geqslant-x\geqslant-1$，

即
$$ax-bx^2\geqslant-1.$$

又 $\because b>1, a\leqslant2\sqrt{b}$，

对任意 $x\in[0,1]$，可以推得

$$ax-bx^2\leqslant2\sqrt{b}x-bx^2\leqslant1,$$

即
$$ax-bx^2\leqslant1.$$

$\therefore -1\leqslant ax-bx^2\leqslant1$.

综上所述，当 $b>1$ 时，对任意 $x\in[0,1]$，$|f(x)|\leqslant1$ 的充要条件是 $b-1\leqslant a\leqslant2\sqrt{b}$.

(3) ∵ $a>0$，$0<b\leqslant1$ 时，对任意 $x\in[0,1]$，有

$f(x)=ax-bx^2\geqslant-b\geqslant-1$， 即 $f(x)\geqslant-1$.

而 $f(x)\leqslant1\Rightarrow f(1)\leqslant1\Leftrightarrow a-b\leqslant1$，即 $a\leqslant b+1$.

又 $a\leqslant b+1\Rightarrow f(x)\leqslant(b+1)x-bx^2\leqslant1$， 即 $f(x)\leqslant1$.

∴ 当 $a>0$，$0<b\leqslant1$ 时，对任意 $x\in[0,1]$，$|f(x)|\leqslant1$ 的充要条件是 $a\leqslant b+1$.

点评 "充要条件"是重要概念之一，贯穿于高中数学始末，是历年高考的必考内容，读者应真正理解并善于运用它分析和解决问题.

考题回放·仿真预测

Ⅰ. 高考真题回放

1. (2004 年北京春) 已知三个不等式：$ab>0$，$bc-ad>0$，$\frac{c}{a}-\frac{d}{b}>0$(其中 a，b，c，d 均为实数). 用其中两个不等式作为条件、余下的一个不等式作为结论组成一个命题，可组成的正确命题的个数是(　　).

(A) 0　　(B) 1

(C) 2　　(D) 3

2. (2004 年天津) 对任意实数 a，b，c，在下列命题中，真命题是(　　).

(A) "$ac>bc$"是"$a>b$"的必要条件

(B) "$ac=bc$"是"$a=b$"的必要条件

(C) "$ac>bc$"是"$a>b$"的充分条件

(D) "$ac=bc$"是"$a=b$"的充分条件

3. (2004 年福建) 命题 p：若 a，$b\in\mathbf{R}$，则 $|a|+|b|>1$ 是 $|a+b|>1$的充分而不必要条件.　命题 q：函数 $y=\sqrt{|x-1|-2}$的定义域是 $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$. 则(　　).

(A) "p 或 q"为假　　(B) "p 且 q"为真

(C) p 真 q 假　　(D) p 假 q 真

4. (2004 年湖北) 已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 为非零的平面向量. 甲：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，乙：$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，则(　　).

(A) 甲是乙的充分条件但不是必要条件

(B) 甲是乙的必要条件但不是充分条件

(C) 甲是乙的充要条件

(D) 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

5. (2004 年重庆) 已知 p 是 r 的充分不必要条件，s 是 r 的必要条件，q 是 s 的必要条件，那么 p 是 q 成立的(　　).

(A) 充分不必要条件

(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件

(D) 既不充分也不必要条件

6. (2004 年湖南) 设集合 $U=\{(x,y)|x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$，$A=\{(x,y)|2x-y+m>0\}$，$B=\{(x,y)|x+y-n\leqslant0\}$，那么点 $P(2,3)\in A\cap(\complement_U B)$的充要条件是(　　).

(A) $m>-1$，$n<5$

(B) $m<-1$，$n<5$

(C) $m>-1$，$n>5$

(D) $m<-1$，$n>5$

7. (2004 年天津) 已知数列 $\{a_n\}$，那么"对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，点 $P_n(n,a_n)$都在直线 $y=2x+1$ 上"是"$\{a_n\}$为等差数列"的(　　).

(A) 必要而不充分条件

(B) 充分而不必要条件

(C) 充要条件

(D) 既不充分也不必要条件

8. (2001 年天津) 在空间中，① 若四点不共面，则这四点中任何三点都不共线；② 若两条直线没有公共点，则这两条直线是异面直线. 以上两个命题中，逆命题为真命题的是________.

Ⅱ. 应考仿真预测

1. 下列各组命题中，满足"p 或 q"为真，"p 且 q"为假，"非 p"为真的是(　　).

(A) p：$0=\varnothing$；q：$0\in\varnothing$

(B) p：在△ABC 中，若 $\cos2A=\cos2B$，则 $A=B$；
　q：$y=\sin x$ 在第一象限是增函数

(C) p：$a+b\geqslant2\sqrt{ab}$ ($a,b\in\mathbf{R}$)；
　q：不等式 $|x|>x$ 的解集为 $(-\infty,0)$

(D) p：圆 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ 的面积被直线 $x=1$ 平分；
　q：椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的一条准线方程是 $x=4$

2. 对于命题 p 和 q，若"p 且 q"为真命题，则下列四个命题：
① "p 或 $\neg q$"是真命题；
② "p 且 $\neg q$"是真命题；
③ "$\neg p$ 且 $\neg q$"是假命题；
④ "$\neg p$ 或 q"是假命题.
其中真命题是(　　).

(A) ①②　　(B) ③④

(C) ①③　　(D) ②④

3. 设 p：$\frac{1}{x}<1$，q：$|x|>1$，则 p 是 q 的(　　).

(A) 充分不必要条件

(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件

(D) 既不充分也不必要条件

4. 给出下列命题：① 若 $x\neq2$ 且 $y\neq3$，则 $x+y\neq5$；② "$\sqrt{2}$ 是无理数"的逆命题是真命题；③ 若 $x\in\mathbf{R}$，则 $5^x>4^x$；④ $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ 的充分非必要条件是 $b<a<0$. 其中正确命题的序号是________.

5. 已知命题：“设 a、b、$c\in\mathbf{R}$，若 $ac^2>bc^2$，则 $a>b$.”写出该命题的逆命题、否命题、逆否命题，判别上述四个命题的真假性.

6. 命题 p：$\tan(A+B)=0$，命题 q：$\tan A+\tan B=0$. 求证：p 是 q 的必要非充分条件.

7. 不等式 $|x-1|<a$ 成立的充分条件是 $0<x<4$，求 a 的取值范围.

8. 设有两个命题：① 若关于 x 的不等式 $(m-2)x^2+(m-2)x-4<0$，对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立；② $f(x)=-(1-3m-m^2)^x$ 是减函数，且命题①和命题②至少有一个是真命题. 求实数 m 的取值范围.

第二章　函　　数

考点3　映射与函数

考点解读·名题诠释

1. 映射

(1) 映射的定义

设 A，B 是两个集合，如果按照某种对应法则 f，对于集合 A 中的任何一个元素，在集合 B 中都有惟一的元素和它对应，那么这样的对应叫做集合 A 到集合 B 的映射，记作 f：$A\to B$.

(2) 象与原象

如果给定一个集合 A 到集合 B 的映射，那么，和 A 中的元素 a 对应的 B 中的元素 b 叫做 a 的象，a 叫做 b 的原象.

例1 (2000 年全国) 设集合 A 和 B 都是自然数集合 $\mathbf{N}$，映射 f：$A\to B$ 把集合 A 中的元素 n 映射到集合 B 中的元素 2^n+n，则在映射 f 下，象 20 的原象是(C).

(A) 2　　(B) 3　　(C) 4　　(D) 5

【分析】 实质是解关于 n 的方程 $2^n+n=20$.

【解】 根据映射定义，得 $2^n+n=20$，即 $2^n=20-n$.

由 n 是自然数，得 $1\leqslant 2^n=20-n\leqslant 20$.

于是 $0\leqslant n\leqslant 4$，即 $n=0$，1，2，3，4.

经验证符合题意的是 $n=4$，故选(C).

点评 本题的关键是正确理解象与原象的概念，这里采用的验证法也是一种常用的方法.

2. 函数

(1) 函数的定义

如果 A，B 都是非空的数集，那么 A 到 B 的映射 f：$A\to B$就叫做A 到 B 的函数，记作 $y=f(x)$，其中 $x\in A$，$y\in B$. 原象的集合 A 叫做函数 $y=f(x)$的定义域，象的集合$C(C\subseteq B)$叫做函数 $y=f(x)$的值域.

(2) 函数的三要素

函数三要素是指定义域、对应法则和值域.

例2 (1999 年上海) 下列各组函数中表示同一函数的是(D).

(A) $y=\sqrt[5]{x^5}$ 与 $y=\sqrt{x^2}$

(B) $y=\ln e^x$ 与 $y=e^{\ln x}$

(C) $y=\dfrac{(x-1)(x+3)}{x-1}$ 与 $y=x+3$

(D) $y=x^0$ 与 $y=\dfrac{1}{x^0}$

【分析】 函数三要素都相同的两个函数才是同一个函数.

【解】 (B)、(C)中的两个函数的定义域都不相同，(A)中两个函数的值域不同，(D)中两个函数的定义域、值域均相同，故选(D).

点评 判断两个函数是否为同一函数，关键要判断这两个函数的定义域、对应法则和值域是否完全相同. 因为值域是由定义域和对应法则确定的，故只需判断两个函数的定义域和对应法则是否相同即可.

3. 函数的表示法

表示函数的方法，常用的有解析法、~~列表法~~、图象法三种.

例3 (2001 年京、蒙、皖春) 已知 $f(x^6)=\log_2 x$，那么 $f(8)$等于(　　).

(A) $\dfrac{4}{3}$　　(B) 8　　(C) 18　　(D) $\dfrac{1}{2}$

【解法一】 设 $x^6=8$，得 $x=8^{\frac{1}{6}}$，

$\therefore f(8)=\log_2 8^{\frac{1}{6}}=\dfrac{1}{6}\times 3=\dfrac{1}{2}$.　答案选(D).

【解法二】 设 $t=x^6$，得 $x=t^{\frac{1}{6}}$，

$\therefore f(t)=\log_2 t^{\frac{1}{6}}=\dfrac{1}{6}\log_2 t$.

$\therefore f(8)=\dfrac{1}{6}\log_2 8=\dfrac{1}{6}\times 3=\dfrac{1}{2}$.　答案为(D).

点评 本题是已知复合函数及内层函数，求外层函数的问题，关键是要弄清其复合关系，此类问题常采用换元法求解.

例4 (2002 年全国) 据新华社 2002 年 3 月 12 日电，1985 年到 2000 年间，我国农村人均居住面积如图 3-1 所示，其中，从________年到________年的五年间增长最快.

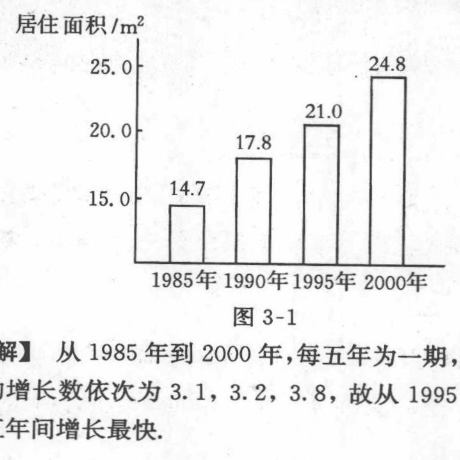


图 3-1

【解】 从 1985 年到 2000 年，每五年为一期，由图可知，各期的增长数依次为 3.1，3.2，3.8，故从 1995 年到 2000 年的五年间增长最快.

点评 本题主要考查应用数学知识解决实际问题的能力以及认识和处理数据信息的能力. 试题的素材来源于当年新华社的电讯，反映我国人民生活改善的实况. 这类试题有着良好的导向，旨在引导青年学生关心国家建设和时事，是近年来命题的新热点.

4. 函数的应用题

函数应用题主要涉及函数的应用开放性问题，这类试题题源丰富、背景深刻、题型新颖、解法灵活，是十余年来高考命题热点之一.

求解函数应用开放性问题的思路和方法，可以用图 3-2 表示.

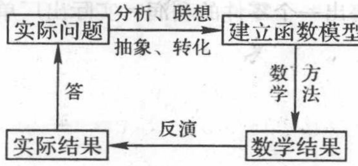
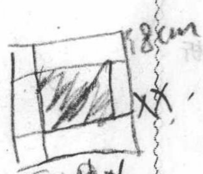


图 3-2



例 5 (2001 年全国) 设计一幅宣传画，要求画面面积为 $4840\ cm^2$，画面宽与高的比为 $\lambda(\lambda<1)$，画面上、下各留 8 cm 空白，左、右各留 5 cm 空白. 怎样确定画面高与宽的尺寸，才能使宣传画所用纸张面积最小?

【分析】 依据题意，先建立函数模型，再求最值.

【解】 设画面高为 x cm，宽为 λx cm，则有

$$\lambda x^2=4840,\quad 得\ x=\frac{22\sqrt{10}}{\sqrt{\lambda}}.$$

设纸张面积为 S，有

$$S=(x+16)(\lambda x+10)=\lambda x^2+(16\lambda+10)x+160.$$

将 $x=\frac{22\sqrt{10}}{\sqrt{\lambda}}$ 代入上式，得

$$S=5000+44\sqrt{10}\left(8\sqrt{\lambda}+\frac{5}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

当 $8\sqrt{\lambda}=\frac{5}{\sqrt{\lambda}}$，即 $\lambda=\frac{5}{8}\ \left(\frac{5}{8}<1\right)$ 时，S 取得最小值，此时，高 $x=\sqrt{\frac{4840}{\lambda}}\text{cm}=88$ cm，宽 $\lambda x=\frac{5}{8}\times 88$ cm$=55$ cm.

点评 本题关键是建立函数模型：$y=ax+\frac{b}{x}$，这种函数模型在 1997 年、1998 年、2000 年、2001 年高考题中都出现过，望读者了解并引起重视.

思维拓展·能力提升

范例 (2002 年北京) 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的不恒为零的函数，且对于任意的 $a,\ b\in\mathbf{R}$，都满足 $f(a\cdot b)=af(b)+bf(a)$.

(1) 求 $f(0)$，$f(1)$ 的值;

(2) 判断 $f(x)$ 的奇偶性，并证明你的结论;

(3) $f(2)=2$，$u_n=\frac{f(2^{-n})}{n}\ (n\in\mathbf{N}^*)$，求数列 $\{u_n\}$ 的前 n 项的和 S_n.

【分析】 本题是一道关于抽象函数和数列的综合题，求解的关键是将 $f(a\cdot b)=af(b)+bf(a)$ 转化为熟悉的形式.

解 (1) $f(0)=f(0\cdot 0)=0\cdot f(0)+0\cdot f(0)=0$;

$f(1)=f(1\cdot 1)=1\cdot f(1)+1\cdot f(1)$， 故 $f(1)=0$.

(2) $\because f(1)=f[(-1)^2]=-f(-1)-f(-1)=0$,

$\therefore f(-1)=0$.

$$\because f(-x)=f(-1\cdot x)=-f(x)+xf(-1)=-f(x),$$

$\therefore f(x)$ 为奇函数.

(3) $f(a\cdot b)=af(b)+bf(a)$，当 $ab\neq 0$ 时，

$$\frac{f(a\cdot b)}{ab}=\frac{f(a)}{a}+\frac{f(b)}{b}.$$

令 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$，则 $g(a\cdot b)=g(a)+g(b)$， 故

$$g(a^n)=g(a^{n-1})+g(a).$$

$\therefore$ 数列 $\{g(a^n)\}$ 是以 $g(a)$ 为首项、$g(a)$ 为公差的等差数列，

$\therefore g(a^n)=ng(a)$.

$\therefore f(a^n)=a^n\cdot g(a^n)=na^{n-1}f(a)$.

$$\therefore u_n=\frac{f(2^{-n})}{n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}f\left(\frac{1}{2}\right).$$

$\because f(2)=2$,

$$f(1)=f\left(2\cdot\frac{1}{2}\right)=2f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f(2)=0,$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}f(2)=-\frac{1}{2}.$$

$$\therefore u_n=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\left(\frac{1}{2}\right)^n\ (n\in\mathbf{N}^*).$$

$$\therefore S_n=\frac{-\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^n-1\ (n\in\mathbf{N}^*).$$

点评 这是一道立意新颖，跨章节的综合性试题. 考生可在第(1)问的基础上，利用函数奇偶性的定义求解第(2)问. 第(3)问应合理转化，也可以在归纳假设的基础上，充分利用所给函数关系式进行求解. 此题有较强的选拔功能和较高的区分度.

考题回放·仿真预测

Ⅰ. 高考真题回放

1. (2000 年天津、江西) 设集合 A 和 B 都是坐标平面上的点集 $\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},\ y\in\mathbf{R}\}$，映射 $f: A\to B$ 把集合 A 中的元素 (x,y) 映射成集合 B 中的元素 $(x+y,\ x-y)$，则在映射 f 下，象 $(2,1)$ 的原象是(B).

x+y=2
x-y=1
2x=3

(A) (3,1) (B) $\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

(C) $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$ (D) (1, 3)

2. (2003 年全国) 已知 $f(x^5)=\lg x$，则 $f(2)$ 等于(D)．

(A) lg2　　(B) lg 32

(C) $\lg\dfrac{1}{32}$　　(D) $\dfrac{\lg 2}{5}$

3. (2004 年北京、安徽春) 若 $f(\sin x)=2-\cos 2x$，则 $f(\cos x)$ 等于(D)．

(A) $2-\sin 2x$　　(B) $2+\sin 2x$

(C) $2-\cos 2x$　　(D) $2+\cos 2x$

4. (2004 年湖南) 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+bx+c, & x\leqslant 0,\\ 2, & x>0.\end{cases}$ 若 $f(-4)=f(0)$，$f(-2)=-2$，则关于 x 的方程 $f(x)=x$ 的解的个数为(C)．

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

5. (2004 年湖北) 已知 $f\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$，则 $f(x)$ 的解析式可取为(　　)．

(A) $\dfrac{x}{1+x^2}$　　(B) $-\dfrac{2x}{1+x^2}$

(C) $\dfrac{2x}{1+x^2}$　　(D) $-\dfrac{x}{1+x^2}$

6. (2002 年全国) 已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$，那么 $f(1)+f(2)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f(3)+f\left(\dfrac{1}{3}\right)+f(4)+f\left(\dfrac{1}{4}\right)=$______．

7. (2003 年北京春) 在某报《自测健康状况》的报道中，自测血压结果与相应年龄的统计数据如下表：

年龄(岁)	30	35	40	45	50	55	60	65
收缩压(水银柱：毫米)	110	115	120	125	130	135	(　)	145
舒张压(水银柱：毫米)	70	73	75	78	80	83	(　)	88

观察表中数据的特点，将适当的数填入表中空白处．

8. (2001 年上海) 用水清洗一堆蔬菜上残留的农药，对用一定量的水清洗一次的效果作如下假定：用 1 个单位量的水可洗掉蔬菜上残留农药量的 $\dfrac{1}{2}$，用水越多洗掉的农药量也越多．但总还有农药残留在蔬菜上．设用 x 单位量的水清洗一次以后，蔬菜上残留的农药量与本次清洗前残留的农药量之比为函数 $f(x)$．

(1) 试规定 $f(0)$ 的值，并解释其实际意义；

(2) 试根据假定写出函数 $f(x)$ 应该满足的条件和具有的性质；

(3) 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，现有 $a(a>0)$ 单位量的水，可以清洗一次，也可以把水平均分成 2 份后清洗两次，试问用哪种方案清洗后蔬菜上残留的农药量比较少？说明理由．

9. (2004 年北京春) 某厂生产某种零件，每个零件的成本为 40 元，出厂单价定为 60 元，该厂为鼓励销售商订购，决定当一次订购量超过 100 个时，每多订购一个，订购的全部零件的出厂单价就降低 0.02 元，但实际出厂单价不能低于 51 元．

(1) 当一次订购量为多少个时，零件的实际出厂单价恰降为 51 元？

(2) 设一次订购量为 x 个，零件的实际出厂单价为 P 元，写出函数 $P=f(x)$ 的表达式；

(3) 当销售商一次订购 500 个零件时，该厂获得的利润是多少元？如果订购 1000 个，利润又是多少元？(工厂售出一个零件的利润＝实际出厂单价－成本)

Ⅱ．应考仿真预测

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}-1 & (x<0),\\ 0 & (x=0),\\ 1 & (x>0),\end{cases}$ 则 $\dfrac{a+b+(a-b)f(a-b)}{2}$ $(a\neq b)$ 的值应为(A)．

(A) $|a|$　　(B) $|b|$

(C) a，b 之中较小的数　　(D) a，b 之中较大的数

2. C 是曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ $(x\leqslant 0)$ 上一点，$CD\perp y$ 轴，D 是垂足，A 点坐标是 $(-1,0)$．设 $\angle CAO=\theta$ (其中 O 表示原点)，将 $AC+CD$ 表示成关于 θ 的函数 $f(\theta)$，则 $f(\theta)=$(　　)．

(A) $2\cos\theta-\cos 2\theta$　　(B) $\cos\theta+\sin\theta$

(C) $2\cos\theta(1+\cos\theta)$　　(D) $2\sin\theta+\cos\theta-\sqrt{2}$

3. 今有一组实验数据如下表：

t	1.99	3.0	4.0	5.1	6.12
v	1.5	4.04	7.5	12	18.01

现准备用下列函数中的一个近似地表示这些数据满足的规律，其中最接近的一个是(　　)．

(A) $v=\log_2 t$　　(B) $v=\log_{\frac{1}{2}} t$

(C) $v=2t-2$　　(D) $v=\dfrac{t^2-1}{2}$

4. 由等式 $x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=(x+1)^4+b_1(x+1)^3+b_2(x+1)^2+b_3(x+1)+b_4$ 定义映射 f：$(a_1, a_2, a_3, a_4)\to(b_1, b_2, b_3, b_4)$，则 $f(4, 3, 2, 1)=$______．

5. 设 $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$，那么 $f\left(\dfrac{1}{11}\right)+f\left(\dfrac{2}{11}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{10}{11}\right)$ 的

值为________.

6. 设函数 $f(x)=\frac{1}{4^x+m}$ ($m>0$ 且 m 为常数)，已知对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x)+f(1-x)=\frac{1}{2}$ 成立.

(1) 求 m 的值；

(2) 记 $a_n=f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f(1)$ ($n\in\mathbf{N}^*$)，当 $n\geqslant 2$ 时，试比较 2^n 与 $2na_n$ 的大小，并证明你的结论.

7. 国际上常用恩格尔系数(记作 n)来衡量一个国家和地区人民生活水平的状况，它的计算公式为：

$$n=\frac{\text{食品消费支出总额}}{\text{消费支出总额}}\times 100\%.$$

各种类型家庭的 n 值如下表所示：

家庭类型	贫困	温饱	小康	富裕	最富裕
n	$n>60\%$	$50\%<n\leqslant 60\%$	$40\%<n\leqslant 50\%$	$30\%<n\leqslant 40\%$	$n\leqslant 30\%$

根据某市城区家庭抽样调查统计，1997 年至 2003 年间，每户家庭支出总额每年平均增加 700 元，其中食品消费支出总额每年平均增加 100 元.

(1) 若 1997 年该市城区家庭刚达到小康，且该年每户家庭消费支出总额为 9000 元，问 2002 年能否达到富裕？请说明理由.

(2) 若 2002 年比 1997 年的消费支出总额增加 35%，而其中食品消费支出总额增加 10%，问从哪一年起能达到富裕？请说明理由.

考点4 函数的定义域与值域

考点解读·名题诠释

1. 确定函数(初等函数)定义域的原则

(1) 实数的原则：偶次方根被开方数应是非负数，如函数 $y=\sqrt[2n]{f(x)}$ ($n\in\mathbf{N}^*$)中 $f(x)\geqslant 0$.

(2) 函数值存在的原则：有理分式函数 $y=\frac{1}{f(x)}$ 的分母 $f(x)\neq 0$；对数函数 $y=\log_a f(x)$ ($a>0$，$a\neq 1$)应有 $f(x)>0$.

(3) 有限个初等函数四则运算而合成的函数的定义域是各个初等函数定义域的交集.

(4) 复合函数 $y=f[g(x)]$ 的定义域是"内层函数 $g(x)$"的定义域与 $g(x)$ 满足"外层函数 $f(z)$ ($z=g(x)$)"的定义域 x 的集合的交集.

例1 (2002 年上海春) 函数 $y=\frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}$ 的定义域为________.

【解】 依题意，有：

$$3-2x-x^2>0,\quad \text{即 } x^2+2x-3<0.$$

解得 $-3<x<1$. 故其定义域为$(-3，1)$.

点评 求复合函数的定义域，首先应弄清内层函数与外层函数，再依据"确定函数定义域的原则"进行求解.

2. 求函数定义域的四种主要类型

(1) 若所给函数解析式比较复杂，求定义域时，通常根据各种条件布列不等式组进行.

(2) 由 $y=f(x)$ 的定义域求复合函数 $f[g(x)]$ 的定义域问题，实质上是已知中间量 $u=g(x)$ 的值域求自变量 x 的取值范围问题.

(3) 对含字母参数的函数，求其定义域时应注意对字母参数的一切允许值进行分类讨论.

(4) 对于实际问题，除应考虑解析式本身有定义外，还应使实际问题有意义.

例2 已知函数 $f(x)$ 的定义域是$[a，b]$，且 $a+b>0$，求下列各函数的定义域：

(1) $f(x^2)$； (2) $g(x)=f(x)-f(-x)$；

(3) $h(x)=f(x+m)+f(x-m)$ ($m>0$).

【解】 (1) 依题意，有 $\begin{cases}b>a,\\a+b>0,\end{cases}$

故 $b>0$，且 $b>|a|$.

由 $a\leqslant x^2\leqslant b$ 可知：当 $a\leqslant 0$ 时，定义域为$[-\sqrt{b}，\sqrt{b}]$；当 $a>0$ 时，定义域为$[-\sqrt{b}，-\sqrt{a}]\cup[\sqrt{a}，\sqrt{b}]$.

(2) 由 $\begin{cases}a\leqslant x\leqslant b,\\a\leqslant -x\leqslant b,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a\leqslant x\leqslant b,\\-b\leqslant x\leqslant -a.\end{cases}$ ①