21 世纪高等院校教材

概率论与数理统计

周仲礼　詹小平
刘　琴　张建亮　编

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等院校教材

概率论与数理统计

周仲礼　詹小平　刘　琴　张建亮　编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书主要包括概率论基本概念、随机变量、概率分布、数字特征、极限定理、参数估计、假设检验等内容. 编写特色在于内容选择比较基本，叙述详尽，强调直观性，注重可读性. 在理论讲述基础上，引入了 Excel 软件计算和应用案例，反映了学科的发展趋势，同时也能培养学生应用知识的能力. 另外，本书还配备了大量的习题以及详尽的答案，方便广大读者使用.

本书可作为民办本科、独立院校、专科院校非数学专业“概率论与数理统计”教材，尤其适合数学基础一般的学生，也适合广大读者自学参考.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/周仲礼，詹小平，刘琴，张建亮编. —北京：科学出版社，2009

21 世纪高等院校教材

ISBN 978-7-03-025216-6

Ⅰ. 概… Ⅱ. ①周…②詹…③刘…④张… Ⅲ. ①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 140195 号

责任编辑：李晓鹏 赵 靖 / 责任校对：张 琪

责任印制：张克忠 / 封面设计：陈 敬

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

骏 杰 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 8 月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2009 年 8 月第一次印刷 印张：10 3/4

印数：1—4 000 字数：207 000

定价：18.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

“概率论与数理统计”是培养学生利用随机思维模式看待和处理现实问题的一门重要数学基础课程.随着社会各方面的高速发展,概率统计的思维和方法得到了日益广泛的应用,对“概率论与数理统计”的教学工作也相应地提出了越来越高的要求.

本书主要为数学基础一般的学生所编写,适合民办本科、独立院校、专科院校选作“概率论与数理统计”课程的教材.和以往的教材相比本书有以下特点:

(1) 注重基础,叙述详尽.本书着眼于介绍“概率论与数理统计”中的基本概念、基本原理和基本方法,比较初步.在叙述上尽量做到不跳跃,涉及的前修课程中的概念和原理都会给出.

(2) 引入计算软件.由于“概率论与数理统计”课程本身的特点,很多计算或者方法的应用都要依赖于计算机,所以本书介绍了 Excel 中的一些命令和菜单,希望能帮助学生建立数据处理的基本思想,同时也加深对课程理论的理解.

(3) 引入应用案例.考虑到“概率论与数理统计”的应用性比较强,本书的一些章节引入了一些比较典型的应用案例,一方面可以提高学生对理论学习的兴趣,另一方面可以熟悉方法的应用,了解所学知识的学术前沿.

本书的部分内容加上了“*”,一般可以不讲,其余内容需要 50 学时来讲授.对于带“*”的内容,学有余力的学生可以自学.书后配有大量练习,适合学生进行自测.

本书由周仲礼老师组织编写,概率论部分由詹小平和刘琴编写,数理统计部分由张建亮编写,最后由詹小平统稿、定稿.书中的部分例题及案例选自书后所列参考文献.

本书的出版得到了成都理工大学工程技术学院郦仁老师、田琳老师的大力支持.东北师范大学高巍教授仔细地审阅了本书的初稿,并给出了许多宝贵的意见,这对本书质量的提高起到了重要作用.另外,在本书编写过程中,何平、罗绍锡两位老师也给了不少帮助,在此一并表示由衷的感谢.

由于时间仓促,作者学识和经验有限,书中不当和疏漏之处在所难免,敬请各位同行和读者不吝赐教.

编　者

2009 年 5 月

目　　录

前言
第 1 章　随机事件与概率 …… 1
1.1　随机事件及其运算 …… 1
1.1.1　随机事件 …… 1
1.1.2　事件的关系和运算 …… 3
1.2　概率是什么 …… 5
1.2.1　频率与概率 …… 5
1.2.2　古典概型 …… 6
*1.2.3　几何概型 …… 8
1.2.4　概率的公理化定义 …… 9
1.3　条件概率 …… 10
1.3.1　条件概率 …… 10
1.3.2　乘法公式 …… 12
1.3.3　全概率公式与贝叶斯公式 …… 13
1.4　事件的独立性 …… 15
1.4.1　事件的独立性 …… 15
1.4.2　伯努利概型 …… 18
附录 …… 19
习题 1 …… 20
第 2 章　随机变量及其分布 …… 24
2.1　随机变量及其分布 …… 24
2.1.1　随机变量 …… 24
2.1.2　随机变量的分布函数 …… 25
2.2　离散型随机变量 …… 26
2.2.1　离散型随机变量的分布律 …… 26
2.2.2　常用离散型分布 …… 27
2.3　连续型随机变量 …… 30
2.3.1　概率密度及其性质 …… 30

2.3.2　常用连续型分布 …… 32
2.3.3　正态分布 …… 34
2.4　随机变量函数的分布 …… 37
2.4.1　X 为离散型随机变量 …… 38
2.4.2　X 为连续型随机变量 …… 39
习题 2 …… 42
第 3 章　多维随机变量及其分布 …… 45
3.1　二维随机变量及其分布 …… 45
3.2　二维离散型随机变量 …… 46
3.3　二维连续型随机变量 …… 48
3.3.1　联合密度函数 …… 48
3.3.2　常用二维连续型分布 …… 49
3.4　边缘分布 …… 50
3.4.1　边缘分布函数 …… 50
3.4.2　边缘分布律 …… 50
3.4.3　边缘密度函数 …… 52
3.5　条件分布与独立性 …… 54
*3.5.1　条件分布 …… 54
3.5.2　两个随机变量的独立性 …… 56
3.5.3　多个随机变量的独立性 …… 58
3.6　二维随机变量函数的分布 …… 59
3.6.1　二维离散型情形 …… 59
3.6.2　二维连续型情形 …… 61
习题 3 …… 63
第 4 章　随机变量的数字特征 …… 67
4.1　数学期望 …… 67
4.1.1　离散型随机变量的数学期望 …… 67
4.1.2　连续型随机变量的数学期望 …… 69
4.1.3　二维随机变量的函数的期望 …… 71
4.1.4　期望的性质 …… 71
4.2　方差 …… 72
4.2.1　方差的定义 …… 72
4.2.2　方差的性质 …… 73

4.3 协方差与相关系数 …… 75
4.3.1 协方差 …… 75
4.3.2 相关系数 …… 77
4.4 应用案例 …… 79
附录 概率论的起源 …… 81
习题 4 …… 82
第 5 章 随机变量序列的极限 …… 84
5.1 依概率收敛与大数定律 …… 84
5.1.1 依概率收敛 …… 84
5.1.2 大数定律 …… 85
5.2 中心极限定理 …… 86
5.2.1 依分布收敛 …… 86
5.2.2 中心极限定理 …… 86
习题 5 …… 88
第 6 章 数理统计基本知识 …… 89
6.1 总体与样本 …… 89
6.1.1 总体和样本 …… 89
6.1.2 什么是统计学 …… 90
6.1.3 统计方法的特点 …… 91
6.2 统计量及抽样分布 …… 92
6.2.1 统计量与常用的统计量 …… 92
6.2.2 抽样分布 …… 96
习题 6 …… 100
第 7 章 参数估计 …… 102
7.1 点估计的方法 …… 102
7.1.1 矩估计法 …… 104
7.1.2 最大似然估计 …… 105
7.2 点估计的优良性 …… 107
7.2.1 无偏性 …… 107
7.2.2 有效性 …… 109
7.2.3 相合性 …… 110
7.3 区间估计的“枢轴量”法 …… 111
7.3.1 单个正态总体参数的置信区间 …… 113

7.3.2 两个正态总体均值的置信区间 …… 116
*7.4 区间估计的 Bootstrap(自助)方法 …… 117
习题 7 …… 119
第 8 章 假设检验 …… 122
8.1 显著性检验 …… 122
8.1.1 假设检验的两类错误 …… 123
8.1.2 假设检验的基本思想与一般步骤 …… 124
8.2 正态总体参数的假设检验 …… 125
8.2.1 正态总体均值的假设检验 …… 125
8.2.2 正态总体方差的假设检验 …… 127
8.3 应用案例分析 …… 130
8.3.1 点估计 …… 131
8.3.2 区间估计 …… 132
8.3.3 假设检验 …… 133
习题 8 …… 133
自测题 …… 135
自测题一 …… 135
自测题二 …… 137
习题答案 …… 140
参考文献 …… 154
附录 …… 155
附表一 泊松分布表 …… 155
附表二 正态分布表 …… 157
附表三 χ^2 分布表 …… 158
附表四 t 分布表 …… 160
附表五 p 值表 …… 162

第 1 章　随机事件与概率

1.1　随机事件及其运算

1.1.1　随机事件

概率论(probability)作为数学的一个分支,研究的是随机现象的数量规律,所以首先来认识随机现象.

例 1　假设某高校有 10000 名学生,周一到周五晚上大约有 50%的学生选择到自习室上自习,那么自习室应该设置多少座位比较合理?

一方面,若设置 10000 个座位,则肯定可以满足所有上自习同学的要求,但平均只有 5000 名同学来上自习,显然存在很大程度上的资源浪费;另一方面,若设置 5000 个座位,又太少,因为有些时候上自习的同学要超过 5000 名,这样会影响学生学习的积极性以及对学校的满意程度.那么到底应该设置多少座位比较合理呢?

类似的例子在许多实际问题中出现,但我们用以往的知识却难以给出一个比较完美的答案.问题的关键是到自习室上自习的人数是不确定的,它受到各种偶然因素的影响,是一个随机变化的量.用概率论的方法可以算出设置 5155 个座位就比较合理了,这时候虽然还可能有学生在自习室找不到座位上自习,但这种机会很小,还不到 0.1%.

实际上,现实生活(包括自然界和人类社会)中存在着两类本质不同的现象.

多次观察后我们会发现,有许多事情在一定条件下必然会发生.例如,在没有外力的作用下,匀速直线运动的物体必然继续做匀速直线运动;一个大气压下,水不会在 100℃以下沸腾.这类现象称为**确定性现象**.

另外,还有一类有本质区别的现象,例如抛一枚硬币,在它落地之前不能确定是正面向上还是反面向上;考察某地区明天的天气情况,即使气象部门也只能给出相对权威的推测,而不是确切的答案.这类现象,即观察前结果未知,或者说,结果呈现出一种偶然性的现象称为**随机现象**.

尽管随机现象的结果呈现出一定的偶然性,但人们经过长期实践并深入研究之后发现,这类现象在大量重复试验中却呈现出一定的规律性.例如,抛一枚均匀的硬币多次,正面朝上的次数大致有一半;综合多年的气象数据也可以得到某地区的天气状况的特点.正如恩格斯所说:“在表面上是偶然性在起作用的地方,这种偶

然性始终是受内部的隐蔽着的规律支配的,而问题的关键只是在于发现这些规律."(《马克思恩格斯选集》中译本第四卷)概率论正是一门研究随机现象的规律性的学科.

在概率论里把对随机现象的观察称为随机试验.由于随机现象的特点,随机试验主要有下面两个特点:

(1) 试验的所有可能结果都是已知的;

(2) 每次试验的具体结果观察之前未知.

随机试验简称试验,我们感兴趣的是试验的结果.例如,抛一次硬币,关心的是出现正面还是反面,有两个可能的结果.如果抛两次硬币,则试验结果有(正,正)、(正,反)、(反,正)、(反,反)4 种.为了研究随机试验,首要的是知道这个试验可能出现的结果.每一个可能出现的结果称为一个样本点,一般用 ω 表示;样本点全体构成的集合称为样本空间,用 Ω 表示.

例 2　从一批总量很大,次品比例为 P 的同型号产品中抽查 n 件,观察抽到的次品数.

由于总量很大,这里可以认为 n 远小于次品总数,所以,可能的结果有 0,1,2,…,n,样本空间 $\Omega=\{0,1,2,\cdots,n\}$.

例 3　记录某电话总机一小时内接到的电话次数,可能出现的结果为 0 次、1 次、2 次、非负整数次,而且很难指定一个数作为它的上界.这样,可以把样本空间取为 $\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$,这个样本空间有无穷多个样本点,但是可数的.

例 4　考察某地区的气温.

自然可以把样本空间取为 $\Omega=(-\infty,\infty)$ 或 $\Omega=[a,b]$.这个样本空间包含无穷多个样本点,它们充满一个区间,不是一个可列集.

有了样本点和样本空间的概念,就可以定义随机事件.直观地说,**随机事件**是对随机试验结果的一种描述,可能发生也可能不发生.从集合的角度说,随机事件是某些样本点的集合,是样本空间的子集.

例 5　掷一枚均匀的骰子,观察向上的点数.

显然,这是一个随机试验,可能出现的结果记为 $\omega_i=$"向上的点数为 i 点",则样本空间为 $\Omega=\{\omega_i \mid i=1,2,3,4,5,6\}$.这些样本点是我们感兴趣的,又称为基本事件.除此之外,我们还对一些事件感兴趣,如

A:"向上的面为偶数点";

B:"向上的点数不大于 2".

显然,这些随机事件可用集合表示为 $A=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$,$B=\{\omega_1,\omega_2\}$.

骰子落地后必然会有一个面向上,而且只有一个面,也就是说,样本空间里 6 个样本点中必然会出现一个,但骰子落地之前并不知道到底会是哪一个样本点出现.这样,随机事件 A 是否发生试验之前是不确定的.如果骰子落地后向上的面是

4,即样本点 ω_4 出现,则随机事件 A 发生;反之,如果 ω_3 出现,则随机事件 A 没发生.

这样,把随机事件定义为某些样本点的集合,称该随机事件发生当且仅当它所包含的某一个样本点出现.随机事件又简称为事件,有了随机事件的概念我们就可以用集合这样一个数学工具来描述随机现象了.

根据随机事件的定义,有两个特殊的随机事件需要注意,即样本空间的两个特殊子集.一个是空集,它不包含任何样本点,显然这是不可能发生的,所以称它为不可能事件;另外一个是样本空间本身,它包含了所有样本点,这样每次试验其中的样本点必然会出现,所以它必然会发生,称它为必然事件.虽然这两个事件本身没有什么随机性可言,但作为随机事件的两个极端情况在概率论中有着重要的意义.

1.1.2 事件的关系和运算

由于事件可以用集合来表示,那么相应于集合的关系和运算也可以定义事件的关系和运算.

1. 事件关系

包含关系 如果事件 A 发生,必然导致 B 发生,则称 A 包含于 B,记作 $A\subset B$;或称 B 包含 A,记作 $B\supset A$.从集合角度,则 A 的样本点必属于 B,文氏图表示如图 1.1 所示.

相等关系 A,B 两事件中任一发生必然导致另一事件发生,则称 A 与 B 相等,记作 $A=B$,或者说,"$A=B$"等价于"$A\subset B,B\subset A$ 同时成立".

对立关系 如果事件 B="A 不发生",则称 A,B 对立(或互补).B 称为 A 的对立事件,记为 $B=\overline{A}$.从集合来看,B 即为 A 的补集,由于集合的互补是相互的,对立关系也是相互的,$A=\overline{B}=\overline{\overline{A}}=A$,如图 1.2 所示.

互不相容关系 如果事件 A,B 不能同时发生,就称 A 与 B 互不相容,从集合的角度看,A,B 没有任何相同的样本点,如图 1.3 所示.

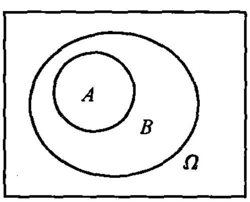

图 1.1

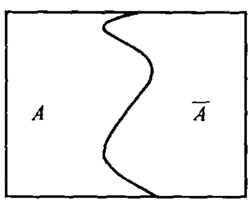

图 1.2

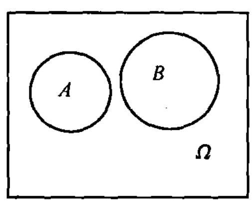

图 1.3

2. 事件的运算

事件的并　“A 与 B 至少有一个发生”这一事件称为事件 A 与事件 B 的并，记作 $A\cup B$ 或 $A+B$. 从样本点看，事件的并与集合的并运算是一致的，恰好是所有样本点(重复的只算一次)构成的新事件，如图 1.4 所示.

事件的交　“A 与 B 同时发生”这一事件称为事件 A 与事件 B 的交，记作 $A\cap B$ 或 AB. 同并运算一样，A 与 B 的交即为 A 与 B 中公共样本点构成的新事件，如图 1.5 所示.

事件的并与交的运算可以推广到有限个或可数个，可数个事件的并记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$，可数个事件的交记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

事件的差　“A 发生而 B 不发生”称为事件 A 与事件 B 的差，记为 $A-B$，从集合的角度 $A-B$ 是由 A 中所有不在 B 中的样本点构成的新事件. 如图 1.6 所示，从图中可以得到关系 $A-B=A\cup B-B=A-AB=A\bar{B}$.

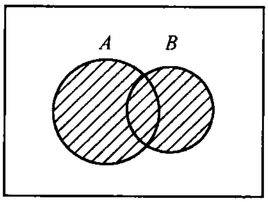

图 1.4

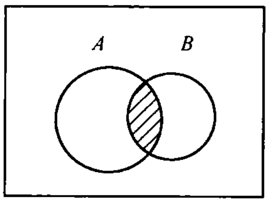

图 1.5

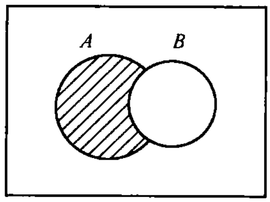

图 1.6

3. 运算性质

根据集合的运算律，对任一事件 A,B,C，有

交换律：$A\cup B=B\cup A, AB=BA$.

结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), (AB)C=A(BC)$.

分配律：$A(B\cup C)=AB\cup AC, A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$.

对偶律：$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}, \overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

以上各运算律均可推广至有限个或可数个，请读者自行推广.

例 6　从一批产品中每次取出一个产品进行检验，$A_i=\{$第 i 次取到合格品$\}$ $(i=1,2,3)$. 利用事件的关系与运算表示下列各事件：

(1) 三次都取到了合格品；

(2) 三次至少有一次取到合格品；

(3) 第一次取到合格品；

(4) 第二次没取到合格品；

(5) 三次中恰有两次取到合格品；

(6) 三次中至少有两次取到合格品；

(7) 三次中至多有一次取到合格品.

解 (1) 三次都取到了合格品说明三个事件 A_1,A_2,A_3 同时发生了，故为 $A_1A_2A_3$.

(2) 至少有一次取到合格品，三个事件至少有一个发生 $A_1\cup A_2\cup A_3$.

(3) 第一次取到合格品意味着事件 A_1 发生，所以表示为 A_1.

(4) 第二次没取到合格品，即 A_2 没发生，表示为$\overline{A_2}$.

(5) 三次中恰有两次取到合格品，可以分这样几种情况考虑：第 1,2 次取到合格品，第 3 次没取到合格品表示为 $A_1A_2\overline{A_3}$；第 1,3 次取到合格品，第 2 次没取到合格品表示为 $A_1\overline{A_2}A_3$；第 2,3 次取到合格品，第 1 次没取到合格品表示为$\overline{A_1}A_2A_3$. 综合三种情况，该事件可表示为 $A_1A_2\overline{A_3}\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup\overline{A_1}A_2A_3$.

(6) 仍然可以用上面分情况讨论的想法，至少两次取到合格品，那可能是第 1,2 次取到合格品，第 3 次情况不清楚，所以是 A_1A_2；可能是第 1,3 次取到合格品，第 2 次情况不清楚，所以是 A_1A_3；也可能是第 2,3 次取到合格品，第 1 次情况不清楚，所以是 A_2A_3. 综合起来即为 $A_1A_2\cup A_1A_3\cup A_2A_3$.

也可以用另外一种分析方法，至少两次取到合格品分为恰好两次取到合格品，三次都取到合格品，即分别为(5)和(1)的情况，综合起来为 $A_1A_2\overline{A_3}\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup\overline{A_1}A_2A_3\cup A_1A_2A_3$. 可以证明两种表达方式是一致的，请读者从集合的角度加以证明.

(7) 至多一次取得合格品，分为恰好取到一个合格品和一个合格品也没取到. 结合(6)的第二种分析方法，会发现(7)恰好是(6)的对立事件，所以可表示为 $\overline{A_1A_2\cup A_1A_3\cup A_2A_3}$.

例 7 利用事件的运算，可将事件之间的“互斥”，“互补”关系表述如下：

A,B 互斥当且仅当 $A\cap B=\varnothing$；

A,B 互补当且仅当 $A\cup B=\Omega, A\cap B=\varnothing$.

1.2 概率是什么

1.2.1 频率与概率

概率是这门课程又一个重要的概念. 从 1.1 节可以知道，随机事件的一个显著特点是其发生具有偶然性，这样我们自然很关心它发生的可能性是多少，那么概率就是这样一个度量. 但关于概率的确切定义却有着不同的角度和方式. 本节首先从

频率的角度来给出概率的统计定义.

频率是大家所熟知的,做 n 次试验,如果事件 A 恰好发生 m 次,则事件 A 发生的频率为$\frac{m}{n}$,如果在相同条件下另外做 n 次试验,显然频率一般来说会发生变化.那么这个变化过程会不会体现一定的规律性呢?历史上曾经有一些著名的统计学家进行过抛硬币(均匀)的试验,其结果如表 1.1 所示.

表 1.1

试验者	抛硬币次数(n)	出现正面次数(m)	频率(m/n)
蒲丰	4040	2048	0.5669
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维尼	30000	14994	0.4998

我们也可以用 Excel 软件进行模拟试验,首先用函数 RANDBETWEEN[−9,10]产生随机数,然后用计数函数 COUNTIF 就可以统计出产生的正数个数,而这就可以看成硬币正面向上的次数,由此可计算出频率.

从表 1.1 中的数据可以观察出,"硬币正面向上"这一事件(记为 A)发生的频率总是围绕 0.5 上下波动,而且随着试验次数增大,越来越接近 0.5,这称为频率的稳定性.0.5 可以看成频率的一个稳定值,是不随主观意志转移的一个客观存在的常数,把它定义为事件 A 发生的概率,记为 $P(A)$,这就是概率的统计定义.

概率的统计定义是从频率的稳定性出发,明确了频率和概率的关系,即概率是频率的稳定值,实际上,从第 5 章可以证明概率就是频率的极限值,只是和以往的极限含义不同.

统计定义的意义主要有两点:①它指出了概率是客观存在的;②它给出了概率近似计算的依据.我们在生活中常接触到一些概率,如市场上某种商品的合格率,但大家都知道这个合格率一般并不是根据所有商品情况得到的,而是通过抽样调查,抽查一部分产品得到的一个频率值.之所以能用它来衡量合格率,其理论依据就是概率的统计定义.

1.2.2　古典概型

古典概型是古典概率模型的简称,是概率论发展初期人们热衷的一种简单随机现象的概率求法.若随机试验有如下两个特征:

(1) 试验的样本点为有限个;

(2) 每个样本点出现的可能性即概率相同,

则称此试验为古典概型.

由结果的有限性,不妨设试验一共有 n 个可能结果,也就是说,样本点总数为

n,而所考察的事件 A 假设有 k 个样本点,则由各结果的等可能性,事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 中所含样本点数}}{\text{样本点总数}}. \tag{1.1}$$

式(1.1)是古典概型的概率计算公式,也称为概率的古典定义.具体的计算中涉及样本点的计数,当涉及研究对象比较复杂时,这种计数并非一目了然,需要熟悉加法原理、乘法原理及排列组合的知识,本章附录中将给出相关知识.

例 8(抽查产品) 一批产品共有 $a+b$ 个,其中 a 个正品,b 个次品,今采取随机放回抽样 n 次,问抽到的 n 个产品里恰好有 k 个正品的概率是多少?

解 记 $A=\{n$ 个产品中恰有 k 个正品$\}$,由于抽样是放回的,依据计数原理样本空间里共有 $(a+b)^n$ 个样本点,而 A 中样本点数 $\mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k}$,其中,组合数是考虑到 n 个产品中正品与次品的不同位置,而且随机抽样保证了等可能性,所以根据式(1.1)得到

$$P(A)=\frac{\mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k}}{(a+b)^n}=\mathrm{C}_n^k\left(\frac{a}{a+b}\right)^k\left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-k},\quad k=0,1,2,\cdots,n.$$

对上式,如果把 $\frac{a}{a+b},\frac{b}{a+b}$ 分别记为 p,q,则 p,q 非负且 $p+q=1$,此时

$$P(A)=\mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k},\quad k=0,1,2,\cdots,n.$$

它恰好是 $1=(p+q)^n$ 二项展开式的通项,第 2 章对这种随机现象有更详细的讨论.另外,如果此题的抽样方式改为无放回,那么事件 A 的概率是否会有变化?怎么变化?请读者自己考虑.

例 9 设一年有 365 天,求 n 个人中没有两个人生日相同的概率.

解 设 $A=\{n$ 个人中没有两个人生日相同$\}$.由于每个人的生日可以是 365 天的任意一天,因此,n 个人的生日有 $(365)^n$ 个样本点,而且每种结果发生都是等可能的,因此是古典概型.事件 A 发生要求 n 个人生日各不相同,因此,其中样本点个数为 A_{365}^n,于是

$$P(A)=\frac{\mathrm{A}_{365}^n}{(365)^n}=\frac{365\cdot 364\cdot\cdots\cdot(365-n+1)}{(365)^n}.$$

显然,这个概率值和 n 有关,可以算出,当 $n=23$ 时,$P(A)<0.5$;当 $n=50$ 时,$P(A)=0.03$.也就是说,如果随机产生 50 个人在一起,则他们任何两个人生日都不重合的概率是很小的.

例 10 某城市电话号码升位后为 8 位数且第一位为 6 或 8,求

(1) 随机抽取一个电话号码为不重复的 8 位数的概率;

(2) 随机抽取的电话号码末位数是 8 的概率.

解　分别记问题(1),(2)的事件为 A 及 B. 注意到除第一位外,其余位数可取自 0 到 9 这 10 个数中任意一个,因此有 10 种可能结果. 又第一位数只能是 6 或 8,因此有两种可能情况,因此样本点总数 $n=2\times 10^7$.

事件 A 的号码要求不重复,因此容易得到其中的样本点数为 $2\times \mathrm{A}_9^7$,而事件 B 中的样本点数为 $2\times 10^6\times 1$,于是求得

$$P(A)=\frac{2\times \mathrm{A}_9^7}{2\times 10^7}=0.018144,\quad P(B)=\frac{2\times 10^6}{2\times 10^7}=0.1.$$

*1.2.3　几何概型

例 11　某人午觉醒来,发现表停了,他打开收音机想听电台报时,假设电台只整点报时,求他等待的时间短于 10 分钟的概率.

由于他醒来的时间是随机的,所以满足古典概型的第(2)条,第(1)条要求可能的结果是有限个. 考虑一下,假设他是在 13:00～14:00 醒来,那么他可能的醒来时间如果表示在数轴上应该是充满一个区间,因为时间是连续的,而区间中有无限个点,不可数. 所以它不满足第(1)条,不属于古典概型. 它所满足的特点可以概括为下面两条:

(1) 随机试验样本点有不可数个;

(2) 每个样本点出现是等可能的.

把满足这两个条件的随机现象称为几何概型.

设某个空间区域 Ω,试验的结果可用位于 Ω 内的某个随机点 ω 的位置表示,假设随机点 ω 落在 Ω 中任意一个位置是等可能的,事件 A 表示随机点落在的子区域 S_A 内,则有

$$P(A)=\frac{|S_A|}{|\Omega|},\tag{1.2}$$

其中,当 Ω 为直线上区间时,$|\Omega|$ 为区间长度;当 Ω 为平面区域时,$|\Omega|$ 为区域面积;当 Ω 为空间区域时,$|\Omega|$ 为区域体积. 式(1.2)是几何概型的概率计算公式,也称为概率的几何定义,它的计算要点是准确找出事件 A 所对应的子区域 S_A.

例 12　某公共汽车站从上午 7 时起,每隔 15 分钟来一趟车,一乘客在 7:00～7:30 随机到达该车站,求

(1) 该乘客等候时间不到 5 分钟就乘上车的概率;

(2) 该乘客等候时间超过 10 分钟才乘上车的概率.

解　用 T 表示该乘客到达时刻,且记问题(1),(2)涉及的事件分别为 A,B,则

$$\Omega=\{7:00<T<7:30\},\quad S_A=\{7:10<T<7:15\text{ 或 }7:25<T<7:30\},$$
$$S_B=\{7:00<T<7:05\text{ 或 }7:15<T<7:20\}.$$

如将 T 的单位化为分钟,则有 $|\Omega|=30$,$|S_A|=10$,$|S_B|=10$,因此

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{3}\approx 0.333.$$

例 13(约会问题) 甲、乙二人相约 7:00～8:00 在某地会面，约定先到者等候另一人 20 分钟即可离开，试求两人能见面的概率.

解 假设甲在 7 点 x 分到达，乙在 7 点 y 分到达，以 7 点为起始时刻，分钟为单位，在平面上建立 xOy 坐标系.

因为甲乙都是在 0～60 分钟内等可能到达，所以这是个几何概型问题. (x,y) 的所有可能取值是边长为 60 的正方形，其面积 $|\Omega|=60^2$. 而事件 $A=\{$两人能见面$\}$，如图 1.7 阴影部分所示，相当于 $|x-y|\leqslant 20$，所以 $|S_A|=60^2-40^2$. 于是

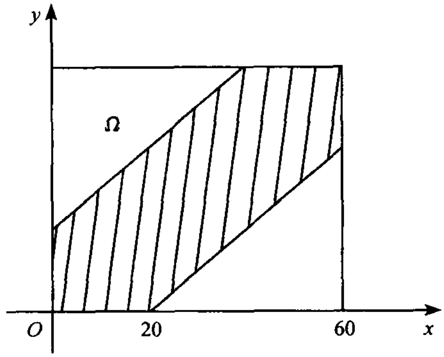

图 1.7

$$P(A)=\frac{|S_A|}{|S_\Omega|}=\frac{60^2-40^2}{60^2}=\frac{5}{9}=0.556.$$

1.2.4 概率的公理化定义

1.2.1～1.2.3 小节分别从不同的角度给出了概率的定义，给了我们一定的启示，但也都有一定的局限性. 1933 年，前苏联的数学家柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)在总结前人大量研究成果基础上，给出了概率的公理化定义，从而使概率论成为严谨的数学分支.

定义 1 设随机试验的样本空间为 Ω，若对每一事件 A，有且只有一个实数 $P(A)$ 与之对应，且满足如下公理：

公理 1(非负性) $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

公理 2(规范性) $P(\Omega)=1$；

公理 3(完全可加性) 对任意一列两两互斥的事件 $A_1,A_2,\cdots$ 有

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n),$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

公理化定义(定义 1)的突出优点是它对一切随机现象均适用，当然它并没有给出具体的概率计算方法，但它把从数学角度规范了概率定义，这为用数学手段和方法(尤其是高等数学)研究随机现象铺平了道路.

下面是由公理化定义(定义 1)导出的概率的性质.

性质 1(有限可加性) 对任意有限个互斥事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，有