数学分析

★下 册

★刘玉琏 编

★高等教育出版社

★ GAODENG JIAOYU CHUBANSHE

数 学 分 析

下 册

刘 玉 琏 编

高 等 教 育 出 版 社

本书是根据原教育部制定的中学教师进修高等师范专科的《数学分析教学大纲》，并适当照顾了二年制师专和在职初中数学教师达到学历合格的两个《数学分析教学大纲》的要求编写的．为便于自学读者，还配有学习指导书同时出版．上册内容有极限论和一元函数微积分．本册内容有级数论，多元函数微积分，常微分方程简介．另将实数理论作为附录列于书末．

本书注意结合中学教材和中学教师的实际，起点适中，内容简明，条理清楚，逻辑严谨，便于自学．

本书可供卫星电视教育、教育学院、函授院校学员进修高师专科或自学的中学数学教师选作教材或学习参考书．

数 学 分 析

下 册

刘玉琏 编

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
商务印书馆上海印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 11.625 字数 277,000
1988 年 10 月第 1 版 1988 年 10 月第 1 次印刷
印数 0001—14,160

ISBN 7-04-000608-1/O·238
定价 2.70 元

目　　录

第十章　数 值 级 数

在自然科学、工程技术和数学的许多分支中，级数有着广泛的应用．它的应用主要表现在两个方面：一方面，级数是研究函数性态和计算函数值的一个重要的工具．例如，借助于幂级数能够研究初等超越函数的性态和计算它们的函数值．读者熟知的常用对数表、自然对数表、三角函数表等都是以级数为工具计算出来的；另一方面，能够借助于函数级数表示很多有用的非初等函数．例如，有些微分方程的解不是初等函数，却可表为级数．因此，级数及其理论是数学分析不可缺少的重要的组成部分．

§10.1 级数的敛散性

10.1.1．收敛与发散的概念

设有数列 $\{u_n\}$，即

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \cdots,\ u_n,\ \cdots. \tag{1}$$

将数列(1)的项依次用加号连接起来，即

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

或简写为

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{2}$$

称为**数值级数**，简称为级数，$u_1,\ u_2,\cdots,u_n,\cdots$ 称为级数(2)的**项**，u_n 称为级数(2)的**第 n 项**或**通项**．

级数(2)的形式是无限多个数的和．我们只会计算有限多个数的和，不会计算无限多个数的和．因此，无限多个数的和是一个

未知的新概念，应该予以定义．这个新概念也不是孤立的，它与我们已知的有限多个数的和联系着．不难想到，从“有限”转化为“无限”需要借助极限这个工具来实现．

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项的有限和是 S_n，即

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k,$$

称为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的 **n 项部分和**，简称**部分和**．显然，$\forall n \in \mathbf{N}$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的 n 项部分和 S_n 都是已知的．于是，给定一个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，相应有唯一的部分和数列 $\{S_n\}$，即

$$\begin{aligned} &S_1 = u_1, \\ &S_2 = u_1 + u_2, \\ &S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \\ &\cdots\cdots \\ &S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n, \\ &\cdots\cdots. \end{aligned}$$

定义 1．若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛，设

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S,$$

则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ **收敛**，并称 S 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的**和**，表为

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = S.$$

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 发散，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ **发散**．发散的级数没有和．

定义 2．若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，其和是 S，其 n 项部分和是 S_n，而

$$r_n = S - S_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_k = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots,$$

称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的 **n 项余和**，简称**余和**．显然，有

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}(S - S_n) = 0.$$

由此可见，级数的敛散性（收敛或发散）是借助级数的部分和数列的敛散性定义的．因此讨论级数的各种性质都必须借助于该级数的部分和数列性质．于是，研究级数及其和数只不过是研究与其相应的一个数列极限的一种新形式．这个新形式不仅仅是数列极限的简单变形，不少性质当应用级数时常常能呈现出特别简单的形式，从而使我们在处理不同形式的极限时能有更大的灵活性．

例 1．证明级数

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

收敛，并求其和．

证法　首先计算 n 项部分和 S_n，其次再取极限．

证明　将级数的通项 $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ 改写为

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

从而级数的 n 项部分和

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

于是，所给的级数收敛，其和是1，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1.$$

例2. 证明调和级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

是发散的.

证法 只须证明部分和数列$\{S_n\}$的一个子数列$\{S_{2^m}\}$:

$$S_2,\ S_4,\ S_8,\ \cdots,\ S_{2^m},\ \cdots$$

发散(从而数列$\{S_n\}$也发散).

证明 $\forall m\in\mathbf{N}$，有

$$S_{2^m}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$$
$$+\underbrace{\left(\frac{1}{2^{m-1}+1}+\frac{1}{2^{m-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^m}\right)}_{2^{m-1}\text{项}}.$$

不难证明，其中每个括号内的和数都大于$\frac{1}{2}$. 事实上，

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2},$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{2^{m-1}+1}+\frac{1}{2^{m-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^m}>\frac{2^{m-1}}{2^m}=\frac{1}{2}.$$

于是，
$$S_{2^m}>1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{m\text{项}}=1+\frac{m}{2}.$$

$$\lim_{m\to\infty}S_{2^m}\geqslant\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{m}{2}\right)=+\infty,$$

即数列$\{S_{2^m}\}$发散，从而部分和数列$\{S_n\}$也发散. 于是，调和级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

10.1.2. 无限循环小数化分数

我们在算术中知道，任何分数(有理数)$\frac{p}{q}$($p\in\mathbf{Z}$, $q\in\mathbf{N}$)都能化为无限循环小数，即

$$\frac{p}{q}=a.a_1a_2\cdots a_m\dot{b}_1b_2\cdots\dot{b}_n,$$

其中 $a\in\mathbf{Z}$, a_i, $b_j\in\mathbf{N}$, 且 $0\leqslant a_i$, $b_j\leqslant 9$, $i=1, 2, \cdots, m$; $j=1, 2, \cdots, n$.

特别是，当 $\frac{p}{q}$ 是整数时，即 $q=1$, 则 $a=p$, $a_i=b_j=0$, $i=1, 2, \cdots, m$; $j=1, 2, \cdots, n$, $p=p.\dot{0}$.

任何分数都能化为无限循环小数. 反之，无限循环小数又可化为分数，那么怎样将无限循环小数化为分数呢? 这要应用下面等比级数求和的公式. 为此，首先讨论等比级数的敛散性.

例 3. 讨论等比级数(或几何级数)

$$\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$$

的敛散性，其中 $a\neq 0$, r 是公比.

解 1) 当 $|r|\neq 1$ 时，已知等比级数的 n 项部分和 S_n 是

$$S_n=a+ar+\cdots+ar^{n-1}=\frac{a-ar^n}{1-r}.$$

(i) 当 $|r|<1$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a-ar^n ①}{1-r}=\frac{a}{1-r},$$

即当 $|r|<1$ 时，等比级数收敛，其和是

$$\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=\frac{a}{1-r}.$$

---

① 由 2.1.4 的例 4 知 $r^n\to 0(n\to\infty)$.

(ii) 当$|r|>1$时，有

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a-ar^n}{1-r}=\infty,$$

即当$|r|>1$时，等比级数发散.

2) 当$|r|=1$时，有两种情况：

(i) 当$r=1$时，等比级数是

$$a+a+a+\cdots+a+\cdots.$$

$$S_n=\underbrace{a+a+\cdots+a}_{n\text{个}}=na.$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} na=\infty,$$

即当$r=1$时，等比级数是发散.

(ii) 当$r=-1$时，等比级数是

$$a-a+a-a+\cdots+(-1)^{n-1}a+\cdots$$

$$S_n=\begin{cases}0, & \text{当 } n \text{ 是偶数,}\\ a, & \text{当 } n \text{ 是奇数.}\end{cases}$$

显然，部分和数列$\{S_n\}$发散，即当$r=-1$时，等比级数发散.

综上所论，等比级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$，当$|r|<1$时收敛，其和是$\frac{a}{1-r}$；当$|r|\geqslant 1$时发散.

任何无限循环小数①都可化为公比小于1的等比级数.例如：

无限纯循环小数$0.\dot{7}=0.777\cdots$是公比$r=\frac{1}{10}$的等比级数

$$0.\dot{7}=\frac{7}{10}+\frac{7}{10^2}+\cdots+\frac{7}{10^n}+\cdots.$$

无限混循环小数$0.23\dot{4}\dot{5}=0.23454545\cdots$是公比$r=\frac{1}{10^2}$的等比级数

① 为了书写简单，这里只讨论整数部分为0的无限循环小数.

$$0.23\dot{4}\dot{5}=\frac{23}{10^2}+\left(\frac{45}{10^4}+\frac{45}{10^6}+\cdots+\frac{45}{10^{2(n+1)}}+\cdots\right).$$

根据例3的等比级数求和公式，有

$$0.\dot{7}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{10^n}=\frac{\frac{7}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{7}{9}.$$

$$0.23\dot{4}\dot{5}=\frac{23}{10^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{45}{10^{2(n+1)}}=\frac{23}{10^2}+\frac{\frac{45}{10^4}}{1-\frac{1}{10^2}}$$

$$=\frac{23}{10^2}+\frac{45}{10^2(10^2-1)}=\frac{2345-23}{9900}.$$

一般形式的无限混循环小数

$$0.a_1a_2\cdots a_m\dot{b}_1b_2\cdots\dot{b}_n,$$

其中 a_i, $b_j\in\mathbf{N}$, 且 $0\leqslant a_i$, $b_j\leqslant 9$, $i=1, 2, \cdots, m$; $j=1, 2, \cdots, n$.

它是公比 $r=\frac{1}{10^n}$ 的等比级数

$$0.a_1a_2\cdots a_m\dot{b}_1b_2\cdots\dot{b}_n$$

$$=\frac{a_1a_2\cdots a_m}{10^m}+\left(\frac{b_1b_2\cdots b_n}{10^{m+n}}+\frac{b_1b_2\cdots b_n}{10^{m+2n}}+\cdots\right).$$

根据例3的等比级数求和公式，有

$$0.a_1a_2\cdots a_m\dot{b}_1b_2\cdots\dot{b}_n$$

$$=\frac{a_1a_2\cdots a_m}{10^m}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_1b_2\cdots b_n}{10^{m+kn}}$$

$$=\frac{a_1a_2\cdots a_m}{10^m}+\frac{\frac{b_1b_2\cdots b_n}{10^{m+n}}}{1-\frac{1}{10^n}}$$

$$=\frac{a_1a_2\cdots a_m}{10^m}+\frac{b_1b_2\cdots b_n}{10^m(10^n-1)}$$

$$=\frac{a_1a_2\cdots a_m(10^n-1)+b_1b_2\cdots b_n}{10^m(10^n-1)}$$

$$=\frac{a_1a_2\cdots a_m b_1 b_2\cdots b_n - a_1a_2\cdots a_m}{\underbrace{99\cdots9}_{n个}\ \underbrace{00\cdots0}_{m个}}.$$

于是，一般的无限混循环小数 $0.a_1a_2\cdots a_m\dot{b}_1b_2\cdots\dot{b}_n$ 化为分数，其分子是第二个循环节以前的数字，按原有顺序组成的整数减去第一个循环节以前的数字按原有顺序组成的整数之差；其分母是 n 个 9 接着 m 个 0 组成的数.

按此规律很容易将无限循环小数化为分数. 例如：

$$0.0123\dot{4}5\dot{6}=\frac{123456-123}{9990000}.$$

$$0.7890\dot{1}23\dot{4}=\frac{78901234-7890}{99990000}.$$

10.1.3. 收敛级数的性质

收敛级数有下列一些重要性质：

定理 1. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0.$$

证明 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的 n 项部分和是

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k,$$

其和是 S，即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$. 于是

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}u_n&=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})\\&=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S-S=0. \quad \square\end{aligned}$$

定理 1 的等价命题是：若

$$\lim_{n\to\infty}u_n\neq0,$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，即若级数的一般项 u_n $(n\to\infty)$ 不是无穷小，

则该级数必发散．这是判别某些发散级数的一个简易判别法．例如，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{100\cdot n+1}=\frac{1}{101}+\frac{2}{201}+\cdots+\frac{n}{100\cdot n+1}+\cdots.$$

已知 $$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{100\cdot n+1}=\frac{1}{100}\neq 0,$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{100\cdot n+1}$ 发散．

注意 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 仅是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的必要条件而不是充分条件，即 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也可能发散．例如，调和级数(见例 2)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots,$$

有 $$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

可是调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 并不收敛．

定理 2．若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，其和是 S，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}cu_n$ 也收敛，其和是 cS，其中 c 是常数．

证明 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}cu_n$ 的 n 项部分和分别是 S_n 与 P_n，

有 $$P_n=\sum_{k=1}^{n}cu_k=c\sum_{k=1}^{n}u_k=cS_n.$$

已知 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$，有

$$\lim_{n\to\infty}P_n=c\lim_{n\to\infty}S_n=cS,$$

即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}cu_n$ 收敛，其和是 cS． □

定理 2 的结果可改写为

$$\sum_{n=1}^{\infty}cu_n=cS=c\sum_{n=1}^{\infty}u_n,$$

即收敛级数(无限个数的和)满足分配律.

特别是，当 $c=-1$ 时，

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-u_n)=-\sum_{n=1}^{\infty}u_n.$$

定理 3. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛，其和分别是 A 与 B，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 也收敛，其和是 $A+B$.

证明 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 的 n 项部分和分别是 A_n、B_n 与 C_n，有

$$\begin{aligned}C_n&=\sum_{k=1}^{n}(u_k+v_k)\\&=(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+\cdots+(u_n+v_n)\\&=(u_1+u_2+\cdots+u_n)+(v_1+v_2+\cdots+v_n)\\&=A_n+B_n.\end{aligned}$$

已知 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}B_n=B$，有

$$\lim_{n\to\infty}C_n=\lim_{n\to\infty}(A_n+B_n)=\lim_{n\to\infty}A_n+\lim_{n\to\infty}B_n=A+B,$$

即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛，其和是 $A+B$ □

定理 3 的结果可改写为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)=A+B=\sum_{n=1}^{\infty}u_n+\sum_{n=1}^{\infty}v_n.$$

定理 4. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，其和是 S，不改变级数各项的位置，依次将若干项结合在一起作为新级数的一项，即

$$\begin{aligned}&(u_1+u_2+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2})+\cdots\\&\quad+(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k})+\cdots,\end{aligned}\tag{3}$$

则此新级数也收敛，其和也是 S.

证明 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的 n 项部分和是 S_n, 新级数(3)的 k 项部分和是 P_k, 有

$$\begin{aligned} P_k &= (u_1 + u_2 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots \\ &\quad + (u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k}) \\ &= u_1 + u_2 + \cdots + u_{n_1} + \cdots + u_{n_2} + \cdots + u_{n_k} = S_{n_k}. \end{aligned}$$

已知
$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

而$\{S_{n_k}\}$是$\{S_n\}$的子数列. 根据 2.2.5 定理 8,

$$\lim_{k\to\infty} S_{n_k} = S.$$

从而,
$$\lim_{k\to\infty} P_k = \lim_{k\to\infty} S_{n_k} = S,$$

即新级数(3)也收敛,其和也是 S. □

定理 4 的结果可改写为

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{k=1}^{\infty} (u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k}), \quad (n_0 = 0)$$

即收敛级数(无限个数的和)满足结合律.

10.1.4 级数的柯西收敛准则

因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性与它的部分和数列 $\{S_n\}$ 的敛散性是等价的, 所以部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛的必要充分条件也就是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要充分条件. 根据 2.6.3 定理 3(数列的柯西收敛准则):

$$\text{数列}\{S_n\}\text{收敛} \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbf{N},\ \forall n > N,\ \forall p \in \mathbf{N} \Rightarrow |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon.$$

由于 S_n 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的 n 项部分和,而

$$S_{n+p} - S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + u_{n+1} + \cdots$$

$$+u_{n+p}-(u_1+u_2+\cdots+u_n)$$
$$=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}.$$

于是，相应地有下面级数的柯西收敛准则：

定理 5.（级数的柯西收敛准则） 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}$，$\forall n>N$，$\forall p\in\mathbf{N}\Rightarrow$
$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon.$$

定理 5 指出：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛等价于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 充分远（即 $\forall n>N$）的任意片段（即 $\forall p\in\mathbf{N}$，$u_{n+1}+\cdots+u_{n+p}$）的绝对值任意小。由此可见，级数的敛散性仅与级数充分远的片段的大小有关，而与级数前面的有限项无关。于是，有

推论 若去掉、增添或改变级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的有限项，则不改变级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的敛散性。

例如，已知调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是发散的，去掉前面的 1000 项，则级数
$$\sum_{n=1001}^{\infty}\frac{1}{n}=\frac{1}{1001}+\frac{1}{1002}+\frac{1}{1003}+\cdots$$
还是发散的。

练 习 题 10.1

1. 何谓级数？何谓级数的部分和？何谓级数的收敛和发散？何谓收敛级数的和？何谓收敛级数 n 项的余和？

2. 等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty}r^{n-1}$ 在什么条件下收敛（发散）？

3. 计算下列级数的和：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$． (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^{n-1}}$．

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n}$． (4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$．