高等院校医学类专业试用教材
供基础、临床、预防、口腔医学类专业用

医学物理学实验

主编／宋效先

人民卫生出版社
PEOPLE'S MEDICAL PUBLISHING HOUSE

高等院校医学类专业试用教材

供基础、临床、预防、口腔医学类专业用

医学物理学实验

主　编　宋效先

副主编　杨跃平　王晓燕

编　者（以姓氏笔画为序）

王伟平　王晓燕　宋效先

邵雪辉　杨跃平　高建武

人民卫生出版社

图书在版编目（CIP）数据

医学物理学实验/宋效先主编. —北京：
人民卫生出版社，2006.9
ISBN 7-117-07942-8

Ⅰ. 医... Ⅱ. 宋... Ⅲ. 医用物理学-实验-医学院校-教材 Ⅳ. R312-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 096717 号

医学物理学实验

主　　编： 宋效先
出版发行： 人民卫生出版社（中继线 010-67616688）
地　　址： 北京市丰台区方庄芳群园 3 区 3 号楼
邮　　编： 100078
网　　址： http://www.pmph.com
E - mail： pmph @ pmph.com
购书热线： 010-67605754　010-65264830
印　　刷： 北京市卫顺印刷厂
经　　销： 新华书店
开　　本： 787×1092　1/16　　**印张：** 9.25
字　　数： 216 千字
版　　次： 2006 年 9 月第 1 版　2006 年 9 月第 1 版第 1 次印刷
标准书号： ISBN 7-117-07942-8/R・7943
定　　价： 18.00 元

前　言

医学物理学实验是为医学类专业学生开设的一门实验课，它的任务是通过实验培养学生发现、分析和解决物理或医学物理问题的能力。医学物理实验是医学物理学的重要组成部分，是无法用理论课来替代的相对独立开设的一门课程。掌握实验方法和操作技能不仅是医学也是其他自然学科的实验教学和科学研究的基础。要让学生系统地掌握医学物理实验的基本知识、基本方法和基本技能，为了未来所从事的医学工作打好基础，提高学生的实验素质是我们在对实验课教学中必须注意的问题。所谓“实验素质”，可以理解为实验不仅要掌握进行实验的理论基础，还要学习医学物理的实验方法，进行操作技能的系统训练，最终是以培养学生自己动手进行科研的能力为目标。

为加强医学物理学实验教学，提高实验教学质量，我们根据高等医药院校医学物理学教学大纲的基本要求，结合各位编者多年的教学经验编写了这本教材，共选编入29个实验，其中有些实验是实验课程内容改革产物，另外还增加了诸如仿真实验的新内容，在一定程度上体现了实验内容的先进性。参加编写的教师都有丰富的理论教学和实践教学的经验，为编好这本教材奠定了基础。

本教材可供临床医学、检验学、药学、麻醉学、口腔、影像、护理等专业使用，同时也可供其他有关专业师生参考。

本书实验一、实验十、实验十一、实验二十二、实验二十三由王伟平编写；实验六、实验十二、实验十三、实验十九、实验二十九由王晓燕编写；实验四、实验五、实验十六、实验十七和实验二十一由宋效先编写；实验七、实验八、实验九、实验二十和实验二十七由邵雪辉编写；绪论、实验二、实验十八、实验二十四和实验二十六由杨跃平编写；实验三、实验十四、实验十五、实验二十五和实验二十八由高建武编写。

王晓燕、杨跃平各自审阅了部分书稿，全书统一由宋效先修改定稿。

本书在编写和出版过程中得到了河北北方学院、人民卫生出版社有关领导和工作人员的大力支持和帮助，在此一并表示感谢！

由于我们水平有限，加之编写时间仓促，书中难免有不妥之处，希望读者批评指正，以便进一步修订。

编　者

2006年7月

目　录

实验规则

为了保证实验正常进行，以及培养严肃认真的工作作风和良好的实验工作习惯，特制定下列规则，望学生遵守执行。

1. 学生应在课程表规定时间内进行实验，不得无故缺席或迟到。实验时间若要变更，须经老师或实验室工作人员同意。

2. 学生在每次实验前对安排要做的实验应进行预习。

3. 实验时应携带必要的物品，如文具、计算器和草稿纸等。对于需要作图的实验应事先准备毫米方格纸和铅笔。

4. 进入实验室后，根据实验讲义或仪器清单核对自己使用的仪器是否缺少或损坏。若发现有问题，应向教师提出。未列入清单的仪器，另向老师借用，实验完毕后归还。

5. 实验前应细心观察仪器构造，操作应谨慎细心，严格遵守各种仪器仪表的操作规则及注意事项。尤其是电学实验，线路接好后先经教师或实验室工作人员检查，经许可后才可接通电路，以免发生意外。

6. 实验完毕前应将实验数据交给教师检查，实验合格者教师予以签字通过。余下时间在实验室内进行实验计算和写实验报告，待下课后方可离开。实验不合格或请假缺课的学生，由指导教师登记，通知在规定时间内补做。

7. 实验时应注意保持实验室整洁、安静。实验完毕应将仪器、桌椅恢复原状，放置整齐。

8. 如有仪器损坏应及时报告教师或实验室工作人员，并填写损坏单，注明损坏原因。赔偿办法根据学校规定处理。

以上要求希望同学自觉遵守，只有这样才能保证实验的顺利进行。随着实验教学的深入，逐步培养学生自觉、独立地完成实验的能力，由封闭式实验室，向开放型、研究型实验室过渡，使学生成为新世纪的“四有”人才。

绪　论

一、医用物理实验的意义、任务及要求

1. 医用物理实验的意义与任务　医用物理学是高等医学院校各类专业必修的一门重要基础课，它讲述了物理在医学上的应用，是医学生必须掌握的并在后续课程中需要用到的物理学知识。它是以实验为基础的一门科学，其实验是医用物理学的重要组成部分。对于从事临床医学或临床检验工作的人来讲，物理的实验知识和技能是必不可少的。有资料表明，目前常用的科研方法中，有50%以上是属于物理实验的方法。在当今社会，几乎没有一门学科和技术不是在应用物理的成果。医学领域更不例外，许多最新的物理理论和技术都在此得以应用。正是由于物理和生物物理的发展，才推动着医学的飞速发展。物理学的原理、物理实验的方法，以及物理测量技术已被广泛运用到医学临床、检验及科研各个领域当中。

物理实验的任务不仅是观察某些物理现象，更重要的是要找出各种物理量之间的关系，发现其变化的规律。古往今来，每个物理定律的确立，都是以大量的实验为基础。即使已经确定的物理定律，如若发现新的实验事实与此定律相违背，便要修正原有的物理定律或物理理论。因此我们说，物理实验是物理理论的基础，也是物理理论正确与否的试金石。物理实验既为开拓新理论、新领域奠定基础，又为丰富和发展物理学应用提供了广阔天地。近年来，物理学发展很快，尤其是核物理、激光、电子技术和计算机等现代化科学技术的发展，更反映了物理实验技术发展的新水平；同时，它们也在医学领域里得到了广泛应用。科学技术越是发展，越体现出物理实验技术的重要性，为此，人们越来越深的感到加强物理实验的重要意义。

医用物理实验是进行科学实验训练的一门基础课程，是医学院校各专业后继实验课程的基础之一。也就是说，它是大学生从事科学实验工作的入门。学好物理实验对学生今后的学习、工作，以及科学素质的培养提高都是有益的。物理实验的主要任务如下：①学习物理实验的基础理论，包括一些典型的实验方法及其物理思想。如比较法、转换法、模拟法、计算机虚拟方法等，有助于思维与创造能力的培养。②使学生接受必要的实验知识和操作技能的训练，培养学生初步掌握正确使用仪器进行测量、处理数据、分析结果以及编写报告等方面的能力。③培养学生观察分析事物的能力，加深和巩固对课堂所学理论知识的理解。④培养学生严格、细致、实事求是、刻苦钻研、一丝不苟的科学态度，以及爱护国家财产的良好品质；培养学生善于动脑、乐于动手、讲究科学方法、遵守操作规程、注意安全等良好习惯。

医用物理实验是一门实践性很强的课程，学生是在自己独立工作的过程中增长知识，提高能力的。因此上述教学目的能否达到在很大程度上取决于学生自己的努力。教学的重点应放在培养学生科学实验能力与提高学生科学实验素养方面，使学生在获取知

识的自学能力、运用知识的综合分析能力、动手实践能力、设计创新能力以及严肃认真的作风、实事求是的科学态度等方面得到训练与提高。

2. 医用物理实验课的要求　实验课程的学习大致可分为前后两大阶段：前期阶段，以“模仿”学习为主，初步学会实验的工作方法，把基础打扎实；后期阶段，逐步转移到学生独立工作能力的培养方面。所以实验教材在编写时也有所侧重，前面写的比较详细，供学生“效仿”；后面的则着重写明原理和实验方法的思路，而详细的实验步骤则要学生自行考虑。同时，还安排了一些设计性实验，以利于实验工作能力的培养。

上实验课与听理论课不同，其特点主要是在教师的指导下同学自己动手，独立地完成实验任务。一般来讲，要完成好一个实验要经历以下 3 个阶段。

（1）实验前的预习准备：实验前一定要认真阅读实验教材，做好预习，只有这样才能保质、保量、按时完成实验。预习的同时也培养提高了同学的阅读能力。在预习时要以实验目的为中心，搞清楚实验原理（包括测量公式）、操作要点、数据处理及其分析方法等；要反复思考如何通过实验原理、仪器装置及操作、数据处理等方面来达到实验目的，抓住实验的关键环节。做实验时要始终明确目的，在理论指导下进行，盲目进行的实验是不可能达到预期效果的。预习要经过精心构思，写出简明的预习报告，内容包括：实验目的、原理摘要、关键步骤、数据记录表格等等。

（2）实验中的实际操作：内容包括仪器的安装与调整，观察实验现象与选择测试条件，读数与数据记录，计算与分析实验结果，以及误差估算等。

进入实验室，要遵守实验室规则。在实验过程中对观察到的现象和测得数据要及时进行判断，判断它们是否正常与合理。实验过程中可能会出现故障，在教师的指导下，分析故障原因，学会排除故障的本领。实验完毕，做好仪器设备的整理工作。

在实验过程中应在教师指导下，充分发挥学生的主观能动性，积极利用实验课的机会获取感性知识。必须严肃认真地观察现象，记录数据。读数一定要适时、准确，记录一定要清楚、规范（要自己看得懂，别人看得懂，现在看得懂，将来看得懂），实验数据应用钢笔记录（不用铅笔），文字、数码、符号要求写清楚，不能让别人或自己以后辨认时引起误解。数据如确有理由需要删改，应该在原数据处作一删除记号。在旁边写出更改的数据，并应注明更改理由，最忌在原数据上涂改。在实验过程中观察到的现象，出现的故障及排除情况都要随手记录下来。同时还应注意每个仪器的规格、性能、编号和全套实验装置中各种仪器的配备情况，以及环境条件，并将其记录下来，以便以后需要时可以用来重复测量和利用仪器的准确度校核实验结果的误差。

在整个实验过程中还要运用所学的知识积极思考如何进行合理地、精确地测量和对现象作初步的分析，并训练正确和熟练操作仪器的能力。要爱护每一件仪器。遵守操作规程，并养成细致谨慎的工作习惯。在没有搞清仪器的操作方法和注意事项前，绝不可乱动，以免造成不必要的损失。

（3）实验后的实验报告：编写实验报告，这是完成整个实验过程的最后工序，也是对实验进行全面分析总结。报告要求用简明的形式将实验完整而又准确地表达出来。应养成实验完成后尽早写出报告的习惯，这样可达到事半功倍的效果。完整的实验报告应包括下述几部分内容：

1）实验题目：实验的名称。

2）实验目的：说明本实验的目的。

3）实验器材：全部仪器和用具，主要仪器还应注明型号、规格、精度（或分度值）、编号等。记录仪器编号是一个很好的工作习惯，便于以后对实验进行复查。记录仪器规格可以使同学们逐步熟悉仪器，以培养选用仪器的能力。

4）实验原理：在理解的基础上，用简短的文字扼要地阐述实验原理，切忌整篇照抄，力求做到图文并茂，用图表示原理图、电路图或者光路图（若讲义与实际不符，应取实际采用的）。写出实验所用的主要公式，说明式中各物理量的意义和单位，以及公式适用条件（或实验必要条件）。

5）实验记录：包括实验过程和数据两部分。过程：实验内容和观测现象记录。数据：数据记录应做到整洁、清晰且有条理，便于计算与复核，达到省工省时的目的。要尽量以表格形式列出，并在标题栏内明确表示出有效数字和单位。数据不得任意涂改。确是测错而无用的数据，可在旁边注明“作废”字样，不要任意删去。

6）数据处理：根据要求计算出最后的测量结果，可采用列表和作图法对所得数据进行误差分析。计算时先将文字公式化简，再代入数值进行运算。误差计算要预先写出误差公式。

7）实验结果：要按标准形式写出实验结果，结果应包括测量值、误差和单位等。在必要时，还要注明得出该结果的实验条件。如实验是为了观察某一物理现象或某一物理规律，可以扼要地写出实验结论。

8）讨论分析：对实验结果进行分析讨论，对实验中出现的问题进行说明，描述实验中观察到的异常现象及可能的解释。分析实验误差的主要来源，写出实验心得或建议等。完成教师指定的作业题。

以上是对报告的一般性要求，不同实验可以根据情况有所侧重和取舍，不必千篇一律。

实验报告是实验工作的总结，是经过实验操作、观察测量和数据分析后得到的永久性科学记录。实验报告可供他人借鉴，促进学术交流。因此，编写实验报告要求做到书写清晰、字迹端正、数据记录整洁、图表合适、文理通顺、内容简明扼要。编写实验报告有助于锻炼逻辑思维能力，把自己在实验中的思维活动变成文字记录，发表自己对本次实验结果的评价和收获。

综上所述，通过实验课的教学，可使学生的智能得到全面的训练和提高。为此，在有限的时间内，教师应注意在实验的讲解、内容安排和要求上要科学合理，系统协调。如测量训练性实验、验证性实验、综合性实验及研究设计性实验等各类实验的合理安排，注意各类实验的特点及内在联系；各类实验的方法、技巧的训练应由易到难、循序渐进。在规范、严格要求的前提下，也要有意识地进行强化训练。随着实验课的深入进行，逐步培养学生自觉、独立地完成实验的能力，由封闭式“黑匣子”实验室，向开放型、研究型实验室过渡，培养出新世纪的“四有”人才。

二、测量与误差

在医用物理实验中，测量是非常重要的环节，实验中有大量的测量工作要进行。测量包括两个部分，一是要对众多物理量进行检测；二是对所测量的数据进行处理。在实

验前，必须对所观测的对象进行分析研究，以确定实验方法和选择具有适当精度的测量仪器。在实验后，对测得的数据加以整理、归纳，用一定的方式（列表或图解）表示出它们之间的相互关系，并对实验结果给予合理的解释，作出正确判断。

以上这些过程都与误差理论密切相关。例如，计算中取几位有效数字，作图时选多大的比例值等。若处理数据不当，将会影响整个测量结果的准确度。因此不能随心所欲，要有一套科学的方法。否则，实验中再精细的测量都是徒劳的。

1. 测量的分类　医用物理实验离不开测量，在一定条件下，任何物理量都具有某一客观真实的数据。所谓测量，就是以测量出某一物理量值为目的的一系列有意识的科学实践活动。

按测量方法的不同，测量可分为直接测量和间接测量；按测量条件的不同，测量又分为等精度测量和不等精度测量。

（1）直接测量和间接测量：

1）直接测量：是把一个量与同类量直接进行比较以确定待测量的量值。一般基本量的测量都属于此类，如用米尺测量物体的长度，用天平称铜块的质量，用秒表测量时间等。像这样可用仪表上所标明的刻度或从显示装置上直接读取的值，都是直接测量的量值。

2）间接测量：在物理实验中，能够直接测量的量毕竟是少数，大多数物理量都不可能用仪表直接测量，而是由直接测量所得数据，根据一定的公式，通过运算，得出所需要的结果。这一类测量称为间接测量，相应的物理量称为间接测得量。例如，测球体的密度，可先测出球的直径 d 和质量 m，再利用密度公式 $\rho=m/V=6m/(\pi d^3)$ 算出其密度。直接测出单摆的长度 l 和单摆的周期 T，应用公式 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$，以求重力加速度 g，这些测量就称为间接测量。

（2）等精度测量和不等精度测量：对某一量 N 进行多次测量，得 k 个数值：N_1，N_2，N_3，$\cdots N_k$，如果每次测量都是在相同的条件下进行的，则没有理由认为所得的 k 个值中，某一个值比另一个值要测得准确些。在这种情况下，所进行的一系列测量称为等精度测量。所谓相同条件的含义，是指同一个人，用同一台仪器，每次测量的周围条件都相同（如测量时环境、气温、照明情况等未变动）。这种情况就可认为各测量值的精确程度是相同的。

对某一量 N，进行了 k 次测量，得到 k 个值：N_1，N_2，N_3，$\cdots N_k$，如果每次测量的条件不同，那么这些值的精确程度不能认为是相同的。在这种情况下，所进行的一系列测量叫做不等精度测量。例如，同一实验者用精度不同的 3 种天平称量某一物体质量 m，得到 3 个值 m_1、m_2、m_3，或者用 3 种不同的方法测量某一物质的密度 ρ，得 3 个值 ρ_1、ρ_2、ρ_3，这都是不等精度测量。

2. 误差及其分类　任何仪器都与用来测量长度的米尺一样，无论多么精密，总有一个最小刻度线。对于不同观察者，由于主观能力的差异，常常将最小刻度线之间的量值读成不同的读数。另外，仪器的刻度线也不可能绝对准确，外界环境也可能使之发生变化，这些原因，都会对测量产生影响，使得任何测量都不可能绝对地测出物理量的真实值。测得值与真实值之间的差异称为误差，因而在任何测量中，测量结果 N 与待测量客观存在的真值 N' 之间总存在着一定的差异。测量值 N 与真值 N' 的差值叫做测量

误差 ΔN，简称误差。

$$\Delta N = N - N' \tag{0-1}$$

在任何测量中误差都是不可避免的，所以，完整的测量结果应该包括测量值和误差两部分。真值是理想的概念，一般说来是不可能确切知道的。既然测量不能得到真值，那么怎样才能使测量值尽量接近真值，最大限度地减小测量误差，并估算出误差的范围呢？为此，首先要了解误差产生的原因及其性质。误差主要来源于：仪器误差、环境误差、人员误差、方法误差。为了便于分析，根据误差的性质把它们归纳为系统误差、随机误差和过失误差三大类。

（1）系统误差的特征：误差具有一定的确定性，测量值总是偏向真值的一侧。即在同一条件下，多次测量同一值时，绝对值和符号保持不变；或在条件改变时，按一定规律变化的误差。系统误差在某些情况下对测量结果的影响还比较大，因此研究系统误差产生的原因，发现、减小或消除系统误差，使测量结果更加趋于正确和可靠，是误差理论的重要课题之一，是数据处理中的一个重要的内容。

1）系统误差产生的原因：系统误差是由固定不变的或按确定规律变化的因素所造成的，这些误差规律一般是可以掌握的。主要由以下因素造成：①测量装置方面的因素。由于仪器设计制造方面的缺陷（例如尺子刻度偏大、表盘刻度不均匀等），仪器安装、调整不当等因素产生的误差。②测量方法方面的因素。测量所依据的理论和公式的近似性引起的误差，例如单摆实验中所用的测重力加速度公式 $g=4\pi^2\frac{l}{T^2}$ 就是近似公式；测量条件或测量方法不能满足理论公式所要求的条件等引起的误差，例如在实验中一般忽略了摩擦、散热、电表的内阻等引起的误差都属于这一类。③环境方面的因素。测量时实际温度与所要求的温度有偏差，测量过程中温度、湿度、气压等按一定规律变化的因素引起的误差。④测量人员方面的因素。由于测量者本身的生理特点或固有习惯所引起的误差，例如某些人在进行动态测量记录某一信号时有滞后的倾向等。

2）系统误差的减小和消除：在实际测量中，如果判断出有系统误差存在，就必须进一步分析可能产生系统误差的因素，想方设法减小和消除系统误差。由于测量方法、测量对象、测量环境及测量人员不尽相同，因而没有一个普遍适用的方法来减小或消除系统误差。下面简单介绍几种减小和消除系统误差的方法和途径。①从产生系统误差的根源上消除。从产生系统误差的根源上消除误差是最根本的方法，通过对实验过程中的各个环节进行认真仔细分析，发现产生系统误差的各种因素。可以从下面几个方面采取措施从根源上消除或减小误差：采用近似性较好又比较切合实际的理论公式，尽可能满足理论公式所要求的实验条件；选用能满足测量误差所要求的实验仪器装置，严格保证仪器设备所要求的测量条件；采用多人合作，重复实验的方法。②引入修正项消除系统误差。通过预先对仪器设备将要产生的系统误差进行分析计算，找出误差规律，从而找出修正公式或修正值，对测量结果进行修正。③采用能消除系统误差的方法进行测量。对于某种固定的或有规律变化的系统误差，可以采用交换法、抵消法、补偿法、对称测量法、半周期偶数次测量法等特殊方法进行清除。采用什么方法要根据具体的实验情况及实验者的经验来决定。

无论采用哪种方法都不可能完全将系统误差消除，只要将系统误差减小到测量误差

允许的范围内，或者系统误差对测量结果的影响小到可以忽略不计，就可以认为系统误差已被消除。

（2）随机误差（又称偶然误差）：此误差是由于感官灵敏度和仪器精密程度的限制，周围环境的干扰以及伴随着测量而来的不可预料的随机因素的影响而造成的。它的特点是大小无定值，即测得值总是时大时小，并不固定偏向一方，一切都是随机发生的，具有一定的偶然性。因而把它叫做随机误差。这种误差虽无法控制消除，但它的出现服从统计规律。所以，通过多次测量求平均值的方法，还是可以使随机误差相互抵消。因为多次测量，所得到的算术平均值，会比任何一次单独测量更可靠、更接近真实值。所以在实践中常用测量的算术平均值作为测量的结果。

随机误差用误差范围来表示，它可由误差理论估算出来，其表示方法有标准误差、平均误差和极限误差等。它们的区别仅在于概率大小的不同。对于初学者来说，首先需要的是建立误差概念以及学会用对实验结果进行评价的简单误差来进行误差估算。有些函数袖珍计算器有标准误差的计算程序，可以直接进行标准误差的计算，具体的用法可参阅计算器的使用说明书。

（3）过失误差：在测量中还可能出现错误，如读数错误、记录错误、操作错误、计算错误等而造成的误差为过失误差（错误误差）。这些已不属于正常的测量工作范畴，应当尽量避免。克服错误的方法，除端正工作态度、操作方法无误外，可用与另一次测量结果相比较的办法发现并纠正。

3. 误差的表示形式　误差有绝对误差和相对误差两种表示形式。绝对误差用“$\pm\Delta N$”表示测量结果 N 与真值 N'间的相差范围，正负号“±”表示 N 可能比 N'大或小。通过测量结果 N 和绝对误差 ΔN 可以看出真值所在的可能范围为 $N-\Delta N\leqslant N'\leqslant N+\Delta N$，也可简单表示为：

$$N'=N\pm\Delta N \tag{0-2}$$

评价一个测量的优劣，只用绝对误差并不全面。如测量人体重时，误差几克并不重要。但测量某些药物时，几克误差就可能人命关天。因此仅根据绝对误差的大小是难以评价一个测量结果好坏的，还需要看测定值本身的大小，为此引入相对误差的概念。

相对误差
$$\mathrm{E}=\frac{\Delta N}{N'}=\frac{\Delta N}{N'}\times 100\% \tag{0-3}$$

E 表示绝对误差在所测物理量中所占的比重，一般用百分比表示。

例如，测量某一长度为 1 000m，而绝对误差为 1m，测另一长度为 100cm，而绝对误差为 1cm，后者的相对误差为 1%，而前者为 0.1%，所以我们认为前者较后者更可靠。

由于误差的存在，任何测量值 N 都只能是在一定程度上近似表示真值 N'的大小，而误差范围大致说明这种近似程度。完整的测量结果，不仅要说明所得数值 N 及其单位，还必须说明相应的误差，用以下的标准形式表示：

$$N'=(N\pm\Delta N)\quad（单位） \tag{0-4}$$

$$E=\frac{\Delta N}{N'}\times 100\% \tag{0-5}$$

不标明误差的测量结果，在科学上是没有价值的。

如果待测量有理论值或公认值，也可用百分差来表示测量的好坏。即

百分差 $$E_O=\frac{\text{测量值 }N-\text{公认值 }N''}{\text{公认值 }N''}\times 100\% \qquad (0\text{-}6)$$

绝对误差、相对误差和百分差通常只取 1～2 位数字来表示。

三、误差的估算方法

1. 单次直接测量的误差估计　在许多情况下，由于条件限制（如，一瞬即逝的现象），或对测量精密度的要求不高，多次测量也无必要时，可用一次测量值作为测量结果的最佳值，测定值的误差，应根据仪器精度（最小刻度和仪器误差）、测量方法、实验条件以及实验者的感觉能力、技术水平等实际情况，进行合理估计。一般情况下，可用仪器误差 $\Delta_{仪}$（仪器出厂时的检定）作为测量的绝对误差。

2. 多次测量平均值的误差　由于测量时存在着随机误差，即使测量条件完全相同，在多次测量中的每一次测量结果仍会有所差异。为减小随机误差的影响，在可能情况下，总是采用多次测量，将各次测量值的算术平均值作为测量的结果。因为随机误差服从统计规律，在测量条件相同的情况下，随着测量次数的增多，测量值的算术平均值趋近于真值。因此有时也将多次测量的算术平均值称为“最佳值”或“近真值”。

若对物理量 N'进行的 n 次测量，每次测量值分别为：N_1，N_2，…，N_n。其算术平均值为：

$$\overline{N}=\frac{1}{n}(N_1+N_2+\cdots+N_n) \qquad (0\text{-}7)$$

每一次测量值与算术平均值的差值为

$$N_1-\overline{N}=v_1,\ N_2-\overline{N}=v_2,\ \cdots,\ N_n-\overline{N}=v_n$$

在物理实验中，通常采用算术平均误差作为绝对误差范围。即：

$$\Delta N=\frac{1}{n}(|v_1|+|v_2|+|v_3|+\cdots+|v_n|) \qquad (0\text{-}8)$$

求出绝对误差后，相对误差容易求出，即：

$$E=\frac{\Delta N}{\overline{N}}\times 100\% \qquad (0\text{-}9)$$

当多次测量所求得的误差小于仪器误差时，为了谨慎起见，常取仪器误差作为测量结果的误差。

多次测量的随机误差也可用标准误差来估算，即对于 n 次测量中某一次测量值的标准误差（偏差）。

$$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(N_i-\overline{N})^2} \qquad (0\text{-}10)$$

式中，N_i 为第 i 次测量值；$\overline{N}$ 为有限次测量的算术平均值。

它所表示的物理意义是，如果多次测量的随机误差遵从正态分布，那么任意一次测量，测量值误差落在 $-\sigma$ 到 $+\sigma$ 之间的可能性为 68.3%；或者说，对某一次测量结果，真值在 $-\sigma$ 到 $+\sigma$ 区间内的概率为 68.3%。

n 次测量结果的平均值 $\overline{N}$ 的标准误差（偏差）为

$$S_{\overline{N}}=\frac{S}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(N_i-\overline{N})^2} \tag{0-11}$$

上式的物理意义是，在多次测量的随机误差遵从正态分布的条件下，对多次测量结果，真值在 $\overline{N}\pm\sigma_{\overline{N}}$ 区间内的概率为 68.3%。

同时，误差理论计算表明，在进行多次测量时，任意一次测量的误差落在 -3σ 到 $+3\sigma$ 之间的概率为 99.7%。也就是说，在通常的有限次测量中，测量值误差超过 $+3\sigma$ 范围的情况几乎不会出现，所以把 3σ 叫做极限误差。与上述相对应最大绝对误差为：

$$\Delta N=k\sigma_{\overline{N}} \qquad (\text{当 } 5<n<10 \text{ 取 } k=4\text{；当 } n\geqslant 10 \text{ 取 } k=3)$$

采用标准差计算时，测量次数 n 不宜过少，以 $n\geqslant 10$ 为宜。

如果只进行几次或单次测量，则标准差为

$$S=\frac{\Delta_{\text{仪}}}{\sqrt{3}} \tag{0-12}$$

3. 间接测量误差的估算　间接测量是通过计算得来的。既然公式中所包含的直接测得量是有误差的，显然由直接测量值经过运算而得到的间接测量值也有误差。估算间接测量误差的方法叫做误差传递。

下面介绍几种常用的定理，可用它们来计算结果的绝对误差和相对误差。

（1）和与差的绝对误差和相对误差　若两个测得量 $A=A\pm\Delta A$，$B=B\pm\Delta B$，它们的和 $N=A+B$，则

$$N\pm\Delta N=A\pm\Delta A+(B\pm\Delta B)$$

因 $$N=A+B$$

故 $$\Delta N=\pm\Delta A\pm\Delta B$$

因 A 和 B 是独立的两个量，ΔA 与 ΔB 又可正可负，可能出现的最大误差是 ΔA 与 ΔB 取同号，即

$$\Delta N=|\Delta A|+|\Delta B|$$

我们规定最大误差为二量和的误差。

对于二量差的绝对误差，与前述讨论相似

因 $$N=A-B$$

故 $$N\pm\Delta N=A\pm\Delta A-(B\pm\Delta B)$$

最大可能误差同样是 $\Delta N=\Delta A+\Delta B$

于是和与差的相对误差可表示如下：

二量之和 $$E=\frac{\Delta N}{N}=\frac{\Delta A+\Delta B}{A+B}$$

二量之差 $$E=\frac{\Delta N}{N}=\frac{\Delta A+\Delta B}{A-B}$$

前面的证明虽是同两个量推演而来的，对于多个量可在此基础上推广。

（2）积的绝对误差和相对误差

若 $$N=A\times B$$

则 $$\begin{aligned}N\pm\Delta N&=(A\pm\Delta A)\times(B\pm\Delta B)\\&=A\times B\pm A\times\Delta B\pm B\times\Delta A\pm\Delta A\times\Delta B\end{aligned}$$

因 $N=A\times B$，又 $\Delta A\times\Delta B$ 较其他项小得多，故可忽略不计

$$\Delta N=A(\pm\Delta B)+B(\pm\Delta A)$$

最大误差 $$\Delta N=A\times\Delta B+B\times\Delta A$$

则相对误差 $$E=\frac{\Delta N}{N}=\frac{A\times\Delta B+B\times\Delta A}{A\times B}=\frac{\Delta A}{A}+\frac{\Delta B}{B}$$

对于上述两量之积的绝对误差和相对误差的结论仍可推广到多个测得值的情况，另外，对于商和其他函数形式的误差计算，在此不一一推导，其结果见（表 0-1）。

表 0-1　常用误差计算公式

运算关系 $N=f(A,B,C,\cdots)$	绝对误差 ΔN	相对误差 $E=\frac{\Delta N}{N}$
$N=A+B+C+\cdots$	$\pm(\Delta A+\Delta B+\Delta C+\cdots)$	$\frac{\Delta A+\Delta B+\Delta C+\cdots}{\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\cdots}$
$N=A-B$	$\pm(\Delta A+\Delta B)$	$\frac{\Delta A+\Delta B}{\overline{A}-\overline{B}}$
$N=A\times B$	$\pm(\overline{A}\times\Delta B+\overline{B}\times\Delta A)$	$\frac{\Delta A}{\overline{A}}+\frac{\Delta B}{\overline{B}}$
$N=A\times B\times C$	$\pm(\overline{B}\,\overline{C}\times\Delta A+\overline{A}\,\overline{C}\times\Delta B+\overline{B}\,\overline{A}\times\Delta C)$	$\frac{\Delta A}{\overline{A}}+\frac{\Delta B}{\overline{B}}+\frac{\Delta C}{\overline{C}}$
$N=A^n$	$\pm n\overline{A}^{n-1}\Delta A$	$n\frac{\Delta A}{\overline{A}}$
$N=\frac{A}{B}$	$\pm\frac{\overline{B}\Delta A+\overline{A}\Delta B}{\overline{B}^2}$	$\frac{\Delta A}{\overline{A}}+\frac{\Delta B}{\overline{B}}$
$N=\sin A$	$\pm\cos\overline{A}\times\Delta A$	$ctg\overline{A}\times\Delta A$
$N=\cos A$	$\pm\sin\overline{A}\times\Delta A$	$tg\overline{A}\times\Delta A$
$N=tgA$	$\pm\frac{\Delta A}{\cos^2\overline{A}}$	$\frac{2\Delta A}{\sin 2\overline{A}}$
$N=ctgA$	$\pm\frac{\Delta A}{\sin^2\overline{A}}$	$\frac{2\Delta A}{\sin 2\overline{A}}$
$N=aA$	$\pm a\Delta A$	$\frac{\Delta A}{\overline{A}}$

误差传递公式不仅可以用来计算间接测量值 N 的误差，而且还可以用来分析各直接测量值的误差对最后结果影响的大小。对于那些影响大的直接测量值，预先考虑采取措施，以减小它们的影响，从而为合理选用仪器和实验方法提供依据。

四、有效数字及运算方法

1. 有效数字的概念　一般来说，实验所遇到的数值分为两种：一种是没有误差的准确值（如测量的次数，公式中的纯数等）；另一种是测量值，由于它总含有一定的误差，因此它的数据就不应无止境地写下去。例如，测量值 $\rho=(2.49423\pm0.002)\mathrm{g\cdot cm^{-3}}$，由误差理论可知其第三位小数可能是 2 到 6 之间的数字，因此第三位小数“4”已是不可靠的，那么在它以下的数字也就没有表示出来的必要。所以上述实验结果应写成 $\rho=(2.494\pm0.002)\mathrm{g\cdot cm^{-3}}$，其中“2”、“4”和“9”是可靠数字，最后一位“4”是可疑

数字。一般规定，数值中的可靠数字与所保留的1位可疑数字，统称为有效数字。

除此之外，用有效数字表示的测量结果，还可以反映测量的准确度。如用米尺测得一物体的长度为 $L=(36.5\pm0.2)\text{mm}$，最后1位数“5”是估读出来的，是可疑数字，测量值 L 为3位有效数字。如果同样这个物体用游标尺测量其长度，得 $L=(36.50\pm0.02)\text{mm}$，是4位有效数字，显然测量准确度要高于米尺。

在实验中物理量的测量值和一般数学上的算术值有着不同的含义；在数学上 $46.3=46.30$，但对测量值来讲，$46.3\neq46.30$，因为两者之间有着不同的误差，其测量的准确度不同。46.3mm为3位有效数字，而46.30mm为4位有效数字。在记录实验数据的时候，切记有效数字的位数是从第一个不为零的数字算起的，当然并不是说零不算有效数字。例如，10.30中的2个零，虽然其中一个处在中间，一个处在末尾，但因它们都反映了被测量物的大小，故都属于有效数字。

对于十进制单位变换，只涉及小数点位置改变，而不允许改变有效位数。例如2.3m为两位有效数字，在换算成km或mm作单位时应写为

$$2.3\text{m}=2.3\times10^{-3}\text{km}=2.3\times10^{3}\text{mm}$$

而 $2.3\text{m}=2\,300\text{mm}$ 的写法是错误的。

绝对误差决定有效数字。实验结果的最后1位数字一定要与绝对误差对齐，绝对误差最多写2位，相对误差也是如此。

2. 有效数字的运算　间接测量值是由直接测量值经过运算得到的，为获得最终实验结果，往往需要对测量所得的数据进行运算。在数据运算中，要先保证测量的准确程度，其次，尽量减少运算时间，避免浪费精力。运算时结果要保留恰当的有效数字，少算会给结果带来附加误差，降低其精确程度；多算也是毫无意义，并非算得位数越多，误差越小。下面将分别介绍有效数字的运算规则。

(1) 加减运算：几个数相加减时，最后结果的可疑数字与各数值中最先出现的可疑数字对齐。下面例题运算过程中数字有下画线的是可疑数字。

例1　已知 $Y=A+B-C$，式中 $A=(103.3\pm0.5)\text{cm}$，$B=(13.561\pm0.012)\text{cm}$，$C=(1.652\pm0.005)\text{cm}$，试问计算结果应保留几位数字？

解：先观察一下具体的运算过程：

$$\begin{array}{r} 103.\underline{3} \\ +\ \ 13.56\underline{1} \\ \hline 116.\underline{861} \end{array} \xrightarrow{\text{可简化为}} \begin{array}{r} 103.\underline{3} \\ +\ \ 13.\underline{6} \\ \hline 116.\underline{9} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 116.\underline{9} \\ -\ \ 1.65\underline{2} \\ \hline 115.\underline{248} \end{array} \xrightarrow{\text{可简化为}} \begin{array}{r} 116.\underline{9} \\ -\ \ 1.\underline{7} \\ \hline 115.\underline{2} \end{array}$$

一个数字与一个可疑数字相加或是相减，其结果必然是可疑数字。本例各数值中最先出现可疑数字的位置在小数点后第一位（即 $103.\underline{3}$），按照运算结果保留一位可疑数字的原则，上例的简算方法为

$$Y=103.3+13.6-1.7=115.2(\text{cm})$$

结果表示为

$$Y=(115.2\pm0.5)\text{cm},\qquad \frac{\Delta Y}{Y}=0.44\%$$

(2) 乘除运算：几个数相乘除，计算结果的有效数字位数与各数值中有效数字位数

最少的一个相同（或最多再多保留一位）。

例 2　$1.111\underline{1}\times1.1\underline{1}=$？试问计算结果应保留几位数字？

解：用计算器计算可得 $1.111\underline{1}\times1.1\underline{1}=1.233321$，但是，此结果究竟应取几位数字才合理。我们来看一下具体的运算过程便一目了然。见运算式，因为一个数字与一个可疑数字相乘，其结果必然是可疑数字，所以，由上面的运算过程可见，小数点后面第二位的“3”及其以后的数字都是可疑数字。按照保留 1 位可疑数字的原则，计算结果应写成 1.23，为 3 位有效数字。这与上面叙述的加减简算法则是一致的，即在此例中，4 位有效数字与 3 位有效数字相乘，计算结果为 3 位有效数字。

$$
\begin{array}{r}
1.111\underline{1} \\
\times\quad 1.1\underline{1} \\
\hline
\underline{11111} \\
1111\underline{1} \\
1111\underline{1} \\
\hline
1.2\underline{33321}
\end{array}
$$

除法是乘法的逆运算，这里不再详细论述。

在进行乘除运算时，误差传递公式为

$$\frac{\Delta N}{N}=\frac{\Delta A}{A}+\frac{\Delta B}{B}$$

可见计算结果的相对误差比算式中最大的一个相对误差（$\Delta A/A$ 或 $\Delta B/B$）还要大。相对误差越大，有效数字位数越少。对于一个间接测量值，如果它是由几个直接测量值相乘而计算得到的，那么，在进行测量时应考虑各个直接测量值的有效数字位数基本相仿，或者说，它们的相对误差要比较接近。如果相差悬殊，那么精度过高的测量就失去意义。

例 3　在长度测量实验中，用米尺、游标卡尺和螺旋测微器分别测量一个长方体的三个边长为 $A=(13.79\pm0.02)\mathrm{cm}$，$B=(3.635\pm0.005)\mathrm{cm}$，$C=(0.4915\pm0.0005)\mathrm{cm}$，试计算长方体体积 V。

解：根据简算方法，长方体体积为

$$V=A\cdot B\cdot C=13.79\times3.635\times0.4915=24.64(\mathrm{cm}^3)$$

由误差传递公式算得相对误差

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta V}{V}&=\frac{\Delta A}{A}+\frac{\Delta B}{B}+\frac{\Delta C}{C}\\
&=\frac{0.02}{14}+\frac{0.005}{3.6}+\frac{0.0005}{0.5}\\
&=0.14\%+0.14\%+0.10\%\\
&=0.38\%
\end{aligned}
$$

和绝对误差

$$\Delta V=25\times0.38\%=0.1(\mathrm{cm}^3)$$

结果用标准形式表示，长方体体积

$$V=(24.6\pm0.1)(\mathrm{cm}^3),\qquad \frac{\Delta V}{V}=0.4\%$$

从上例可见，用简算方法与利用误差传递公式计算得到的测量结果表示是一致的。实验中测量三个边长分别采用不同精度的量具，其目的是为了使三个边测量值有相同的有效数字位数，相对误差很接近。

（3）乘方运算：乘方运算的有效数字位数与其底数相同。

（4）对数、三角函数和 n 次方运算：它们的计算结果必须按照误差传递公式来决定