高 等 教 育 教 材

初等数学

（财经类）

西部、东北高职高专数学教材编写组

Mathematic
Mathematic
Mathematic

高等教育出版社

高等教育教材

初等数学

（财经类）

西部、东北高职高专数学教材编写组

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

初等数学:财经类/西部、东北高职高专数学教材编写组主编. -北京:高等教育出版社,2002.8

ISBN 7-04-011340-6

Ⅰ.初… Ⅱ.西… Ⅲ.初等数学-高等学校:技术学校-教材 Ⅳ.012

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 056558 号

责任编辑 邵 勇 孙鸣雷
封面设计 吴 昊
责任印制 蔡敏燕

书　　名 初等数学(财经类)
主　　编 西部、东北高职高专数学教材编写组

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号		021-56964871
邮政编码	100009	**免费咨询**	800-810-0598
传　　真	010-64014048	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
	021-56965341		http://www.hep.com.cn
			http://www.hepsh.com
排　　版	南京理工排版校对工作		
印　　刷	上海市印刷七厂		
开　　本	787×1092　1/16	**版　　次**	2002 年 8 月第 1 版
印　　张	19.25	**印　　次**	2002 年 8 月第 1 次
字　　数	480 000	**定　　价**	17.80 元

凡购买高等教育出版社图书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请在所购图书销售部门联系调换。

西部、东北财经类高职高专教材

编 委 会

编 者 的 话

本教材根据2000年教育部《应用数学基础》课程基本要求编写，供五年制高职学生使用.

本教材遵循“拓宽基础，强化能力，立足应用”，“必需、够用为度”的原则编写，强调与计算机应用相结合，书中编写了计算器的使用简介.教师在教学中适当安排时间组织数学实验，以便学生掌握计算机器的使用，解决相关问题.

为把学生培养成有较宽的数学基础，具有创新意识，懂得管理，有较强应用能力的高素质人才，本书对传统数学体系削枝强干，力求深入浅出，在不影响数学体系的前提下，淡化理论推导，强化实践能力培养，教材加强了例题和习题的编写，使数学理论和实际应用结合得更紧密.教材渗透了数学建模思想，整体上有一定的创新.

教材展示了数学广泛的应用，编写了大量新颖的例题、习题，其中有许多数学在其他学科中应用的题目，特别是经营管理，经济行为方面，这些题目有助于开阔学生视野、启迪思维，激发学生对数学的学习兴趣，从而学生不仅会学数学，也会用数学，这对于提高学生素质，培养能力方面也大有好处.

教材富有弹性，有的部分加有“*”号或整节加有“*”号的内容，供教师根据专业的特点与学生的实际选用.本书立足“好教、好学”，每节复习题分A组和B组两组题，A组为基本题，B组供学生选用.在内容选择和文字叙述上，始终贯穿准则，力求使本教材成为师生欢迎的教材.考虑到地区差距，在强调用计算器、计算机的同时，也保留了使用数学用表处理计算问题的内容，虽然这些内容对于发达地区显得有点“过时”.本书后面附有常用对数表、反对数表和三角函数表，供经济欠发达地区的一些学生使用.

本书也适合中职、职高学生作为初等数学教材.对于参加成人高考的学生也适合.

本书由谢惠延任主编，王福成、高敏、卢建铿任副主编，张正泉、谭伯渊、赵云河、宗建明、胡国平、王健、文宗田、李秋敏参加编写，由何成善任主审，刘维娜、杨兴、龙独厚任副主审，何鹏光、岳健民、冯安大、邹玉琴、罗卫东、宋欣、张志强参加审稿.

四川大学数学科学学院熊华鑫、白苏华教授审阅了全书稿，提出了许多宝贵意见，在此表示衷心的感谢.

由于编者水平有限和时间仓促，错误之处在所难免，恳请使用本教材的广大师生批评指正，以便我们修订提高.

西部、东北高职高专数学教材编写组

2002.6

目　　录

第一章　集合与函数

集合(set)是数学中的一个重要概念.集合的理论在现代数学中起着非常重要的作用.函数(function)也是数学中最基本的重要概念.本章首先介绍集合理论中最基本的常识,讨论集合的并、交、差、补等简单运算,然后介绍简易逻辑和某些不等式的解法.最后介绍函数及反函数的有关概念.

§1-1　集　　合

一、集合的概念

在经济活动中,涉及到许许多多的关系.例如,商品的销售量与营业额、价格与销售量、存款的人数与存款额等等.我们在研究各种关系时,常常需要研究某些对象组成的集体.例如,某一商品的产销地、某一批产品、某商店十月份每天的营业额、全体正整数和全体实数等.这些对象组成的集体都是集合.

一般说来,**集合**(简称**集**)是具有某种属性的对象的全体,构成集合的各个对象,称为集合的**元素**.

通常,我们用大写字母 A、B、C 等表示集合,用小写字母 a、b、c 等表示集合的元素.

如果 a 是集合 A 的元素,记为$a\in A$,读作"a 属于 A";反之,如果 a 不是 A 的元素,记为 $a\notin A$(或 $a\overline{\in} A$),读作"a 不属于 A".

下面举几个集合的例子:

(1) 京广铁路上的全体车站组成一个集合,该线路上的每个车站都是该集合的元素;

(2) 方程 $x^2-1=0$ 的全体实数根组成一个集合,该方程的两个实数根 1 与 -1 就是该集合的两个元素;

(3) 不等式 $3x-2>0$ 的所有解组成一个集合,凡是满足 $x>\frac{2}{3}$ 的实数都是这个集合的元素;

(4) 某工厂的全体管理人员(包括各厂长、各车间主任、各科室人员、各班组长等)组成一个集合,每一个厂长、每一个车间主任……都是这个集合的元素;

(5) 某种商品的产地组成一个集合,该商品的每一产地都是这个集合的元素;

(6) 某圆周上所有的点组成一个集合,该圆周上的每一个点都是该集合的元素;

(7) 所有的平行四边形组成一个集合,每个平行四边形都是该集合的元素.

由数组成的集合称为**数集**.而由点组成的集合称为**点集**.

常见的数集有下面一些:

全体自然数(**规定 0 是自然数**)的集合称为**自然数集**,记为 $\mathbf{N}$;

全体整数的集合称为**整数集**,记为 $\mathbf{Z}$;全体有理数的集合称为**有理数集**,记为 $\mathbf{Q}$;

全体实数的集合称为**实数集**,记为 $\mathbf{R}$.

在一个表达某数集的字母的右上角标以"+"或"-"号，分别表示该数集中的全体正数或负数构成的集合. 例如：$\mathbf{Z}^+$ 表示正整数集，而 $\mathbf{R}^-$ 表示负实数集.

例 1 分别指出数 2、-3、$\frac{3}{4}$、$\sqrt{2}$与数集 $\mathbf{N}$、$\mathbf{Z}$、$\mathbf{Q}$、$\mathbf{R}$ 的关系.

解 $2\in\mathbf{N}$, $-3\notin\mathbf{N}$, $\frac{2}{3}\notin\mathbf{N}$, $\sqrt{2}\notin\mathbf{N}$, $2\in\mathbf{Z}$, $-3\in\mathbf{Z}$,

$\frac{2}{3}\notin\mathbf{Z}$, $\sqrt{2}\notin\mathbf{Z}$, $2\in\mathbf{Q}$, $-3\in\mathbf{Q}$, $\frac{2}{3}\in\mathbf{Q}$, $\sqrt{2}\notin\mathbf{Q}$,

$2\in\mathbf{R}$, $-3\in\mathbf{R}$, $\frac{2}{3}\in\mathbf{R}$, $\sqrt{2}\in\mathbf{R}$.

例 2 设 X 是方程 $x^2-5x-6=0$ 的全部根所组成的集合，问 0 和 -1 是不是 X 的元素？

解 由于方程 $x^2-5x-6=0$ 的根为 -1 和 6，即 X 是由 -1 和 6 两个元素所组成的集，因此，$0\notin X$，$-1\in X$.

例 3 某百货商店第一批进的货是帽子、皮鞋、热水瓶、闹钟，第二批进的货是收音机、皮鞋、尼龙袜、茶杯、闹钟，问该百货商店一共进了多少种品种的货？

解 因为在第二批进货中的皮鞋和闹钟第一批已有了，不应重复计算，因此该百货商店一共进了 7 个品种的货.

从上面讨论中，可以得出，对于一个给定集合，它具有下列性质：

(1) 集合中的元素是确定的. 这就是说，任何一个对象或者是这个给定集合的元素，或者不是它的元素.

(2) 集合中的元素是互异的. 这就是说，集合中任何两个元素都是不同的对象，相同的对象归入任何一个集合时，只能算为这个集合的一个元素.

(3) 集合中元素之间一般是不考虑顺序的.

二、集合的表示方法

集合的表示方法，常用的有列举法和描述法.

1. 列举法

把集合中的元素一一列举出来，写在花括号"{ }"内来表示集合的方法，称为**列举法**.

例如，不大于 5 的自然数所组成的集合，可以表示为$\{0,1,2,3,4,5\}$.

当集合的元素很多，不需要或不可能一一列出时，也可以写出几个元素，其它用省略号表示. 例如，小于 100 的自然数集可以表示为$\{0,1,2,\cdots,99\}$，正偶数集可表示为$\{2,4,\cdots,2n,\cdots\}$.

2. 描述法

把集合中元素的共同属性描述出来写在花括号内来表示集合的方法，称为**描述法**. 一般采用的形式为

{元素的一般形式|元素的共同属性}或{元素的一般形式:元素的共同属性}.

例如，

由不等式 $x-3>2$ 的所有解组成的集合，可表示为

$$\{\text{不等式 } x-3>2 \text{ 的解}\} \text{或} \{x \mid x-3>2\};$$

由直线 $y=kx+b$ 上的所有点所组成的集合，可表示为

$$\{直线\ y=kx+b\ 上的点\}或\{(x,y)\mid y=kx+b\};$$

由所有直角三角形组成的集合,可表示为

$$\{直角三角形\}或\{\triangle ABC\mid \triangle ABC\ 有一内角为\ 90^\circ\};$$

由所有小于 6 的正整数组成的集合,可表示为

$$\{小于\ 6\ 的正整数\}或\ \{x\mid x<6,x\in \mathbf{N}\}.$$

以上所述的列举法和描述法是集合的两种不同的表示方法.实际运用时究竟选用哪种表示法,要由具体问题来定.

例如,$x^2-1=0$ 的根组成的集合可用$\{-1,1\}$和$\{x\mid x^2-1=0\}$两种方法表示;

大于零小于 5 的全体实数组成的集合就不能用列举法表示,但它可用描述法表示,用描述法表示为$\{x\mid 0<x<5,\ x\in \mathbf{R}\}$.

通常 $x\in \mathbf{R}$ 的这一属性可省略,因此集合$\{x\mid 0<x<5,\ x\in\mathbf{R}\}$可表示为 $\{x\mid 0<x<5\}$.

三、集合的分类

如果集合 A 所包含的元素为有限个,则称 A 为**有限集合**,此时 A 中元素的个数记为$n(A)$.例如,前面列举的七个实例中,(1)、(2)、(4)、(5)均为有限集;例 2 中的集合 X 为有限集,且 $n(X)=2$. 在有限集中,只含一个元素的集合称为**单元素集**.例如,集合$\{x\mid x+1=2\}$就是单元素集$\{1\}$.

如果集合所包含的元素为无限多个,则称此集合为**无限集合**(简称**无限集**).

例如,$\{x\mid x>2\}$、$\mathbf{N}$、$\mathbf{Q}$、$\mathbf{R}$ 等都是无限集.本书不讨论无限集元素的个数.

不含任何元素的集合称为**空集**,记为$\varnothing$,空集中所含元素的个数是零,即 $n(\varnothing)=0$. 例如,如果集合 $\{x\mid x^2+1=0,x\in\mathbf{R}\}$ 记为 A,则 A 是空集,$n(A)=0$.

应当指出,$\{0\}$是仅含一个元素 0 的集合,它与$\varnothing$所表示的意义是不同的;a 与$\{a\}$也是不同的,前者表示一个元素,后者表示只含有一个元素 a 的单元素集.

四、集合与集合的关系

设集合 A 为$\{2,3\}$,集合 B 为$\{1,2,3,4\}$,显然集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素,对于这样的两个集合,我们有下面的定义:

定义 1 设 A 和 B 是两个集合,如果 A 中的每一个元素都是 B 中的元素,则称集合 A 为集合 B 的**子集**(subset),记为 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$, 读作"A 包含于 B"或"B 包含 A". 如果集合 A 不是集合 B 的子集,记为 $A\nsubseteq B$ 或 $B\nsupseteq A$, 分别读作"A 不包含于 B"或"B 不包含 A".

例 4 (1) 在数集 $\mathbf{N}$、$\mathbf{Z}$、$\mathbf{Q}$、$\mathbf{R}$ 中,因为自然数都是整数,所以 $\mathbf{N}$ 中的每个元素都是 $\mathbf{Z}$ 的元素,所以 $\mathbf{N}\subseteq\mathbf{Z}$. 同理有 $\mathbf{Z}\subseteq\mathbf{Q},\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{R}$.

(2) 设 A 为$\{x\mid x^2-5x+6=0\}$,B 为$\{n\mid 1<n<5,\ n\in\mathbf{N}\}$,则 A 为$\{2,3\}$,B 为$\{2,3,4\}$.显然 A 中的每一个元素都是 B 的元素,所以 $A\subseteq B$.

(3) 设 C 为$\{1,2,3,4\}$,D 为$\{0,2,4,5\}$,由于 $1\in C$,而 $1\notin D$,因此$C\nsubseteq D$.

(4) 空集$\varnothing$是任何集合 A 的子集,即$\varnothing\subseteq A$.

(5) 对于任一个集合 A,由于它的任何元素都属于集 A 本身,因此$A\subseteq A$.

由子集的定义易知,若$A\subseteq B$,且 A,B 是有限集,则有 $n(A)\leqslant n(B)$.

定义 2 如果集合 A 是集合 B 的子集，并且 B 中至少有一个元素不属于 A，则称 A 为 B 的**真子集**，记为 $A \subset B$ 或$B \supset A$（也可以记为 $A \subsetneqq B$ 或 $B \supsetneqq A$）.

在例 4(1)中，我们有 $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}, \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}, \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$. 例 4(2)中，我们有 $A \subset B$.

由真子集的定义，对于任一非空集合 A，我们有 $\varnothing \subset A$.

为了形象地表示集合之间的关系，通常用圆（或其它封闭曲线）所围成的图形表示集合，用图形内的点表示该集合的元素，这种表示集合的图形称为**韦氏(Venn)图**. 图 1-1 表示 A 是 B 的真子集.

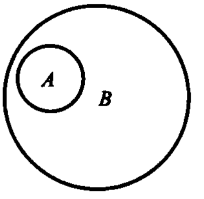


图 1-1

定义 3 设 A 和 B 是两个集合，如果 $A \subseteq B$，并且 $B \subseteq A$，则称集合 A 与集合 B **相等**，记为 $A = B$.

例 5 设集合 $A = \{1, 2\}$，集合 $B = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$，易见 B 中所含的元素为 1 和 2，因此 $A = B$.

例 6 写出集合$\{a, b, c\}$的所有子集和真子集.

解 集合$\{a, b, c\}$的所有子集为：$\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{a, b\}$，$\{a, c\}$，$\{b, c\}$，$\{a, b, c\}$. 其中，除去$\{a, b, c\}$外，均为集$\{a, b, c\}$的真子集.

习题 1-1

1. 在下列各题中的____处填上合适的符号（$\in$ 或 $\overline{\in}$）：

(1) $\frac{1}{2}$ ______ $\mathbf{N}$；　(2) 0 ______ $\mathbf{Z}^+$；　(3) -3 ______ $\mathbf{Q}^-$；

(4) $\sqrt{5}$ ______ $\mathbf{R}^+$；　(5) 1 ______ $\mathbf{Q}$；　(6) π ______ $\mathbf{Q}$.

2. 用列举法或描述法表示下列各集合：

(1) 全体偶数；　(2) 所有正奇数；　(3) 小于 10 的正质数；

(4) 某班本期课表上所含的学科；　(5) 平面直角坐标系中第一象限的点.

3. 在下列各题中的______填上合适的符号（$\in, \overline{\in}, =, \subset, \not\subseteq, \supset$）：

(1) $\varnothing$ ______ $\{a\}$；　(2) a ______ $\{a\}$；　(3) $\{3\}$ ______ $\{x \mid x^2 - 9 = 0\}$；

(4) $\varnothing$ ___ $\left\{x \,\middle|\, \frac{(x-2)^2}{x-2} = 0\right\}$；　(5) $\{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$ ______ $\{n \mid n < 3, n \in \mathbf{N}\}$；

(6) $\{x \mid x = 2k+1, k \in \mathbf{Z}\}$ ______ $\{x \mid x = 4k+1, k \in \mathbf{Z}\}$；

(7) $\{2,3\}$ ______ $\{3,4\}$；　(8) $\{a,b,c\}$ ______ $\{b,c,a\}$.

4. 若 $A \subset B$，则 A 的所有元素只是 B 的元素的______，“$\subset$”关系一定是“$\subseteq$”关系，反之______成立.

§1-2 集合的运算

先看下面问题：

某百货商店，一天进了两批货，这两批货的品种集合分别为 $A_1 = \{$帽子，皮鞋，手套，闹钟$\}$，$A_2 = \{$电视机，皮鞋，领带，茶杯，闹钟$\}$. 问：

(1) 两批进货中相同的有哪几种？　(2) 两批进货中共有哪些品种？

(3) 第二批进货里第一批货没有的品种是哪几种？

这三个问题分别对应于集合之间的三种运算，下面我们将分别进行研究.

一、交集与交运算

在第一个问题中，设两批货中相同品种组成一个新集合 A_3，则 $A_3 = \{$皮鞋，闹钟$\}$，新集合 A_3

中的每个元素都同时属于集合 A_1 和 A_2. 对 A_3 这种集合,我们给出如下定义:

定义 1 设 A 和 B 是两个集合,由 A 与 B 的所有公共元素所组成的集合,称为集合 A 与集合 B 的**交集**(intersection),记为$A\cap B$,读作"A 交 B",即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

求集合的交集的运算称为**交运算**.

图 1-2 中的阴影部分表示了集合 A 与 B 的交集$A\cap B$,它分为 $A\cap B\neq\varnothing$(图 1-2 中的(1)、(3)、(4),其中(3)、(4)是(1)的特殊情形)和 $A\cap B=\varnothing$(图 1-2 中的(2))两种情形.

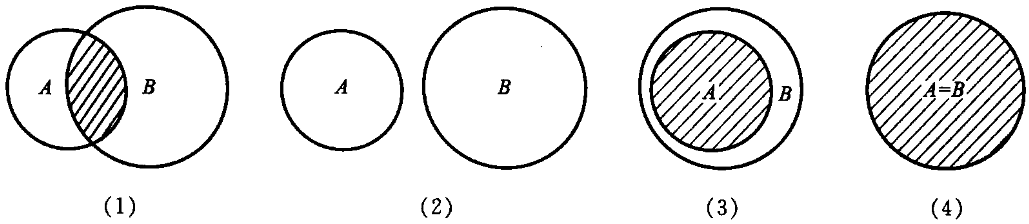


图 1-2

例 1 设 $A = \{x \mid x > -2\}$, $B = \{x \mid x < 4\}$,求$A \cap B$.

解 $A \cap B = \{x \mid x > -2\} \cap \{x \mid x < 4\} = \{x \mid x > -2 \text{ 且 } x < 4\}$
$= \{x \mid -2 < x < 4\}$.

例 2 设 $A = \{2,4,7\}$, $B = \{-2,0,2,4\}$, $C = \{2,3,5\}$,求:$A \cap B$, $A \cap B \cap C$.

解 $A \cap B = \{2,4\}$, $A \cap B \cap C = \{2\}$.

例 3 求{矩形}∩{菱形}.

解 原式={既是矩形又是菱形的图形}={正方形}.

由交集的定义,可以得出集合的交运算具有下列性质:

(1) 交换律 $A \cap B = B \cap A$;

(2) 结合律 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

(3) 包含律 $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$;

(4) 吸收律 若 $A \subseteq B$, 则 $A \cap B = A$,

特别地,有 $A \cap A = A$, $\varnothing \cap A = \varnothing$, $\varnothing \cap \varnothing = \varnothing$;

(5) 若 A、B 均为有限集,则 $n(A \cap B) \leqslant n(A)$, $n(A \cap B) \leqslant n(B)$.

二、并集与并运算

现在考虑本节开始时提出的第二个问题,即两批货共有哪几种? 它实际上是将第一批货与第二批货合并在一起(相同的货只算一种)组成一个新集合 A_4,于是 A_4={帽子,皮鞋,手套,闹钟,电视机,领带,茶杯}. 对 A_4 这种集合,我们给出如下定义:

定义 2 设 A 和 B 是两个集合,由属于 A 或属于 B 的所有元素组成的集合,称为 A 与 B 的**并集**(union),记为$A\cup B$,读作"A 并 B",即 $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$.

求集合的并集的运算称为**并运算**.

图 1-3 中的阴影部分表示了集合 A 与 B 的并集$A\cup B$,它分为 $A\cap B\neq\varnothing$(图 1-3 中的(1)、

(3)、(4)，其中(3)、(4)是(1)的特殊情形)和 $A\cap B=\varnothing$(图 1-3 中的(2))两种情形.

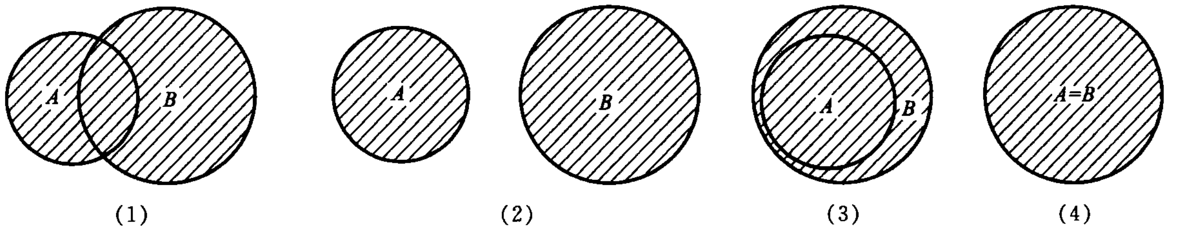


图 1-3

例 4 设 $A=\{x\mid -1<x<2\}, B=\{x\mid 1<x<3\}$，求$A\cup B$.

解 $A\cup B=\{x\mid -1<x<2$ 或 $1<x<3\}=\{x\mid -1<x<3\}$ (如图 1-4).

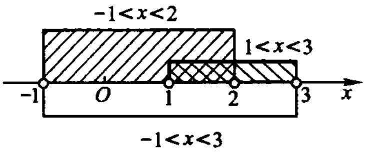


图 1-4

***例 5** 写出方程 $(x^2-1)(x^2+x-2)=0$ 的解集.

解 方程 $(x^2-1)(x^2+x-2)=0$ 的解集为

$$
\begin{aligned}
&\{x\mid (x^2-1)(x^2+x-2)=0\}\\
=&\{x\mid x^2-1=0 \text{ 或 } x^2+x-2=0\}\\
=&\{x\mid x^2-1=0\}\cup\{x\mid x^2+x-2=0\}\\
=&\{-1,1\}\cup\{-2,1\}=\{-2,-1,1\}.
\end{aligned}
$$

例 6 设 $A=\{1,2,3\}, B=\{1,3,5\}, C=\{2,4,6\}$，求:$A\cup B$, $A\cup B\cup C$.

解 $A\cup B=\{1,2,3,5\}$， $A\cup B\cup C=\{1,2,3,4,5,6\}$.

由并集定义,可以得出集合的并运算具有下列性质:

(1) 交换律 $A\cup B=B\cup A$;

(2) 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$;

(3) 包含律 $A\cup B\supseteq A$, $A\cup B\supseteq B$;

(4) 吸收律 若 $A\subseteq B$,则$A\cup B=B$,

特别地,有 $A\cup A=A$, $\varnothing\cup A=A$, $\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$;

(5) 若 A、B 均为有限集,则有

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B). \qquad (1\text{-}1)$$

公式(1-1)通常称为**两集合的并集计数公式**.

例 7 设甲商店和乙商店分别经销 125 种和 120 种商品,其中有 50 种相同,问甲、乙两商店共经销有多少种商品?

解 设甲、乙两商品品种集合分别为 A 和 B,由题意有

$$n(A)=125, n(B)=120, n(A\cap B)=50.$$

因此 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=125+120-50=195.$

即 甲乙两商店共经销 195 种商品.

习题 1-2(1)

1. 设 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$，$B=\{4,5,6,7,8,9\}$，求：$A\cap B$，$A\cup B$.

2. 设 $A=\{x\mid x\leqslant 10, x\in \mathbf{N}\}$，$B=\{x\mid x=2n, n\leqslant 5, n\in \mathbf{N}\}$，$C=\{x\mid x=2n+1, n\leqslant 5, n\in \mathbf{N}\}$，求：

$$A\cup B,\quad A\cap B,\quad B\cap C,\quad B\cup C.$$

3. 填空：

(1) {正偶数}∪{正奇数}=______；　　(2) $\mathbf{Z}^+\cup\mathbf{Z}^-=\{x|x$ 是______$\}$；

(3) $\mathbf{Z}\cap\mathbf{N}=$______，　$\mathbf{R}^+\cap\mathbf{Q}=$______.

4. 判断下列各命题的正误(其中 A、B 没有任何限制条件)：

(1) 若 $A\cup B=\varnothing$，则 $A=\varnothing$ 且 $B=\varnothing$；　(　　)

(2) 若 $A\cap B=\varnothing$，则 $A=\varnothing$ 或 $B=\varnothing$；　(　　)

(3) 对有限集 A、B，若 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$，则有 $A\cap B=\varnothing$；　(　　)

(4) 若 $A\cap B=A\cup B$，则 $A=B=\varnothing$.　(　　)

*三、差集与差运算

现在考虑本节开始时提出的第三个问题，即第二批进货中，第一批货没有的货物品种有哪几种？它实际上是求在 A_2 中有而在 A_1 中没有的那些货物所组成的一个新集合 $A_5=\{$电视机，领带，茶杯$\}$. 对 A_5 这种集合，我们给出如下定义：

定义 3　设 A 和 B 是两个集合，由属于 A 而不属于 B 的所有元素组成的集合，称为集合 A 与 B 的**差集**(difference)，记为$A-B$，读作“A 减 B”，即

$$A-B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}.$$

求两个集合的差集的运算，称为**差运算**.

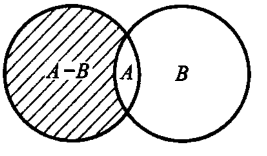


图 1-5

图 1-5 中的阴影部分表示集合 A 与 B 的差集 $A-B$. 差集 $A-B$ 是在 A 的元素中去掉 A、B 的公共元素后剩下的元素组成的集合.

例 8　设 $A=\{-1,0,1,2,3,4\}$，$B=\{-3,-1,1,3,5\}$，求：$B-A$，$A-B$.

解　$B-A=\{-3,5\}$，$A-B=\{0,2,4\}$.

例 9　求分式方程 $\dfrac{x^2-x-2}{x-2}=0$ 的解集.

解　$$\left\{\text{方程}\frac{x^2-x-2}{x-2}=0\text{ 的解}\right\}=\{x\mid x^2-x-2=0\}-\{x\mid x-2=0\}$$
$$=\{2,-1\}-\{2\}=\{-1\}.$$

由差集的定义，可以得出集合的差运算具有下列性质：

(1) $A-B\subseteq A$；

(2) 若$A\subseteq B$，则 $A-B=\varnothing$，

特别地，有$A-A=\varnothing$，$\varnothing-A=\varnothing$，$\varnothing-\varnothing=\varnothing$；

(3) $A-B=A-(A\cap B)$，或 $A-B=(A\cup B)-B$；

(4) 若 A、B 均为有限集时，则

$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)\tag{1-2}$$

四、补集与补运算

前面我们已学了差集，下面将介绍一种特殊的差集.

定义 4 如果一个给定的集合能够包含所研究的那些集合的全部元素，则此给定的集合称为所研究的那些集合的**全集**(universal set)，记为 Ω. 全集的韦氏图常用矩形表示.

例如，在研究某班各类学生的组成时，可将全集给定为"该班的全体学生"，"该年级的全体学生"，"该校的全体学生"等等. 在一定范围内，全集总是一定存在的.

定义 5 设 Ω 为全集，$A \subset \Omega$ 则称 $\Omega - A$ 为 A 的**补集**(complement)，记为 $\overline{A}$(或 $\complement_{\Omega} A$ 或 $\complement_A$)，读作"A 补"，即

$$\overline{A} = \{x \mid x \in \Omega \text{ 且 } x \notin A\}.$$

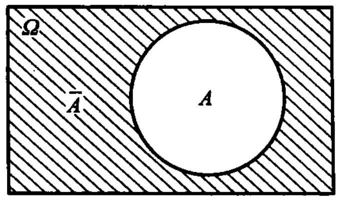


图 1-6

求补集的运算称为**补运算**.

图 1-6 中的阴影部分表示了 A 的补集 $\overline{A}$.

集合 A 的补集 $\overline{A}$ 是对全集而言的，对于同一个集合 A，若全集 Ω 不同，其补集 $\overline{A}$ 也不同. 例如，若 $A = \{1, 3, 5\}$，当 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 时，$\overline{A} = \{2, 4, 6\}$；但当 $\Omega = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 时，$\overline{A} = \{7, 9\}$.

由补集的定义，我们得到补运算有如下性质：

(1) $A \cup \overline{A} = \Omega$，　　$A \cap \overline{A} = \varnothing$；

(2) $A \cup \Omega = \Omega$，　　$A \cap \Omega = A$；

(3) $\overline{\Omega} = \varnothing$，　　$\overline{\varnothing} = \Omega$，　　$\overline{\overline{A}} = A$；

(4) 若 Ω 为有限集时，则

$$n(\Omega) = n(A) + n(\overline{A}). \tag{1-3}$$

例 10 设 $\Omega = \{a, b, c, d, e, f\}$，$A = \{a, b, c\}$，$B = \{e, f\}$. 求证：

(1) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$；　　(2) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

证 (1) $A \cup B = \{a, b, c, e, f\}$，$\overline{A \cup B} = \{d\}$.

又
$$\overline{A} = \{d, e, f\}, \overline{B} = \{a, b, c, d\}, \overline{A} \cap \overline{B} = \{d\},$$

因此
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

(2) $A \cap B = \varnothing$，$\overline{A \cap B} = \overline{\varnothing} = \Omega$. 又 $\overline{A} \cup \overline{B} = \{a, b, c, d, e, f\} = \Omega$，

因此
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

例 11 抽检某超市出售的 60 种袋装食品中，其中卫生指标合格的有 48 种，重量指标合格的有 52 种，两项指标合格的有 42 种，求：

(1) 卫生指标合格而重量指标不合格的有多少种？

(2) 重量指标合格而卫生指标不合格的有多少种？

(3) 两种指标都不合格的有多少种？

解 设 A＝{卫生指标合格}，B＝{重量指标合格}，Ω＝{抽检的袋装食品}.

由已知，$n(\Omega) = 60$，$n(A) = 48$，$n(B) = 52$，$n(A \cap B) = 42$，于是

(1) {卫生指标合格而重量指标不合格} $= A - B = A - (A \cap B)$，由公式(1-2)，得

$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=48-42=6(\text{种}).$$

(2) {重量指标合格而卫生指标不合格} $=B-A=B-(A\cap B)$，由公式(1-2)，得

$$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)=52-42=10(\text{种}).$$

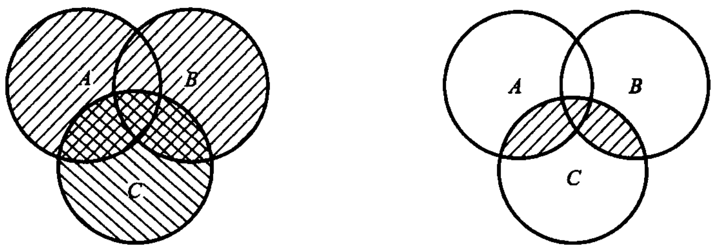
(3) 由公式(1-3)得 $n(\overline{A})=60-48=12$(种)，$n(\overline{B})=60-52=8$(种)，
因为，$\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{(A\cup B)}$. 由(1-1)得

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=48+52-42=58(\text{种}),$$

$$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})=n(\Omega)-n(A\cup B)=60-58=2(\text{种}).$$

五、集合的运算律

集合的运算律除了前面在交、并运算中已介绍的交换律和结合律外，还有下面一些基本运算律(图 1-7、图 1-8)：



$(A\cap B)\cup C$　　　　$(A\cup C)\cap(B\cup C)$

图 1-7

$\overline{A\cup B}$　　　　$\overline{A}\cap\overline{B}$

图 1-8

(1) 分配律　　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C);$$

(2) 吸收律

$$(A\cup B)\cap A=A,(A\cap B)\cup A=A;$$

$$(A\cup B)\cap B=B,(A\cap B)\cup B=B;$$

(3) 德 · 摩根(De. Morgan)公式(或反演律)：

$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B},\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}.$$

六、区间

在研究函数和解不等式(组)时常用到区间的概念，它是一类特殊的数集. 设 a、b 是两个实