

算初步

商務印書館發行

步 初 算 矢

編 立 永 張

行 發 館 書 印 務 商

中華民國二十六年一月初版

周

矢算初步一冊

(16830)

每冊實價國幣貳元

外埠酌加運費匯費

編纂者 張永立

發行人 王雲五

印刷所 上海河南路
商務印書館

發行所 上海及各埠
商務印書館

版 翻
權 印
所 必
有 究

六七五九上

目 錄

上編 基本運算	1
---------------	---

第一章 緒論	1
--------------	---

1. 無向量與向量	1
2. 向量之決定	2
3. 向量之表示法——矢	2
4. 單位矢 矢長 倒矢	4
5. 同方位而不同方向之矢 反矢	6
6. 自由矢 滑動矢 固定矢 極矢 軸矢	7
7. 矢算	8

第二章 矢之加法	10
----------------	----

8. 二矢之和	10
9. 多數矢之加法	13
10. 分配律	15
11. 二矢之和與零矢	17
12. 應用雜例	19
13. 共面矢	32
14. 同原三矢終點共線之條件	34

15. 分一線段使成定比	35
16. 同原四矢終點共面之條件	36
17. 應用雜例	38
18. 幾何網 蛇蛙定理 墨勒拿定理	41
19. 調和比 調和線束	48
20. 矢之分解	50
21. 空間座標系 右系座標之規定	53
22. 矢算與解析幾何之關聯 單位矢 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$	56
23. 點之定位 矢之定位 原點變換 射影式	57
24. 重心	61
25. 雜例	63
第三章 二矢之乘法	69
26. 矢之乘法之意義 角為向量	69
27. 二矢之數乘法	71
28. 數乘法服從分配律	74
29. 二矢之矢乘法	75
30. 矢乘法服從分配律	78
31. 二矢和之數值關係	80
32. 單位矢 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 間之關係	82
33. 乘法之轉變式	83
34. 兩座標系之關係	86
35. 座標變換	88
36. 轉變式之簡單運用	90
37. 應用雜例	93

第四章 多矢之乘法 113

- 38. 三矢之混合乘法 113
- 39. 混合乘法之轉變式 115
- 40. 三矢之雙矢乘法 116
- 41. 三矢乘法之推廣 118
- 42. 運用雜例 119
- 43. 雜公式 126
- 44. 平面角之基本公式 129
- 45. 球面三角之基本公式 131
- 46. 球面三角運用雜例 133

第五章 微分要義 137

- 47. 矢函數 137
- 48. 微係數 微分 138
- 49. 基本公式 141
- 50. 微分規例 144
- 51. 定理 147
- 52. 矢函數之幾何意義 曲線之矢方程式 149

中編 幾何運用 152

第一章 直線 平面 152

- 53. 通過原點之直線 152
- 54. 平行線 154
- 55. 經過二定點之直線 156

56. 垂直於定線段之直線	157
57. 點至直線之垂線足	159
58. 點至直線之距離	160
59. 分角線	162
60. 由方位所決定之平面	164
61. 點至平面之距離	165
62. 經過三點之平面	167
63. 二平面之交線	168
64. 運用雜例	170
第二章 圓 球 軌跡雜例	187
65. 圓之矢方程式	187
66. 圓之切線	190
67. 極與極線	191
68. 幕度	192
69. 根軸	194
70. 球	195
71. 球之外切錐體	196
72. 球之外切圓柱體	197
73. 運用雜例	198
74. 軌跡雜例	202
第三章 圓錐曲線	211
75. 圓錐曲線之通式	211
76. 圓錐曲線之分類	213
77. 橢圓之矢方程式	215

78. 橢圓之另一定義	216
79. 橢圓之化簡方程式	218
80. 線算子 φ 之性質撮要	219
81. 橢圓之切線	220
82. 定理	222
83. 極 極線	224
84. 共軛直徑	225
85. 線算子 ψ	228
86. 雙曲線之另一定義	230
87. 切線 極線	232
88. 共軛直徑	233
89. 漸近線	235
90. 亞婆龍定理	236
91. 雙曲線之另一方程式	237
92. 拋物線之方程式	237
93. 焦點弦之性質	239
94. 拋物線之直徑	242
95. 拋物線方程式之另一形式	244
96. 定理	247
97. 算子 φ 與拋物線	249
98. 算子 φ 之運用	252
第四章 似位形 反值形	255
99. 似位形之定義	255
100. 直線與平面之似位形	257

101. 球與圓之似位形	258
102. 任意二球 (或二圓) 均爲似位形 (定理)	258
103. 定理	261
104. 似位形之切線性質	262
105. 反值形	263
106. 平面與直線之反值形	265
107. 球 (或圓) 之反值形	266
108. 反值形之切線	267

下編 力學要義 270

第一章 力學原理 270

109. 運動與時間	270
110. 刻卜勒原理 力	271
111. 伽利略原理	273
112. 牛頓原理	274
113. 力學	275
114. 力對於點之力矩	276
115. 力對於軸之力矩	279
116. 諸力之總力矩	280
117. 力矩之解析式	281
118. 勃魯克座標	282
119. 兩力之相互力矩	284
120. 力羣	285

121. 會合力羣	286
122. 散漫力羣之准合力與總力矩	288
123. 散漫力羣之不變量	290
124. 中軸	291
125. 轉動慣量	292
126. 重心之性質	294
127. 慣量橢圓球	296
第二章 運動學	298
128. 速度	298
129. 加速度	301
130. 直線運動與圓周運動	304
131. 平移運動	308
132. 轉動	310
133. 螺旋運動	313
134. 固體運動之普遍性質	316
135. 瞬間運動軸	319
136. 運動之組合	321
137. 速度之組合	323
138. 加速度之組合	325
第三章 動力學 靜力學	328
139. 動力學之問題	328
140. 運動量 動力學之第一矢方程式	329
141. 動量矩 動力學之第二矢方程式	331

142.	有心力	332
143.	功 功率	335
144.	動能定理 動力學之第三矢方程式	337
145.	行星運動	339
146.	動量定理	343
147.	重心運動定理 (附太陽系運動)	345
148.	質點組之動量矩	347
149.	動量矩定理	349
150.	刻尼克定理	351
151.	動能定理	352
152.	轉動體	354
153.	轉動體之運動方程式	356
154.	平衡	357
155.	質點之平衡條件	358
156.	固體之平衡條件	359
157.	力羣之簡化	360
158.	化力羣爲二力	361
159.	化力羣爲一力或一力偶	363
160.	平行力羣	364

矢 算 初 步

上 編 基 本 運 算

第一章 緒 論

§ 1. 無向量與向量

量可大別爲二，曰無向量，曰向量。

量之不需有方向之含義，而能完全由大小決定之者，曰無向量。如資本二百萬元；人口四萬萬；地球半徑之平均長爲 6366 公里；以至動能 50 焦耳，熱量 2000 卡之類皆是也。

自然界中，有若干種之量，不能僅由大小完全決定，如軍艦每小時進行 1500 海里，重力加速度 g 爲 980 每秒每秒厘米皆是也。每小時進行 1500 海里，向南歟抑向東歟？980 每秒每秒厘米之加速度平行於地軸歟，通過地心歟？

僅有一數量之大小，所給與吾人之觀念，至爲模糊。若加以方向之含義曰：軍艦向正南每小時進行 1500 海里，重力加速度爲 980 每秒每秒厘米，依鉛直方位，自上而下，則此二量之決定，可無疑意。如此之量，稱爲向量。

§ 2. 向量之決定

決定向量之要素有三：曰度量，曰方位，曰方向。

就前節之例觀之：980 每秒每秒厘米示吾人以 g 之大小，爲重力加速度之度量。於地上一點，作一三度座標，則鉛直方位，示吾人以此量與各座標軸間之角的關係。然僅有方位，尙不能完全決定此向量。蓋地心所施於物體之力，係引力而非推力，若不將 g 加以方向之限制（“向下”“自上而下”等）則純就理論方面言之，吾人儘可想像桌上之書籍，時鐘等，均能自動向空飛昇而去，而不爲不合理之事實。

§ 3. 向量之表示法——矢

向量之決定，既含有三要素，則表示向量之工具，自當備有度量，方位，方向三要素，始爲合格。能具備此三要素

之最簡單之幾何元素，爲一有方位，有方向之線段。

試於空間，任作一無限直線，平行於所欲表示之向量。於此直線上取一點 O 。假定有一幾何點，沿此直線進行，依

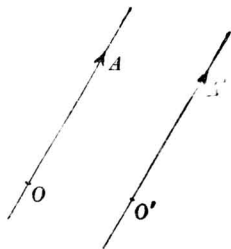


圖 1

向量之方向，自 O 出發，以至於某一點 A ，令 OA 之長度與向量有一定之比的關係。則此有方位有方向（自 O 至 A ）之線段，可以將一向量之三要素完全表出。

此有方位，有方向之線段 OA 稱爲矢，於線段之 A 點，加一箭頭，此示自 O 至 A 之方向，記法，則 OA 之上，加一箭頭如 $\overrightarrow{OA}$ ，以示區別於普通線段。爲簡便起見，亦可記如 $\vec{a}$ 。 O 點稱爲矢之原點， A 稱爲矢之終點，載 $\overrightarrow{OA}$ 之無限直線，稱爲矢之座。

試作合於上述條件之另一矢，因平行於一向量之無限

直線，有無限條；而此無限直線上之點，可以作矢之原點者亦無窮，故此另一矢之作法為可能。設此另一矢為 $\overrightarrow{O'A'}$ 。 $\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{O'A'}$ 均屬表同一向量之矢，此二矢長度相同，方位方向亦同，稱為同質之二矢，記之如：

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O'A'} \quad (1101)^*$$

并由初等幾何之性質，知二矢為同質之條件，在二矢可由一平行移動而完全重合。

§ 4. 單位矢 矢長 倒矢

不同方位之二矢，為不同類，不能互相比較，若二矢 $\overrightarrow{OA}$ ，

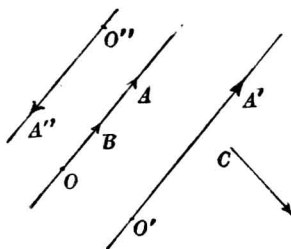


圖 2

$\overrightarrow{OB}$ 之方位與方向相同，A 點與 B 點不能重合，則 OA, OB

* (abcd) 表示第 a 編第 b 章第 cd 公式

二線段之長之比爲一正實數 m 。因二矢方位方向均同，可認 $\overrightarrow{OA}$ 爲 $\overrightarrow{OB}$ 之 m 倍。換言之，以 m 乘 $\overrightarrow{OB}$ ，可將 $\overrightarrow{OB}$ 伸長至 m 倍，而使其與 $\overrightarrow{OA}$ 相等，書如

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a} = m\overrightarrow{OB} \quad (1102)$$

同方位方向而不同座，或同座而不同原點之矢，亦可作同樣比較而得

$$\overrightarrow{O'A'} = \vec{a}' = n\overrightarrow{OB}$$

若以 OB 線段之長爲單位，則 $\overrightarrow{OB}$ 爲此方位之單位矢， $\overrightarrow{OB}$ ， $\overrightarrow{OA}$ ， $\vec{a}'$ 諸矢之長度，稱爲此諸矢之矢長（或值）以 $\overrightarrow{OB}$ ， $\overrightarrow{OA}$ ， a' 記之，* 得

$$\overrightarrow{OB} = 1, \quad \overrightarrow{OA} = a = m, \quad \overrightarrow{O'A'} = a' = n$$

通常一矢 $\overrightarrow{OA}$ 或 $\vec{a}$ 之單位矢，記如 $(\overrightarrow{OA})_1$ $\vec{a}_1$

而 $(\overrightarrow{OA})_1 = 1$ $a_1 = 1$

由(2)知一矢可認爲其單位矢與其矢長之乘積，因得

$$\overrightarrow{OA} = OA \cdot (\overrightarrow{OA})_1, \quad \vec{a} = a \cdot \vec{a}_1. \quad (1103)$$

$\vec{a}$ 之倒矢爲一矢，其單位矢與 $\vec{a}$ 相共，而其值則爲 a 之倒數 $\frac{1}{a}$ ，記之如 $\vec{a}^{-1}$ ，得

* 有時爲便利起見，亦記如 $|\vec{a}|$

$$\vec{a}^{-1} = \frac{1}{a} \vec{a}_1 = a^{-1} \cdot \vec{a}_1 = a^{-2} (a \cdot \vec{a}_1) = a^{-2} \vec{a} = \frac{\vec{a}}{a^2} \quad (1104)$$

§ 5. 同方位而不同方向之矢 反矢

將一無限直線，認為一點自一端至他端之軌跡，此點進行之方向有二：或由此端至彼端，或由彼端至此端，今若取一種進行方向為正，則他種進行方向為負，已定有正負向之直線，謂之軸。

以一軸為矢座，則座上之矢之方向，亦隨軸而決定，矢之方向與軸之正向相合者為正，與之相反者為負，故對於同一矢，可得：

$$\vec{AO} = -\vec{OA} \quad (1105)$$

如此，方向相反，度量與方位均同之二矢，謂之相反或反向。 $\vec{AO}$ 稱為 $\vec{OA}$ 之反矢。

由 (5) 可知：以 -1 乘一矢，其結果在將此矢變為其反矢。以負數 $-m$ 乘一矢，其結果在將此矢伸長至 m 倍，同時轉變其方向。

軸之正向，不特為軸上之矢之正向，亦為平行於此軸之矢之正向，故平行之若干無限直線，僅能有一共通之正向，