

经典电动力学

下 册

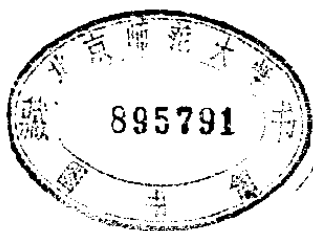
〔美〕 J.D. 杰克逊 著
朱 培 豫 译

人民教育出版社

经典电动力学

下 册

[美] J. D. 杰克逊 著
朱 培 豫 译



人民教育出版社

内 容 提 要

本书是根据美国 John Wiley & Sons 图书公司 1976 年出版的 J. D. 杰克逊 (Jackson) 著《经典电动力学》(Classical Electrodynamics) 1975 年第二版译出的。译本分上、下两册出版。下册除第十章阐述磁流体动力学和等离子体物理学外,主要内容是相对论性带电粒子电动力学,包括狭义相对论、带电粒子间的碰撞、加速运动点电荷的辐射、多极场、辐射反作用等。下册第十、十三、十四、十六这四章曾由戴勉根据原书第一版译出,后经上海铁道学院朱培豫按原书第二版进行修改,并补译了原书第二版增订的部分。其余各章和附录均由朱培豫译出。译稿经河北大学汪镇藩校订。

本书可供综合大学和理工科大学物理系高年级学生、研究生和教师以及有关的科学研究工作者参考。

本书责任编辑:汤发宇。

经典电动力学

下 册

〔美〕J. D. 杰克逊 著

朱 培 豫 译

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷二厂印刷

北京通县满庄装订厂装订

*

开本 787×1092 1/32 印张 14 字数 337,000

1980 年 5 月第 1 版 1982 年 5 月第 2 次印刷

印数 9,501—14,000

书号 13012-0463 定价 1.15 元

下 册 目 录

第十章 磁流体动力学和等离子体物理学	1
10.1 引言和定义	1
10.2 磁流体动力学方程	3
10.3 磁扩散, 磁粘滞性和磁压强	5
10.4 具有交叉电场和磁场的界面中间的磁流体动力学流动	8
10.5 箍缩效应	13
10.6 箍缩等离子体柱的不稳定性	16
10.7 磁流体动力波	19
10.8 等离子体振荡	25
10.9 等离子体振荡的短波长限和德拜屏蔽距离	30
参考书和推荐读物	34
习题	35
第十一章 狭义相对论	40
11.1 1900年以前的情况; 爱因斯坦的两条假设	41
11.2 一些近代的实验	45
11.3 洛伦兹变换和狭义相对论的基本的运动学结果	55
11.4 速度的加法; 四元速度	64
11.5 粒子的相对论动量和能量	67
11.6 狭义相对论时空的数学性质	76
11.7 洛伦兹变换的矩阵表示; 无穷小生成元	81
11.8 托马斯进动	88
11.9 电荷的不变性; 电动力学的协变性	94
11.10 电磁场的变换	101
11.11 在均匀或慢变化外场中自旋的相对论性运动方程	105
11.12 关于相对论运动学中记号和单位的评注	111
参考书和推荐读物	112
习题	114

第十二章 相对论性粒子和电磁场的动力学	124
12.1 在外电磁场中一个相对论性带电粒子的拉格朗日函数和哈密顿函数	125
12.2 关于由库仑定律和狭义相对论得出磁场、磁力和麦克斯韦方程组的问题	132
12.3 在均匀静磁场中的运动	136
12.4 在均匀静电场和静磁场的并合场中的运动	137
12.5 在非均匀静磁场中粒子的漂移	140
12.6 穿过粒子轨道的磁通量的绝热式不变性	145
12.7 相互作用的带电粒子的拉格朗日函数的最低级相对论性修正, 达尔文-拉格朗日函数	150
12.8 电磁场的拉格朗日函数	153
12.9 普罗卡-拉格朗日函数; 光子质量效应	156
12.10 正则场强张量 and 对称场强张量; 守恒定律	160
12.11 协变形式波动方程解; 不变格林函数	169
参考书和推荐读物	173
习题	175
第十三章 带电粒子间的碰撞、能量损失和散射	181
13.1 在库仑碰撞中的能量转移	182
13.2 对谐振束缚电荷的能量转移	187
13.3 经典的和量子力学的能量损失公式	191
13.4 在碰撞能量损失中的密度效应	198
13.5 契伦柯夫辐射	205
13.6 电子等离子体中的能量损失	210
13.7 原子对快速粒子的弹性散射	212
13.8 多次散射的均方散射角和角分布	217
参考书和推荐读物	222
习题	222
第十四章 运动电荷的辐射	225
14.1 一个点电荷的李纳-维谢尔势和场	225
14.2 一个加速电荷的总辐射功率-拉莫尔公式及其相对论性推广	230

14.3	一个加速电荷的辐射角分布	234
14.4	一个作任意的极端相对论性运动的电荷的辐射	238
14.5	加速电荷的辐射能的频率分布和角分布	241
14.6	作瞬时圆周运动的相对论性带电粒子的辐射频谱	247
14.7	电磁波的汤姆孙散射	255
14.8	准自由电荷对辐射波的散射; 相干与不相干散射	259
14.9	渡越辐射	262
	参考书和推荐读物	272
	习题	274
第十五章	韧致辐射; 虚量子方法; 辐射性 β 过程	282
15.1	碰撞时所放出的辐射	283
15.2	库仑碰撞中的韧致辐射	290
15.3	屏蔽效应; 相对论性辐射能量损失	299
15.4	魏次扎克-威廉斯虚量子方法	303
15.5	作为虚量子散射的韧致辐射	309
15.6	β 衰变时的辐射	311
15.7	轨道电子俘获时的辐射—电荷和磁矩的消失	313
	参考书和推荐读物	319
	习题	320
第十六章	多极场	326
16.1	标量波动方程的基本球面波解	326
16.2	电磁场的多极展开	331
16.3	多极场的性质; 多极辐射的能量和角动量	335
16.4	多极辐射的角分布	342
16.5	多极辐射的源; 多极矩	345
16.6	原子系统和原子核系统的多极辐射	349
16.7	中央馈电细直天线的辐射	354
16.8	矢量平面波的球面波展开	359
16.9	球体对电磁波的散射	363
16.10	多极场的边值问题	370
	参考书和推荐读物	370
	习题	371

第十七章 辐射阻尼;粒子的自有场;束缚系统对辐射波的

散射和吸收.....374

17.1 引言.....374

17.2 根据能量守恒计算的辐射反作用力.....377

17.3 自力的阿伯拉罕-洛伦兹算法.....381

17.4 阿伯拉罕-洛伦兹模型的困难.....386

17.5 电磁能量和电磁动量的协变定义.....388

17.6 计及辐射阻尼的积分微分运动方程.....393

17.7 振子的谱线宽度与能级移动.....397

17.8 振子对辐射波的散射和吸收.....400

参考书和推荐读物.....406

习题.....406

附录: 单位和量纲.....410

1. 单位和量纲: 基本单位和导出单位.....410

2. 电磁单位和电磁方程.....412

3. 各种电磁单位制.....415

4. 高斯制单位与米·千克·秒·安制单位的方程和数值的 换算.....418

参考书目

有关特殊函数的主要题材索引

第十章 磁流体动力学和 等离子体物理学

10.1 引言和定义

磁流体动力学和等离子体物理学，都是研究由电磁场与导电液体或导电气体组成的联合系统的特性。当有自由电子或准自由电子能够在外场作用下运动时，就会发生电传导。在固态导体里，电子实际上是受到约束的，但从原子尺度来看，这些电子在发生碰撞之前，可以在晶体点阵中移动相当大的距离。如果给固态导体加上外场，就可以观察到诸如电传导和霍尔效应等动力学效应，但通常不发生媒质的整体运动。外场对原子本身的作用，体现为点阵结构中的胁强。相反地，对流体来说，当场作用在电子和电离原子上，都将产生动力学效应，包括媒质本身的整体运动。这种整体运动反过来又引起电磁场的改变。因此，我们必须处理物质与场的复杂的耦合系统。

磁流体动力学与等离子体物理学之间，没有鲜明的差别。虽然如此，仍然存在一些明显地可区分的范围，在这些范围中，要末只能应用磁流体动力学的观点和概念，要末只能应用等离子体物理学的观点和概念。认识这种区别的一种办法是去考察导电物质中 $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ 这个关系的建立方式。在裘特(Drude)的简单模型中，假想电子被外场加速，但由于碰撞而改变运动方向，以致电子在场方向上的运动受到有效摩擦力 $\nu m \mathbf{v}$ 的抵抗，这里 ν 是有效碰撞频率。欧姆定律正好表示外力与摩擦阻力间的平衡。当外场频率可以和 ν 相比拟时，电子在两次碰撞中间就来得及加速和减速，于是

出现了惯性效应,并使电导率变成复数。遗憾的是,在这样的频率下,用摩擦力描述碰撞势必变成无效,整个过程变得更加复杂。当外场频率远远高于碰撞频率时,又出现另一种情况,电子和离子受电场的作用沿相反方向加速,因而往往使得电子和离子分开,这种电荷分离又形成强的静电回复力,并发生电荷密度的振荡,这种振荡叫做等离子体振荡。应该把这种振荡和涉及流体运动但无电荷分离的低频振荡区别开来。这些低频振荡叫做磁流体动力波。

在导电液体或稠密的电离气体中,甚至对于非常优良的导体来说,碰撞频率都相当高,以致于简单形式的欧姆定律在很宽的频率范围内都是有效的。在外场的作用下,电子和离子按这样方式运动:即除了高频颤动外,并无电荷分离,电场是由流体运动(这种运动引起电流)所产生的,或者是由随时间变化的磁场或流体以外的电荷分布所产生的。所以,系统的力学运动可用一种具有平常的流体动力学变量(密度、速度和压强)的单导电流体来描述。在低频情况下,通常可以略去安培定律中的位移电流,这种近似就称为磁流体动力学。

在稀薄的电离气体中,碰撞频率较低。这时可能仍然有一个低频区域,在这个区域内磁流体动力学方程能够用于准稳过程。天体物理的应用往往属于这一范畴。但是在高频情况下,忽略电荷分离和位移电流是不许可的。在描述运动时,必须分别考虑电子和离子的惯性效应。这就是我们称之为等离子体物理学的范畴。这里有一个限制诸物理条件的范围,在这范围内电子和离子的双流体模型可以近似正确地描述各种现象。但是对于高温和低密度的情形,必须计入粒子速度在其平均值附近的有限扩展。这时必需用计及或不计及短程关联的玻耳兹曼方程来描述,我们不准备在此详细研究这些细节。当温度更高、密度更低时,静电回复力变得很弱,以致与所考虑体积的尺寸相比电荷分离的间隔要大得

多，这时流体模型所含的粒子集体特性已完全消失，剩下的只是些快速运动的带电粒子，这些粒子通过库仑碰撞而相互作用着。按定义，等离子体是一种电离气体，在这种气体中，与有关系统的特征长度相比，把小尺度的单个粒子特性同大尺度的集体特性区分开的长度要小得多，这个长度叫做德拜屏蔽半径，我们将在 10.9 节里讨论它。它的数值等于 $7.91(T/n)^{1/2}$ 厘米，其中 T 是绝对温度，以开氏温标表示， n 是每立方厘米的电子数，除了最热或最稀薄的等离子体外，德拜屏蔽半径一般都比 1 厘米小得多。

10.2 磁流体动力学方程

我们首先考虑电中性的导电流体在电磁场中的状态。为了简单起见，我们假定流体的磁导率为 1，并用物质密度 $\rho(\mathbf{x}, t)$ 、速度 $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ 、压强 $p(\mathbf{x}, t)$ (取作标量) 和实电导率 σ 来描述它。流体动力学方程是连续性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (10.1)$$

和力方程

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{c}(\mathbf{J} \times \mathbf{B}) + \mathbf{F}_v + \rho \mathbf{g} \quad (10.2)$$

上式中除了压强和磁力这两项外，还包括了粘滞力和万有引力，对不可压缩流体来说，粘滞力可以写成

$$\mathbf{F}_v = \eta \nabla^2 \mathbf{v} \quad (10.3)$$

式中 η 是粘滞系数，必须强调指出，式 (10.2) 左边中的速度对时间的导数是流导数，

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \quad (10.4)$$

它给出以瞬时速度 $\mathbf{v}$ 运动的一个量对时间的总变化率，

略去位移电流后，流体中的电磁场用下列方程描写：

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \end{aligned} \right\} \quad (10.5)$$

条件 $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ 与忽略位移电流相当，它可以从 (10.5) 中的第二个方程推得。在 (10.5) 中已略去两个散度方程，从法拉第定律可得 $(\partial/\partial t) \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ，而 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 这一要求又可当作初始条件。由于略去位移电流，库仑定律也就可以忽视了。原因是电场将由旋度方程和欧姆定律完全确定（见后）。如果在安培定律中保留位移电流，并考虑到 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho_e$ ，也只能得到 (v^2/c^2) 级的改正项，对于通常的磁流体动力学问题，这些改正完全可以忽略。

为了得到完整的动力学方程组，我们必须说明电流密度 $\mathbf{J}$ 和场 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$ 之间的关系。对电导率为 σ 的简单导电媒质来说，欧姆定律适用，其电流密度为

$$\mathbf{J}' = \sigma \mathbf{E}' \quad (10.6)$$

式中 $\mathbf{J}'$ 和 $\mathbf{E}'$ 是在相对于媒质静止的参照系中测定的值。对于以速度 $\mathbf{v}$ 相对于实验室运动的媒质来说，我们必须适当地变换电流密度和电场强度。场的非相对论性变换由方程 (6.10) 给出。同样，在实验室中电流密度是

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}' + \rho_e \mathbf{v} \quad (10.7)$$

式中 ρ_e 是电荷密度。对于单一成分的导电流体来说， $\rho_e = 0$ ，于是欧姆定律化为

$$\mathbf{J} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \quad (10.8)$$

有时可以假定流体的有效电导率是无穷大，那末在场 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 作用下，流体将以这样方式流动，即满足

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0 \quad (10.9)$$

方程(10.1)、(10.2)、(10.5)和(10.8)，再加上流体的状态方程，就构成磁流体动力学方程组，我们将在下节里研究这些方程的某些较简单内容，并将详细探讨所涉及的基本概念。

10.3 磁扩散，磁粘滞性和磁压强

流体在电磁场中的特性大半由电导率的大小决定，所有的效应既是电磁的，也是力学的。我们首先考虑电磁效应，我们将会看到，随着电导率的不同，电磁场的特性也很不同。在用(10.8)消去 $\mathbf{E}$ 之后，磁场对时间的依赖关系可以写成

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla^2 \mathbf{B} \quad (10.10)$$

这里假定 σ 在空间中是常数。对于静止流体，(10.10)简化成扩散方程

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla^2 \mathbf{B} \quad (10.11)$$

这意味着磁场的初位形将在扩散时间

$$\tau = \frac{4\pi\sigma L^2}{c^2} \quad (10.12)$$

内衰退，式中 L 是 $\mathbf{B}$ 的空间变化的特征长度。对于半径为 1 厘米的铜球来说，其扩散时间 τ 的数量级是 1 秒，对于地球的熔岩核心来说， τ 的数量级是 10^4 年，对于太阳中的典型磁场来说， τ 的数量级是 10^{10} 年。

在比扩散时间 τ 短得多的时间内(或换句话说，当电导率如此之大，以致(10.10)中第二项可以忽略不计)，磁场随时间的变化关系由下式给出：

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (10.13)$$

利用(6.5)及其附带的脚注可以看出，上式与这样的论述相当：即

通过任何以局部流体速度运动的回线的磁通量不随时间而改变。这时我们说磁力线冻结在流体内，并随流体一起移动。因为电导率实际上是无穷大，所以(10.9)式适用。我们可以把 $\mathbf{v}$ 的垂直于 $\mathbf{B}$ 的分量当作是磁力线的速度 $\mathbf{w}$ ：

$$\mathbf{w} = \frac{(\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{B}}{B^2} = c \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (10.14)$$

这种所谓的流体和力线的“ $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移”，可以根据在交叉的电场和磁场中电子与离子的单粒子轨道来理解(参看 12.4 节)。

磁雷诺数 R_M 是一个有用的参数，它用来区分力线相对于流体扩散的情况和力线冻结在流体内的情况。如果 V 是问题的特征速度， L 是相应的长度，那末磁雷诺数的定义是

$$R_M = \frac{V\tau}{L} \quad (10.15)$$

式中 τ 是扩散时间(10.12)。如果 $R_M \gg 1$ ，则力线随流体的移动比起扩散要占绝对优势。对于实验室里像水银和钠之类的液体来说， $R_M < 1$ ，除非该液体的速度极高。但是在地球物理和天体物理的应用中， R_M 可以比 1 大得多。

用力方程(10.2)就可以研究系统的力学性质。用(10.8)的 $\mathbf{J}$ 代入，我们得

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{\sigma B^2}{c^2} (\mathbf{v}_\perp - \mathbf{w}) \quad (10.16)$$

式中 $\mathbf{F}$ 是所有非电磁力的和， $\mathbf{v}_\perp$ 是垂直于 $\mathbf{B}$ 的速度分量。由(10.16)可以清楚地看出，平行于 $\mathbf{B}$ 的流动仅仅取决于非电磁力。另一方面，垂直于 $\mathbf{B}$ 的液流速度在大约

$$\tau' = \frac{\rho c^2}{\sigma B^2} \quad (10.17)$$

的时间内，从某一任意的初值衰减为

$$\mathbf{v}_\perp = \mathbf{w} + \frac{c^2}{\sigma B^2} \mathbf{F}_\perp \quad (10.18)$$

在电导率为无限大的极限情形下, 上述结果简化为 (10.14) 的结果, 正如所预期的一样. (10.16) 中与 B^2 成正比的项表示有效粘滞力或摩擦力, 它将阻止液体沿垂直于磁力线的方向流动. 有时称它为磁粘滞性. 如果普通的粘滞性 (在这里包括在 $\mathbf{F}$ 中) 和磁粘滞性可以相比, 那末衰减时间 τ' 显然就要缩短一个因子, 这因子包含两种粘滞性之比.

以上所述表明, 如果电导率很大, 磁力线就冻结在流体中, 并随着流体运动. 与这种运动状态有偏离的任何现象都迅速衰减掉. 在考虑力学效应时, 我们把电磁量当作给定的, 或者在考虑电磁效应时, 我们把力学量当作给定的, 但力方程和电磁方程当然是联立的. 在电导率非常大的极限情形下, 可以通过安培定律将力方程中的电流密度 $\mathbf{J}$ 和磁感应强度 $\mathbf{B}$ 联系起来, 并利用电导率为无限大时的式子 (10.9) 消去法拉第定律中的 $\mathbf{E}$, 而求得 (10.13), (10.2) 中表示磁力的项现在可以写成

$$\frac{1}{c}(\mathbf{J} \times \mathbf{B}) = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (10.19)$$

利用矢量恒等式

$$\frac{1}{2} \nabla (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (10.20)$$

可将方程 (10.19) 改写为

$$\frac{1}{c}(\mathbf{J} \times \mathbf{B}) = -\nabla \left(\frac{B^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (10.21)$$

这方程表明磁力相当于磁流体静压强

$$p_M = \frac{B^2}{8\pi} \quad (10.22)$$

再加上一项可认为是沿磁力线方向的附加张力. (10.21) 这个结果也可以由麦克斯韦协强张量导出 (参看 6.8 节).

如果我们略去粘滞效应, 并假定引力可以从势 ($\mathbf{g} = -\nabla\psi$) 求

得, 力方程(10.2)就化成下式:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla(p + p_M + \rho\psi) + \frac{1}{4\pi}(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} \quad (10.23)$$

在一些简单的几何情况下, 例如 $\mathbf{B}$ 只有一个分量时, 附加张力为零。这时, 流体的静力学性质用下式描述:

$$p + p_M + \rho\psi = \text{常量} \quad (10.24)$$

上式表明, 除去引力效应后, 力学压强的任何改变必然被磁压强的相反改变所平衡。假如将流体约束在某一区域内, 使得 p 在区域外迅速地降为零, 那末磁压强必定同样迅速地增长, 以便将流体约束在该区域内。这就是 10.5 节里要讨论的箍缩效应的原理。

10.4 具有交叉电场和磁场的界面中间的磁流体动力学流动

为了说明通过流体的力线冻结与力线扩散之间的竞争, 以及 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移与边界条件所导致的特性之间的竞争, 我们研究一个简单例子: 设有不可压缩的、粘滞的导电流体沿 x 方向在 $z=0$ 与 $z=a$ 的不导电界面中间流动, 如图 10.1 所示。两个界面分别以速度 V_1 和 V_2 沿 x 方向运动。沿 z 方向加有均匀磁场 B_0 。系统在

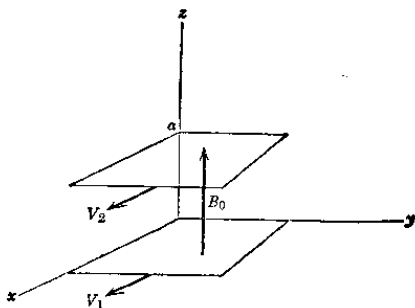


图 10.1 粘滞性导电流体在两个以不同速度运动的平面中间的磁场内的流动。

x 和 y 两方向上是无限的。我们将寻求沿 x 方向流动的稳态解，在 x 方向上，各个量只依赖于 z 。

如果场不随时间变化，那末由麦克斯韦方程组 (10.5) 得知，存在的任何电场必定是一个静电场，它可以由势导出，并由边界条件唯一地决定，也就是说，它是一个任意的外电场。当 σ 为无穷大时，力线速度的表式 (10.14) 表明：在 y 方向上存在电场。如果我们假定这是 $\mathbf{E}$ 的唯一分量，那末它必定是常量 E_0 。因为运动的流体将带着力线一起运动，所以我们预料磁感应强度除了 z 分量 B_0 外，还有 x 分量 $B_x(z)$ 。

对不可压缩流体来说，连续性方程 (10.1) 简化为 $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ 。在 x 方向上只依赖于 z 的速度同样满足该式。当重力忽略不计，力方程取下列稳态形式：

$$\nabla p = \frac{1}{c} (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{v} \quad (10.25)$$

$\mathbf{J}$ 的唯一不等于零的分量是 $J_y(z)$ ：

$$J_y(z) = \sigma \left[E_0 - \frac{1}{c} B_0 v(z) \right] \quad (10.26)$$

式中 v 是速度的 x 分量。写出 (10.25) 的三个分量方程，可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\sigma B_0}{c} \left(E_0 - \frac{B_0}{c} v \right) + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\frac{\sigma B_x}{c} \left(E_0 - \frac{B_0}{c} v \right) \end{aligned} \right\} \quad (10.27)$$

z 方向的磁力恰恰被压强梯度所平衡。如果我们假定在 x 方向上没有压强梯度，第一个方程就可以写成

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \left(\frac{M}{a} \right)^2 v = - \left(\frac{M}{a} \right)^2 \frac{c E_0}{B_0} \quad (10.28)$$

式中

$$M = \left(\frac{\sigma B_0^2 a^2}{\eta c^2} \right)^{1/2} \quad (10.29)$$

叫做哈脱曼(Hartmann)数。由(10.17)可知, M^2 是磁粘滞性与通常粘滞性之比。满足边界条件 $v(0) = V_1$ 和 $v(a) = V_2$ 的 (10.28) 的解很容易求出:

$$v(z) = \frac{V_1}{\sinh M} \sinh \left[M \left(\frac{a-z}{a} \right) \right] + \frac{V_2}{\sinh M} \sinh \left(\frac{Mz}{a} \right) + \frac{cE_0}{B_0} \left\{ 1 - \frac{\sinh \left[M \left(\frac{a-z}{a} \right) \right] + \sinh \left(\frac{Mz}{a} \right)}{\sinh M} \right\} \quad (10.30)$$

在 $B_0 \rightarrow 0$, $M \rightarrow 0$ 的极限情形下, 我们可以求得标准的片流解:

$$v(z) = V_1 + \frac{z}{a} (V_2 - V_1) \quad (10.31)$$

在 $M \gg 1$ 的另一种极限情况下, 我们预料磁粘滞性占主要地位, 并且流动几乎完全由 $E \times B$ 漂移决定。如果求 $v(z)$ 在 $z \ll a$ 和 $M \gg 1$ 时的近似解, 可得

$$v(z) \simeq \frac{cE_0}{B_0} + \left(V_1 - \frac{cE_0}{B_0} \right) e^{-Mz/a} \quad (10.32)$$

上式表明, 在 $z=0$ 平面处虽然恰恰有 $v(z) = V_1$, 可是在数量级为 (a/M) 的一段距离上 $v(z)$ 却迅速地转变为 $E \times B$ 漂移值 (cE_0/B_0) 。在 $z=a$ 附近, (10.32) 中的 V_1 换成 V_2 , z 换成 $(a-z)$ 。在 (10.31) 和 (10.32) 两种极限情形下的速度图如图 10.2 所示。

磁场 $B_x(z)$ 由下列方程决定:

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{4\pi}{c} J_y = \frac{4\pi\sigma}{c} \left(E_0 - \frac{1}{c} B_0 v \right) \quad (10.33)$$

除非我们知道稳恒态的详细建立过程, 或者能够利用一些对称性论证, 否则 B_x 在 $z=0$ 和 $z=a$ 处的边界条件就是不确定的。我们只知道, $z=0$ 和 $z=a$ 处的 B_x 之差与 x 方向每单位长度上沿 y 方向流动的总电流有关: