

广州市中学

数 学

教学参考资料

高中二年级（第二学期）

目 录

第五章 不 等 式 (1)

第一节 不等式和它的性质 (2)

第二节 一、二次不等式的解法 (4)

第六章 空间图形 (12)

第一节 直线和平面 (14)

第二、三、四、五节 柱体、锥体、台体、球体 (39)

第五章 不 等 式

一、教学目的

1. 使学生正确理解有关不等式、不等式的解、解不等式的概念和不等式的三个性质；
2. 使学生熟练掌握一元一次不等式和一元一次不等式组的解法，其解在数轴上的表示法，并能运用一元一次不等式解有关的应用题；
3. 使学生掌握分式不等式、一元二次不等式、绝对值不等式的解法。

二、教材说明

1. 教材安排顺序

先从研究实际问题引出不等式的概念，接着一方面观察不等号方向导出同向不等式和异向不等式，另一方面观察不等式中字母可取值情况，又导出绝对不等式、矛盾不等式和条件不等式，接着根据有理数大小比较的方法，导出不等式三个性质。

在上面基础上通过例子进行讲述整式不等式、一元一次不等式、解不等式、不等式的解等概念，最后通过例题讲解一元一次不等式、一元一次不等式组、一元二次不等式和绝对值不等式的解法。

2. 教材的重点和难点

(1) 教材的重点是一元一次不等式的解法，因为它

是解其他不等式和不等式组的基础，在学习一元二次方程根的判别式和函数的定义域等知识时，要直接或间接地用到一元一次不等式的解法。为了使能够正确地解一元一次不等式，关键在于使学生正确地理解不等式和不等式的解的意义以及牢固地掌握不等式的基本性质。

(2) 教材的难点是正确理解不等式的解的意义，牢固掌握不等式第三个性质和运用一元一次不等式解应用题。

三、 教学课时的安排

本章教学时数约需 16 课时，各节教学课时大致分配如下：

第一节	不等式和它的性质	约 3 课时
6.1	不等式的概念	约 1 课时
6.2	不等式的性质	约 2 课时
第二节	一、二次不等式的解法	约 11 课时
6.3	一元一次不等式	约 3 课时
6.4	一元一次不等式组	约 4 课时
6.5	一元二次不等式	约 2 课时
6.6	绝对值不等式	约 2 课时
复习		约 2 课时

第一节 不等式和它的性质

一、 教学要求

1. 使学生正确理解不等式、同向不等式、异向不等式、绝对不等式、矛盾不等式和条件不等式的概念；

2. 使学生正确掌握不等式的三个性质。

二、 教学建议

1. 关于不等式的概念的教学

在讲解不等式的概念时，应着重指出：

(1) 数量之间除了有相等的关系外，还有不相等的关系；

(2) 在不等式的关系中有大于和小于两种情况，因此，在研究不等式时，必须明确，不等式的左边大于右边，还是右边大于左边，也就是说，要注意研究不等号的方向问题。

2. 关于不等式的三个性质的教学

不等式的三个基本性质是研究不等式变换的理论根据，必须牢固掌握。

对于不等式的三个性质，课本先用数字验证，然后用字母加以抽象。理解这三个性质的关键，在于确实掌握有理数大小的比较。为此，在教学时，应当先复习有理数大小的比较，使学生清楚知道：一切正数大于零和一切负数，一切负数都小于零和一切正数；两个负数，绝对值大的反而小。

不等式性质(3)，学生较难掌握，应集中力量，重点突破，突破方法可考虑这样进行：

先写出 $5 > 3$ ，并提问，这个不等式的两边都乘以 -3 ，各得多少？ -15 与 -9 那一个比较大？应当写上什么不等号？然后把 $-15 < -9$ 与 $5 > 3$ 加以比较，强调指出不等式两边乘以一个负数所得的不等式和原来不等式是异向不等式。用同样方法讲 $-6 < -2$ 的两边乘以 $-\frac{1}{2}$ 后，再总结出性质(3)，并指出，因为不等式有大于、小于两种情况，所以在不等式变形过程中要特别注意乘以同一个正数或负数

后，不等式之间的区别，同时还要附带说明，不等式两边都乘以 0，两边皆为 0，不等式就不能成立，这样，使学生分清这些性质是在什么条件下才能成立，以免产生错误。

第二节 一、二次不等式的解法

一、 教学要求

1. 使学生正确理解整式不等式、一元一次不等式、一元一次不等式组、一元二次不等式、绝对值不等式、解不等式和不等式的解等概念；

2. 使学生熟练地解一元一次不等式、一元一次不等式组，并掌握它们的解在数轴上的表示方法，能正确地解一元二次不等式和绝对值不等式；

3. 能列出一元一次不等式解应用题。

二、 教学建议

1. 关于不等式的解的教学

不等式的解的概念是一个难点，要解决这个难点，可注意如下两点：

(1) 引导学生弄清方程的解和不等式的解之间的区别和联系，应指出，在一般情况下，方程的解是一个（组）或几个（组），不等式的解一般是一个或几个范围里的数，可结合实例对比，加深学生理解。例如可结合课本中例子 $x+3 < 6$ ，先选定一些属于它的解的范围里的一些数值直接代入进行验证，强调指出，只要是属于解的范围里的数都能使不等式成立，这些数都是不等式的解，然后又以方程 $x+3=6$

为例子，先选定以 3 代替方程中的 x ，得 $6 = 6$ ，所以 3 是方程 $x + 3 = 6$ 的解，再用以外任一个数代替 x ，方程两边都不相等，就说方程 $x + 3 = 6$ 的解是一个确定的数。

(2) 在以后讲解有关例题时，把不等式的解在数轴上表示出来，使学生形象地看到不等式的解是数轴上一个或几个范围里的数，不断加深学生对不等式的解的认识。

2. 关于一元一次不等式解法的教学

(1) 通过与一元一次方程的解法的对比，阐明一元一次不等式解法的要点。

一元一次不等式和一元一次方程的解法的共同点：

① 把原不等式（或方程）逐步转化为形如 $x > a$ 或 $x < a$ 的不等式（或形如 $x = a$ 的方程）；

② 解法的五个步骤相同。

一元一次不等式和一元一次方程的解法的不同点：

不等式两边都乘以同一个负数时，所得不等式中的符号要改向，但方程两边不论乘以同一正数或负数，符号没有改变。

根据一元一次不等式和一元一次方程的解法的异同点，在讲解一元一次不等式的解法时，应着重抓好不等式的两边同乘以一个负数时，所得不等式中的符号要改向，这一点要反复训练和提醒学生注意。

(2) 在数轴上把不包括在解中的端点描成圆圈，把包括在解中的端点描成黑圆点，应向学生交代清楚。

(3) 教材中的例 3：
$$\frac{2(4x-3)}{3} \leq \frac{5(5x+12)}{6}$$
实际上是方程

$$\frac{2(4x-3)}{3} = \frac{5(5x+12)}{6}$$

和不等式

$$\frac{2(4x-3)}{3} < \frac{5(5x+12)}{6}$$

的合并，要指出这种形式的不等式的解法仍旧按照解不等式的一般步骤来解。

3. 关于列出一元一次不等式解应用题的教学

(1) 指出列出一元一次不等式解应用题和列出一元一次方程解应用题的分析方法和步骤类似，但也有不同，前者根据不等量关系，列出一元一次不等式，后者根据等量关系列出一元一次方程。

(2) 要理解题中关键词语的意义，正确列出不等式，如要理解“至少”、“超过”、“在……之间”等词语的意义。

在讲解教材例4时，根据题意可设导火线长为 x 厘米，得出两个代数式 $\frac{x}{0.8}$ 和 $\frac{500}{4}$ ，再指出“导火线至少需要多长”中“至少”二字的意义后，列出不等式 $\frac{x}{0.8} \geq \frac{500}{4}$ 。

4. 关于一元一次不等式组的教学

关于一元一次不等式组的解法，先分别解不等式组中每一个一元一次不等式，它的解是这两个一元一次不等式要同时成立的公共部分，可配合图解，加以研究。

对于例4中的不等式 $-1 < \frac{3-2x}{5} \leq 1$ ，要使学生明确它实际上是由两个不等式组成的不等式组，

$$\text{即} \begin{cases} \frac{3-2x}{5} > -1, \\ \frac{3-2x}{5} \leq 1, \end{cases} \quad \text{其他问题就不难理解了。}$$

对于例 5 中的不等式 $\frac{3-2x}{x} < 0$ 的解法，应着重从分式

取值情况，把它转化为教材上的两个一元一次不等式组，弄清这一点，其他问题就不难理解了。

5. 关于一元二次不等式的解法

一元二次不等式的解法可以根据二次三项式的理论去解决，由于二次三项式的理论一般中学生接受较困难，故教材采用先将二次三项式分解因式再解一次不等式组而求得它的解，这样虽然麻烦一点，但学生易接受。

在教学时，要抓住两个因式的积大于 0，这两个因式必须同号；两个因式的积小于 0，这两个因式必须异号；其他问题就不难理解了。

6. 关于绝对值不等式的教学

绝对值不等式的解法，它的关键在于如何去掉绝对值的符号，在教学时要抓住绝对值意义去掉绝对值符号，把它转化为不等式组，其他问题就易解决了。

三、 参考材料

1. 不等式的解法和讨论（作复习参考用）

（1） 一元一次不等式 $ax > b$ 的解法及其讨论

若 $a > 0$ ，则 $x > \frac{b}{a}$ ；

若 $a < 0$ ，则 $x < \frac{b}{a}$ ；

若 $a = 0$ ，则 $\begin{cases} b \geq 0 \text{ 时无解,} \\ b < 0 \text{ 时解为任意实数.} \end{cases}$

（2） 一元一次不等式组的解法及其讨论。

一元一次不等式组的解法：分别解一元一次不等式，通过讨论取公共解。

公共解的讨论

不等式组的解一般有以下四种形式：

若 $\begin{cases} x > m, \\ x > n, \end{cases}$ 且 $m < n$, 则公共解 $x > n$;

若 $\begin{cases} x < m, \\ x < n, \end{cases}$ 且 $m < n$, 则公共解 $x < m$;

若 $\begin{cases} x > m, \\ x < n, \end{cases}$ 且 $m < n$, 则公共解 $m < x < n$;

若 $\begin{cases} x < m, \\ x > n, \end{cases}$ 且 $m < n$, 则无解。

在讨论不等式组的解时，可以借助于数轴（图解）来帮助我们取公共解。

（3）一元二次不等式的解法及其讨论

把一元二次不等式分成两个一元一次不等式组，然后分别解这两个不等式组；

若两个不等式组都有解，则这两个不等式组的解都是一元二次不等式的解；

若两个不等式组中一组有解而另一组无解，则这个不等式组的解就是一元二次不等式的解；

若两个不等式组都无解，则一元二次不等式无解。

（4）绝对值不等式的解法及其讨论

根据绝对值的概念去掉绝对值符号，转化为不带绝对值符号的不等式组来解。

绝对值不等式的解，根据所得不等式组来确定。

2. 不等式的证明的常用方法

不等式证明所采用方法是多种多样的，下面结合些例子介绍常用的一些方法。

(1) 用不等概念直接证明

例1：如 a 、 b 、 c 是不全相等的实数，求证：

$$ab + bc + ca < a^2 + b^2 + c^2.$$

证明：

$$\because ab + bc + ca - (a^2 + b^2 + c^2)$$

$$= \frac{1}{2} (2ab + 2bc + 2ca - 2a^2 - 2b^2 - 2c^2)$$

$$= -\frac{1}{2} [(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2)$$

$$+ (c^2 - 2ca + a^2)]$$

$$= -\frac{1}{2} [(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2],$$

且 $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 > 0$,

$$\therefore ab + bc + ca - (a^2 + b^2 + c^2) < 0.$$

$$\therefore ab + bc + ca < a^2 + b^2 + c^2.$$

例2：如 a 、 b 、 c 、 d 、 x 、 y 为不全相等的正实数，已知： $x^2 = a^2 + b^2$ ， $y^2 = c^2 + d^2$ ，求证： $xy \geq ac + bd$ 。

证明：

$$x^2 y^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$

$$= a^2 c^2 + b^2 c^2 + a^2 d^2 + b^2 d^2$$

$$= (a^2 c^2 + 2abcd + b^2 d^2) + (b^2 c^2 - 2abcd$$

$$+ a^2 d^2),$$

如 $bc \neq ad$ ，则 $x^2 y^2 > (ac + bd)^2$ ，

$$\therefore xy > ac + bd.$$

如 $bc = ad$, 则 $x^2 y^2 = (ac + bd)^2$,

$$\therefore xy = ac + bd.$$

$$\therefore xy \geq ac + bd.$$

(2) 反证法

假定求证式是正确的, 用恒等变换和不等式的性质推演下去, 如果得到一个正确的不等式, 而且推演的各步骤都是可逆的话, 那末, 求证式便正确了。

例如: a 、 b 、 c 是不全相等的正实数, 求证

$$bc(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b) > 6abc.$$

证明: $\because bc(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b)$
 $> 6abc.$

移项去括号, 得

$$b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + a^2b + ab^2 - 6abc > 0.$$

$$(ca^2 - 2abc + b^2c) + (bc^2 - 2abc + a^2b)$$

$$+ (ab^2 - 2abc + c^2a) > 0,$$

$$c(a-b)^2 + b(c-a)^2 + a(b-c)^2 > 0.$$

由于 $(a-b)^2 \geq 0$, 所以 $c(a-b)^2 \geq 0$, 同样
 $b(c-a)^2 \geq 0$, $a(b-c)^2 \geq 0$, 又由于这三个式子中, 最多只有一个式子等号是可以成立的, 即如 $a = b$, 而 $b \neq c$, $a \neq c$, 那末 $b(c-a)^2 > 0$, $a(b-c)^2 > 0$, 所以 $c(a-b)^2 + b(c-a)^2 + a(b-c)^2 > 0$, 而且各步骤又都是可逆的, 因而可反推得原不等式是正确的。

(3) 利用已知的正确不等式来证明

如果 a 、 b 是不相等的实数, 则 $(a-b)^2 > 0$, 即 $a^2 - 2ab + b^2 > 0$, 也即 $a^2 + b^2 > 2ab$, 这是一个很重要不等式, 证题时, 常用它来做基础, 去论证其他不等式。

例如： a 、 b 、 c 是不全相等的正实数，求证
 $bc(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b) > 6abc$ 。

证明： $\because a^2 + b^2 \geq 2ab, b^2 + c^2 \geq 2bc,$

$$c^2 + a^2 \geq 2ca,$$

其中等号最多只有一个式子可以成立。

又因 a 、 b 、 c 都是正实数，所以

$$a^2c + b^2c \geq 2abc, ab^2 + ac^2 \geq 2abc,$$

$$bc^2 + a^2b \geq 2abc,$$

$$\therefore a^2c + b^2c + ab^2 + ac^2 + bc^2 + a^2b > 6abc.$$

$$\text{即 } (b^2c + bc^2) + (c^2a + ca^2) + (a^2b + ab^2) > 6abc,$$

$$\text{也即 } bc(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b) > 6abc.$$

第六章 空间图形

一、教学目的

1. 通过本章教学，使学生进一步认识数学知识来源于实践并应用于实践，树立“实践第一”的观点。通过学习几种简单体（柱、锥、台、球）的相互关系和它们的体积计算公式之间的相互关系，了解这些简单体的个性和共性，了解正棱柱、正棱锥、正棱台转化为圆柱、圆锥、圆台的条件，从而对学生进行辩证唯物主义的教育；

2. 要求学生掌握直线和直线、直线和平面、平面和平面在空间的位置关系，线、面位置关系的重要定理和推论，并能运用这些知识解释生产上和日常生活中的一些现象，解决一些简单的实际问题；

3. 要求学生掌握柱、锥、台、球、球缺这几个简单体的定义、性质和体积计算公式，并能运用这些公式解决实践中的有关计算问题。

二、教材说明

1. 教材的编排顺序

本章教材是在学习了平面图形的基础上进行编排的，首先研究成空间图形的直线和平面的有关知识，然后介绍简单体的定义、性质和体积计算及其应用。这种安排如同在初中学习平面图形时先研究直线和直线的有关知识（平行线、垂线、角等），然后介绍三角形、四边形的概念、性质、判定

和有关计算及其应用一样。

因为当正棱柱、正棱锥、正棱台的底面边数无限增加时，它们就分别变为圆柱、圆锥、圆台，因此，把棱柱与圆柱、棱锥与圆锥、棱台与圆台分别归类为柱、锥、台，这有利于对学生进行辩证唯物论的教育。同时，棱柱与圆柱、棱锥与圆锥、棱台与圆台这三类形体各自的体积计算公式统一起来，所以按柱、锥、台安排，也有利于学生由浅入深，循序渐进地掌握和记忆这些公式。对球体的介绍则作为比较独立的内容置于最后。所以，教材在讲授简单体时，不分多面体与旋转体，而只按柱、锥、台、球来安排。

本章教材在介绍定理时一般不作论证，而是从实例引入。在后面的参考材料中，按论证要求重新安排了定理的顺序，并对定理作了证明。教师可根据具体情况对学习程度较好的学生作适当的介绍。

2. 教材的重点和难点

清楚地理解有关直线和直线、直线和平面、平面和平面位置关系的有关重要概念是学好本章的关键。如果这些概念不清楚，没有空间想象能力，就不可能正确地理解和牢固地掌握直线、平面的各种重要性质和判定，因此，这是本章教学的重点，教学时要着重使学生掌握基本概念，培养学生的空间想象能力。

教材的重点是异面直线、直线和平面平行、垂直位置关系以及柱、锥、台、球、球缺的体积计算。体积计算，在实践中经常遇到，要求学生很好地掌握和运用。

教材的难点是异面直线的位置关系、直线和平面平行、垂直的性质和判定。因为学生初次接触空间概念和在平面上表示的空间（立体）图形，加上有关定理较多，容易混淆，

学起来会比较困难。为了解决这些难点，教材注意多从学生所熟悉的具体事例引入或解释，也就是应用从具体到抽象，从特殊到一般的方法阐明有关定义和定理。为了加深学生对教材的理解和运用，教学时要尽可能利用实物和模型。

3. 教学课时的安排

本章教学时数约需40课时，各节教学课时大致分配如下：

第一节	直线和平面	约16课时
第二节	柱体	约5课时
第三节	锥体	约5课时
第四节	台体	约5课时
第五节	球体	约4课时
复 习		约5课时

第一节 直线和平面

一、教学要求

1. 要求学生在平面图形的基础上，进一步认识三维空间，对于空间的点、直线和平面有明确的概念，并且了解空间图形在平面内的表示法，以培养学生的空间概念；

2. 要求学生牢固掌握平面的三个基本性质及从性质3推得的三个推论；

3. 要求学生掌握直线和直线、直线和平面、平面和平面位置关系的概念和画法。这是学好线、面位置关系的定理和推论的关键；

4. 要求学生记住线、面位置关系的14个定理和推论，

并能用之来解析在生产上和日常生活中的一些简单问题。

二、教学建议

1. 在讲授 6.1 节平面之前,可向学生提出下列三点,使学生明确所学的知识:

(1) 在空间图形里所研究的基本元素是点、线、面、体;

(2) 要求学生注意空间图形中所提到的点、直线等不一定是在一个平面内,这是与平面图形的明显区别;

(3) 指出现在要较详细地研究平面的概念,并指出平面是基本概念,应有足够的重视。

2. 关于平面的教学

(1) 平面表示法

先通过实例给出平面的形象。例如黑板面、墙面、桌面、平静的水面等。

然后再给出图 6·1(1)、

(2), 让学生判断(1)、

(2)两图哪一个直观性

强,从而说明为什么通常用平行四边形来表示平面。

(2) 要强调数学上的平面是无限伸展的,正象直线是无限伸长的一样。因而我们虽然用平行四边形表示平面,但这只是表示平面的一部分。两个平面相交,交线也是一条直线,不是线段。

(3) 平面的基本性质

平面的三条基本性质是三条公理,它与以前所学的平面图形的有关定义、公理和定理都是空间线面关系论证的基

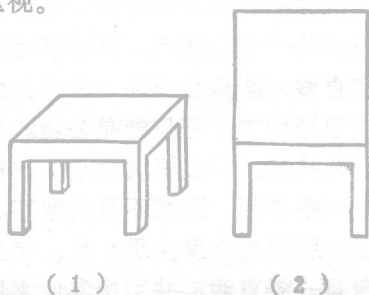


图 6·1