[illegible]算初步

商務印書館發行

矢算初步

張永立編

商務印書館發行

中華民國二十六年一月初版

(58830)

矢算初步一冊

每冊實價國幣貳元
外埠酌加運費匯費

編纂者　張永立

發行人　王雲五
上海河南路

印刷所　商務印書館
上海河南路

發行所　商務印書館
上海及各埠

目　　錄

下編　力學要義

第一章　力學原理

矢算初步

上編　基本運算

第一章　緒論

§1.　無向量與向量

量可大別爲二，曰無向量，曰向量.

量之不需有方向之含義，而能完全由大小決定之者，曰無向量.如資本二百萬元；人口四萬萬；地球半徑之平均長爲 6366 公里；以至動能 50 焦耳，熱量 2000 卡之類皆是也.

自然界中，有若干種之量，不能僅由大小完全決定，如軍艦每小時進行 1500 海里，重力加速度 g 爲 980 每秒每秒厘米皆是也.每小時進行 1500 海里，向南歟抑向東歟？980 每秒每秒厘米之加速度平行於地軸歟，通過地心歟？

僅有一數量之大小, 所給與吾人之觀念, 至爲模糊. 若加以方向之含義曰:軍艦向正南每小時進行 1500 海里, 重力加速度爲 980 每秒每秒厘米,依鉛直方位, 自上而下,則此二量之決定, 可無疑意. 如此之量, 稱爲向量.

§2. 向量之決定

決定向量之要素有三: 曰度量, 曰方位, 曰方向.

就前節之例觀之: 980 每秒每秒厘米示吾人以 g 之大小, 爲重力加速度之度量. 於地上一點, 作一三度座標, 則鉛直方位, 示吾人以此量與各座標軸間之角的關係. 然僅有方位,尙不能完全決定此向量. 蓋地心所施於物體之力,係引力而非推力, 若不將 g 加以方向之限制 (“向下”“自上而下” 等) 則純就理論方面言之, 吾人儘可想像桌上之書籍, 時鐘等, 均能自動向空飛昇而去, 而不爲不合理之事實.

§3. 向量之表示法——矢

向量之決定, 旣含有三要素, 則表示向量之工具, 自當備有度量, 方位, 方向三要素, 始爲合格. 能具備此三要素

之最簡單之幾何元素，爲一有方位，有方向之線段.

試於空間，任作一無限直線，平行於所欲表示之向量. 於此直線上取一點 O. 假定有一幾何點，沿此直線進行，依

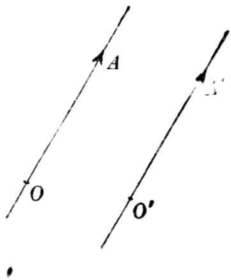

圖 1

向量之方向，自 O 出發，以至於某一點 A，令 OA 之長度與向量有一定之比的關係. 則此有方位有方向(自 O 至 A)之線段，可以將一向量之三要素完全表出.

此有方位，有方向之線段 OA 稱爲矢，於線段之 A 點，加一箭頭，此示自 O 至 A 之方向，記法，則 OA 之上，加一箭頭如 $\overrightarrow{OA}$，以示區別於普通線段. 爲簡便起見，亦可記如 $\vec{a}$. O 點稱爲矢之原點，A 稱爲矢之終點，載 $\overrightarrow{OA}$ 之無限直線，稱爲矢之座.

試作合於上述條件之另一矢，因平行於一向量之無限

直線，有無限條；而此無限直線上之點，可以作矢之原點者亦無窮，故此另一矢之作法爲可能．設此另一矢爲 $\overrightarrow{O'A'}$．$\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{O'A'}$ 均屬表同一向量之矢，此二矢長度相同，方位方向亦同，稱爲同質之二矢，記之如：

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{O'A'} \qquad (1101)^*$$

并由初等幾何之性質，知二矢爲同質之條件，在二矢可由一平行移動而完全重合．

§4. 單位矢 矢長 倒矢

不同方位之二矢，爲不同類，不能互相比較，若二矢 $\overrightarrow{OA}$，

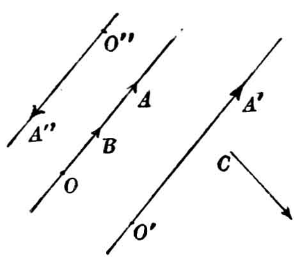

圖 2

$\overrightarrow{OB}$ 之方位與方向相同，A 點與 B 點不能重合，則 OA, OB

* (abcd) 表示第 a 編第 b 章第 cd 公式

二線段之長之比爲一正實數 m. 因二矢方位方向均同, 可認 $\overrightarrow{OA}$ 爲 $\overrightarrow{OB}$ 之 m 倍. 換言之, 以 m 乘 $\overrightarrow{OB}$, 可將 $\overrightarrow{OB}$ 伸長至 m 倍, 而使其與 $\overrightarrow{OA}$ 相等. 書如

$$\overrightarrow{OA}=\vec{a}=m\overrightarrow{OB} \tag{1102}$$

同方位方向而不同座, 或同座而不同原點之矢, 亦可作同樣比較而得

$$\overrightarrow{O'A'}=\vec{a}'=n\overrightarrow{OB}$$

若以 OB 線段之長爲單位, 則 $\overrightarrow{OB}$ 爲此方位之單位矢, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA}$, $\vec{a}'$ 諸矢之長度, 稱爲此諸矢之矢長(或值) 以 $\overline{OB}$, $\overline{OA}$, a' 記之, * 得

$$\overline{OB}=1, \qquad \overline{OA}=a=m, \qquad \overline{O'A'}=a'=n$$

通常一矢 $\overrightarrow{OA}$ 或 $\vec{a}$ 之單位矢, 記如 $\quad(\overrightarrow{OA})_1 \quad \vec{a}_1$

而 $\qquad \overline{(\overrightarrow{OA})_1}=1 \qquad a_1=1$

由 (2) 知一矢可認爲其單位矢與其矢長之乘積, 因得

$$\overrightarrow{OA}=OA\cdot(\overrightarrow{OA})_1, \qquad \vec{a}=a\cdot\vec{a}_1. \tag{1103}$$

$\vec{a}$ 之倒矢爲一矢, 其單位矢與 $\vec{a}$ 相共 而其値則爲 a 之倒數 $\frac{1}{a}$, 記之如 $\vec{a}^{-1}$, 得

*有時爲便利起見, 亦記如 $\left|\vec{a}\right|$

$$\vec{a}^{-1}=\frac{1}{a}\vec{a}_1=a^{-1}\cdot\vec{a}_1=a^{-2}\ (a\cdot\vec{a}_1)=a^{-2}\vec{a}=\frac{\vec{a}}{a^2}\qquad(1104)$$

§5. 同方位而不同方向之矢 反矢

將一無限直線,認爲一點自一端至他端之軌跡,此點進行之方向有二:或由此端至彼端,或由彼端至此端,今若取一種進行方向爲正,則他種進行方向爲負,已定有正負向之直線,謂之軸.

以一軸爲矢座,則座上之矢之方向,亦隨軸而決定,矢之方向與軸之正向相合者爲正,與之相反者爲負,故對於同一矢,可得:

$$\overrightarrow{AO}=-\overrightarrow{OA}\qquad(1105)$$

如此,方向相反,度量與方位均同之二矢,謂之相反或反向.$\overrightarrow{AO}$ 稱爲 $\overrightarrow{OA}$ 之反矢.

由(5)可知:以 -1 乘一矢,其結果在將此矢變爲其反矢.以負數 $-m$ 乘一矢,其結果在將此矢伸長至 m 倍,同時轉變其方向.

軸之正向,不特爲軸上之矢之正向,亦爲平行於此軸之矢之正向.故平行之若干無限直線,僅能有一共通之正向,