

全国工程硕士专业学位教育指导委员会推荐教材



数字信号处理

殷 瑞 万国龙 编著



<http://www.tup.com.cn>

清华大学出版社

全国工程硕士专业学位教育指导委员会推荐教材

TN911.72

157

2007

数字信号处理

殷 瑞 万国龙 编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书先回顾信号和系统的必备概念、MATLAB 的入门引导和数字系统的实现方法,然后以函数的正交展开为理论基础,讨论数字滤波器的各种设计技术、快速傅里叶变换的计算方法、小波分析的基本概念和同态信号及二维信号处理的基本方法。作为基本的实践环节,本书除了给出 MATLAB 的相关内容,特别是滤波器设计和分析工具箱的使用方法之外,还以 TMS320C54XX 芯片为例,对 DSP 芯片的使用做了入门引导,而作为应用示例,给出了成像技术和相对论的相关讨论。

本书可作为电子和通信领域工程硕士研究生的学位课教材,还可供相关专业的高年级本科生、工学硕士以及科技人员参阅。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13501256678 13801310933

图书在版编目(CIP)数据

数字信号处理/殷瑞,万国龙编著. —北京:清华大学出版社,2007.1
(全国工程硕士专业学位教育指导委员会推荐教材)

ISBN 978-7-302-13663-7

I. 数… II. ①殷… ②万… III. 数字信号—信号处理—研究生—教材 IV. TN911.72

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 097542 号

责任编辑:陈国新

责任校对:梁毅

责任印制:杜波

出版发行:清华大学出版社 地 址:北京清华大学学研大厦 A 座

<http://www.tup.com.cn> 邮 编:100084

c-service@tup.tsinghua.edu.cn

社总机:010-62770175 邮购热线:010-62786544

投稿咨询:010-62772015 客户服务:010-62776969

印刷者:北京密云胶印厂

装订者:三河市新茂装订有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185×230 印 张:20.25 字 数:429 千字

版 次:2007 年 1 月第 1 版 印 次:2007 年 1 月第 1 次印刷

印 数:1~4000

定 价:29.00 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系
调换。联系电话:(010)62770177 转 3103 产品编号:016812-01

前言

数字信号处理是指用数字手段(包括软件和硬件)处理信号。从20世纪40年代后期到60年代初期,模数(A/D)转换和数模(D/A)转换、数字式测量和数字仿真都得到了高速发展,但这些还不是数字信号处理这一学科的基本内容。

学术界公认数字信号处理学科是从1965~1975这十年中形成的。其开始的标志是1965年库利(Cooley)和图基(Tukey)提出了傅里叶变换的快速算法(FFT)。它可成百上千倍地提高计算效率,从而使信号的实时处理成为可能,因此受到了广泛的重视。第二年IEEE组织了研讨会来讨论它的应用,几年后它就发展成为语声和信号处理分会(ASSP)。

与此同时,1967年杰克森(Jackson)研制出了世界上第一台(硬件的)数字滤波器,但一开始它出现了溢出振荡。这诱发了学术界对数字滤波器的各种问题进行深入研究:离散系统和连续系统的等效问题、设计问题、实现问题、稳定性问题、字长效应问题等等。短短几年就基本摸透了这些问题,大量的文章相继发表,各种经典的设计和应用程序相继问世。

在系统地总结上述成果之后,由奥本海姆(Oppenheim)和谢弗(Shafer)合著的《数字信号处理》,以及由瑞比纳(Rabiner)和苟尔德(Gold)合著的《数字信号处理的理论和应用》分别出版。它们不仅被学术界公认为经典著作,而且还被当成数字信号处理学科形成的标志。此后的时间里,它的应用迅速地扩展到科学和技术的各个领域。

早在20世纪70年代,国内外著名大学的电子和通信工程专业无一例外地开设了数字信号处理课程。教材多以奥本海姆和谢弗的书为蓝本,有的还兼收了瑞比纳和苟尔德书中的部分内容(特别是有关滤波器设计的内容)。时至今日,三十年过去了。这三十年中,数字信号处理无论在理论、技术和应用上,还是在实用软件和硬件上,都发生了重大的变化,其中尤以小波分析的理论、技术和应用, MATLAB 软件的推出和不断更新,可编程 DSP 芯片的飞速发展引人注目。另外,计算机的广泛普及不仅改变了科技人员的工作环境,也改变了工作内容,相应的教学内容和要求当然也应随之变化。因此,本教材选定数字滤波器、快速傅里叶变换、小波分析为三个基本内容,同态信号处理和二维信号处理为

Foreword

扩展内容, MATLAB 软件和 DSP 芯片的使用为基本实践环节, 在成像技术和相对论中的应用作为应用示例。电子通信类工程硕士的教学计划中还安排有“随机信号的分析 and 处理”一课, 故与其相关的内容(相关函数和功率谱、谱估计和自适应滤波等)不再选入本教材。

本教材编写的第一个着眼点是计算机早已高度普及, 精华技术的使用已十分方便。比如 IIR 滤波器的最佳设计方法是最小 P 误差法, FIR 滤波器的最佳设计方法是最小最大误差法(或称为等波纹逼近)。这两个程序都有千余条语句, 三十年前无论是用穿孔卡片还是在终端上用键盘输入都要花费相当长的时间, 因此奥本海姆的书中对此只做了很简明的介绍, 而把大量的篇幅放在双线性变换、脉冲不变、窗口设计等方法的讨论上。现在的情况是: 从业人员每人有一台连网的 586, 调出 MATLAB, 打开 fdatool(滤波器设计和分析工具箱), 点击相关的选择按钮, 键入技术规范, 最后再点击 Design 按钮, 一两秒之后, 就完成了设计。不仅给出了滤波器参数, 还给出了所设计出的滤波器的频率响应、脉冲响应、零点极点图等多种分析结果。既然学生已经有了使用精华技术的条件, 就应该把技术精华教给他们。

本教材编写的第二个着眼点是培养学生的创新能力。还以最小最大误差设计法为例, 源程序中给出了各种分段常数特性的滤波器、微分器和希尔伯特变换器的设计选择, 很容易用它来设计这些系统。但是把程序稍做修改就可用它来设计由投影数据重建图像所需的滤波核, 还有人用它做了核磁共振激发脉冲的波形设计, 这样的应用就带有创新的色彩了。为了使学生能做到创新使用, 就必须对最小最大误差逼近的理论基础(交错定理)、解题方法(极值点交换算法)以及源程序的结构等内容做出清晰的说明, 为创新使用打下必要的知识基础。

本教材编写的第三个着眼点是为学生跟上学科今后的发展打下必要的基础。无论是时域分析、频域分析还是时频分析, 都是以函数的正交展开作为理论基础的。学科今后的发展很可能还是建立在此基础之上。因此本教材把正交展开作为贯穿始终的脉络: 第 1 章做入门的引导, 第 2 章做全面的讨论, 第 3 章介绍它的特殊应用, 第 7 章再次回顾, 力图使学生对此理论基础建立牢固的概念。

工程硕士生大多是在职学习的技术骨干, 他们肩负着重要的工作任务, 难免因出差等原因而影响听课。提高教材的易读性是十分重要的, 这需要明确地引入概念, 细致地说明过程, 详尽地给出数学推导, 这是本教材编写的第四个着眼点。

本教材第 1 章是为不同背景的读者补齐必备的基础而编写的, 在复习了信号和系统的有关概念和对 MATLAB 的使用做了入门引导之后, 重点讨论数字系统的实现问题, 要求读者牢固地建立“数字系统是靠运算来实现的”这一基本概念。

第 2 章先介绍了函数正交展开的理论基础, 并用正交展开统一所学过的各种变换; 继而讨论了离散系统和连续系统的等效性, 并由此引出了 IIR 系统的变换设计法。

第3章讨论了数字系统的设计问题：IIR系统的变换设计和最小P误差设计；FIR系统设计的窗口法和最小最大误差逼近；MATLAB的滤波器设计和分析工具箱(fdatool)的使用。

第4章先对离散傅里叶变换的概念做解释，然后以频域抽取为例讨论了快速傅里叶变换的算法原理，并由反变换的计算引出时域抽取算法。作为应用示例，讨论了用FFT实现FIR系统的线卷积和圆卷积算法。

第5章介绍了同态信号的概念、相乘和卷积同态信号处理的基本方法和应用示例。

第6章的二维信号处理则是在把一维技术推演到二维后，重点讨论了二维FIR系统的设计和快速实现以及二维FFT的算法。

第7章的小波分析则是在引入时频分析概念之后，重点讨论了离散正交的小波变换、多分辨分析、Mallat算法、小波框架以及第二代小波的基本思路。

第8章则是通过FIR滤波和计算FFT两个实例，对读者做了使用DSP芯片的入门引导。

编者建议：本教材第1~7章可作为32课时的讲授内容，其中的1.2节和各章所附的上机作业可另用8课时完成，第8章的DSP芯片实验可用6课时完成，余下的课时可用作课堂讨论或考试。各章节的附录和第9~10章仅供学生课外阅读。

本教材第8章由万国龙执笔，其余各章节由殷瑞执笔。全书由殷瑞统稿。

本书是电子和通信领域工程硕士研究生的学位课教材，还可供相关专业的高年级本科生、工学硕士以及科技人员参阅。

编者感谢国务院学位办和全国工程硕士教学指导委员会对工程硕士教材的重视，感谢全国工程硕士电子通信领域教材评委会各位老师的信任，感谢师友们的帮助，感谢清华大学出版社的支持。

希望此教材能对读者有所帮助，不妥之处敬请批评指正。

编 者

2006年8月于北京航空航天大学

目 录

第 1 章 基础知识	1
1.1 信号和系统分析的有关概念	1
1.1.1 信号和系统分析的时域技术	1
1.1.2 信号和系统分析的频域技术	10
1.2 MATLAB 入门	18
1.2.1 MATLAB 的两种编辑状态	19
1.2.2 符号表达式	22
1.2.3 二维数组和三维图形的绘制	28
1.3 数字系统的实现及 MATLAB 的 filter 功能调用	30
1.3.1 无限长脉冲响应系统的实现	30
1.3.2 有限长脉冲响应系统、线性相移条件和结构	36
1.3.3 MATLAB 的 filter 功能	40
习题	42
MATLAB 习题	42
第 2 章 函数的正交展开	43
2.1 引言	43
2.2 希尔伯特函数空间和函数的正交展开	44
2.3 函数和序列正交展开举例	52
2.4 离散系统和连续系统的等效性	57
2.5 数字信号处理中的各种变换	66
习题	72

Contents

第 3 章 数字滤波器的设计	73
3.1 IIR 系统的变换设计法	73
3.1.1 脉冲不变法	74
3.1.2 双线性变换法	76
3.2 IIR 系统的最小 P 误差设计	83
3.3 FIR 系统的频率采样设计	89
3.4 FIR 滤波器的窗口设计法	90
3.5 FIR 滤波器的最小最大误差逼近	95
3.6 MATLAB 的 fdatool(滤波器设计和分析工具箱)的使用	103
习题	105
MATLAB 习题	105
第 4 章 离散傅里叶变换和快速傅里叶变换	107
4.1 离散傅里叶变换的有关概念	107
4.2 DFT 的快速算法——FFT	113
4.2.1 频域抽取的 FFT 算法	115
4.2.2 反变换的计算	118
4.2.3 时域抽取的 FFT 算法	119
4.2.4 用 MATLAB 计算 FFT	121
4.3 FIR 系统的 FFT 实现	122
4.3.1 序列傅里叶变换的卷积定理	122
4.3.2 线卷积的 FFT 实现	124
4.3.3 圆卷积的 FFT 实现	125
4.3.4 长输入的分段处理	127
习题	129
MATLAB 习题	130
第 5 章 同态信号的处理	132
5.1 引言	132
5.2 相乘同态信号的处理	135
5.3 卷积同态信号的处理	139
5.3.1 卷积同态信号处理的一般概念	139

5.3.2 实因果序列傅里叶变换的实部充分性	145
5.3.3 最小相移序列的复倒谱计算	147
习题	156
MATLAB 习题	156
第 6 章 二维信号处理	157
6.1 引言	157
6.2 二维系统的稳定性	161
6.3 二维 IIR 滤波器的设计	165
6.4 二维 FIR 滤波器的设计	168
6.5 二维 DFT 的快速算法	172
习题	174
MATLAB 习题	174
第 7 章 小波分析	175
7.1 信号的时频分析	178
7.2 连续小波变换	182
7.3 离散正交小波变换	186
7.3.1 构造规范正交小波基底的方法	187
7.3.2 标尺函数 $\varphi(t)$ 及组合系数 h_n 、 g_n 需满足的条件	189
7.3.3 多分辨分析和 Mallat 算法	194
7.3.4 正交小波包	199
7.4 小波框架	200
7.5 第二代小波——按提升步骤构造小波	202
第 8 章 数字信号处理器(DSP)使用入门	205
8.1 DSP 芯片的基本结构和特征	206
8.1.1 DSP 芯片的基本结构	206
8.1.2 TMS320C54x 芯片的基本结构和特征	208
8.2 DSP 的开发工具及环境	209
8.2.1 SEED-DTK 开发实验箱简介	210
8.2.2 DSP 的集成开发环境 CCS	211
8.3 数的定点表示	217

8.4	用 TMS320C54x 实现 FIR 滤波	218
8.4.1	滤波器设计	219
8.4.2	滤波算法编程	222
8.4.3	FIR 滤波程序的调试	224
8.5	用 TMS320C54x 实现 FFT	229
8.5.1	FFT 算法讨论	229
8.5.2	FFT 编程	231
8.5.3	FFT 程序的调试	236
8.6	实用芯片的程序加载和固化	239
第 9 章	应用示例 I 成像技术	252
9.1	X-CT 成像	253
9.2	雷达成像	258
9.2.1	距离门雷达成像	258
9.2.2	线性调频雷达成像	261
9.3	磁共振成像	268
9.3.1	自旋(磁矩)和进动	268
9.3.2	核磁共振的激发	271
9.3.3	弛豫、解相、FID 信号、合相和自旋回波	274
9.3.4	核磁共振信号的采集和图像信息的提取	277
9.3.5	磁共振成像技术	281
9.3.6	磁共振成像激发脉冲的波形设计	287
第 10 章	应用示例 II 旋转的相对论效应	288
10.1	从牛顿力学到相对论力学	288
10.1.1	从伽利略变换到洛伦兹变换	288
10.1.2	其他物理量的变换	294
10.2	旋转的相对论效应	296
10.2.1	引言	296
10.2.2	定轴转动的洛伦兹变换	297
10.2.3	其他物理量的变换	310
参考文献		312

基础知识

1.1 信号和系统分析的有关概念

1.1.1 信号和系统分析的时域技术

1. 基本概念

信号和系统的概念广泛应用在科学和技术的各领域中。比如,某同学用有线电话传达一条信息:“明天九点上课”。线路接通后,他先通过发声系统(喉头和声道)把此信息变成语音信号(声压),此声压经话筒变成电流信号,经传输线路传到听筒,由扬声器变成声压,再经听觉系统在大脑中形成信息“明天九点上课”。信号指的是带有信息的物理量(声、光、电、磁等),而系统则是指对信号进行变换的物理设施(机械的、电磁的、生物等的)。

一般情况下,信号是随着时间变化的,常把信号表示成自变量为时间 t 的一个函数 $f(t)$ 。根据自变量取值范围(即函数的定义域)的不同,人们又把信号分成两类:定义在连续域 $a < t < b$ 上的信号 $f(t)$ 称为连续时间信号,简称为连续信号(可以是数学上的不连续函数,比如方波);而仅定义在某些离散点上的信号 $f(n\Delta T)$, $n \in \mathbf{Z}$ 称为离散信号。离散信号更常用的表示方式是取 $\Delta T=1$,将其视为一个序列 $f[n]$, $n \in \mathbf{Z}$ (本教材依近年来多数文献的惯例,用方括号表示仅取整数的自变量)。应注意:在离散信号相邻两点之间,信号没有定义,而不是等于零。图 1.1 给出了几个例子。

$t < 0$ 时, $f(t) \equiv 0$ 的连续信号和 $n < 0$ 时 $f[n] \equiv 0$ 的离散信号都称为因果信号,如图 1.2 所示。

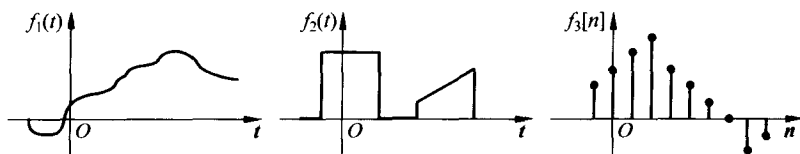
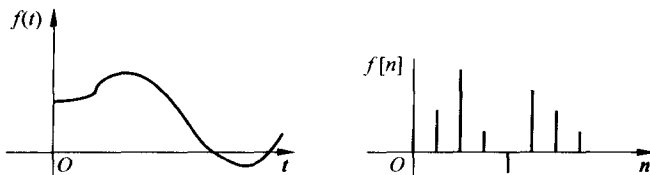
图 1.1 连续信号 $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$ 和离散信号 $f_3[n]$ 

图 1.2 因果信号

常见的信号运算有相加、相乘、乘标量、微分、积分等。两个信号的相加(和相乘)指的是各(时间)对应点处的值相加(和相乘)。图 1.3 给出了 $f_1(t) + f_2(t)$ 和 $f_1(t)f_2(t)$ 的两个例子。一个信号乘标量 a 指的是各点值都乘以此标量 a , 而信号 $f(t)$ 的微分定义为 $\frac{df(t)}{dt}$, 积分定义为 $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$ 。

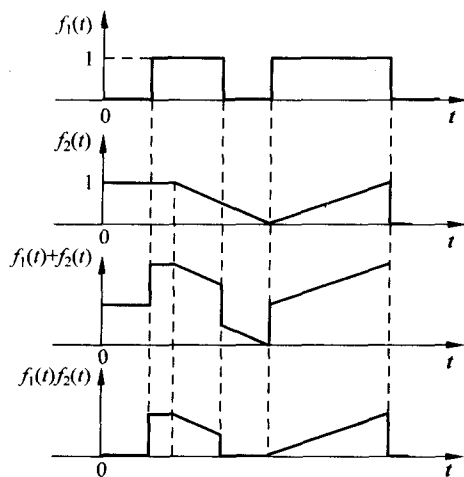


图 1.3 两信号的相加和相乘

除了上述的几种运算之外,还经常用到自变量(t)的四种变换,即置换(substituting)、偏移(shifting)、伸缩(scaling)和反卷(reflecting)。

置换: 把自变量 t 换成 t' , 则信号由 $f(t)$ 变成 $f(t')$, t 和 t' 坐标刻度相同时, $f(t)$ 和 $f(t')$ 的图形一样, 如图 1.4(b) 所示。

偏移: $f(t-b)$ 表示 $f(t)$ 向右偏 b 个单位, 如图 1.4(c) 所示。

伸缩: 当 $a > 1$ 时, $f(at)$ 是将 $f(t)$ 沿 t 压缩为原来的 $1/a$, 而 $f\left(\frac{t}{a}\right)$ 则是将 $f(t)$ 沿 t 拉伸了 a 倍, 如图 1.4(d) 所示。

伸缩加偏移: $a > 1$ 时 $f(at-b)$ 表示 $f(t)$ 压缩为原来的 $1/a$ 同时右移 $\frac{b}{a}$, 如图 1.4(e) 所示。而 $f\left(\frac{t-b}{a}\right)$ 则是将 $f(t)$ 沿 t 拉伸 a 倍同时右移 b 。

反卷: $f(-t)$ 是以 $t=0$ 为轴将 $f(t)$ 做水平翻转的结果, 如图 1.4(f) 所示。

反卷加偏移: $f(\tau-t)$ 表示 $f(t)$ 反卷后再右移 τ , 即把 $t=0$ 处对应的 $f(0)$ 右移到 $t=\tau$ 处而带动的整个 $f(-t)$ 的移动, 如图 1.4(g) 所示。

这些自变量的变换将在下文中多次用到, 应牢牢记住。

下面讨论如何用数学工具描述系统。

由前所述, 所谓系统指的是把输入信号转换成输出信号的物理设施, 在数学上可用一个变换 T 来表示, 如图 1.5 所示。而变换 T 的具体表示又随不同的应用环境而不同。比如在时域技术中它可用微分方程或单位脉冲响应给出, 而在频域技术中则是用系统函数给出。本节仅就一般表示的变换 T 和系统属性间的关系做一说明。

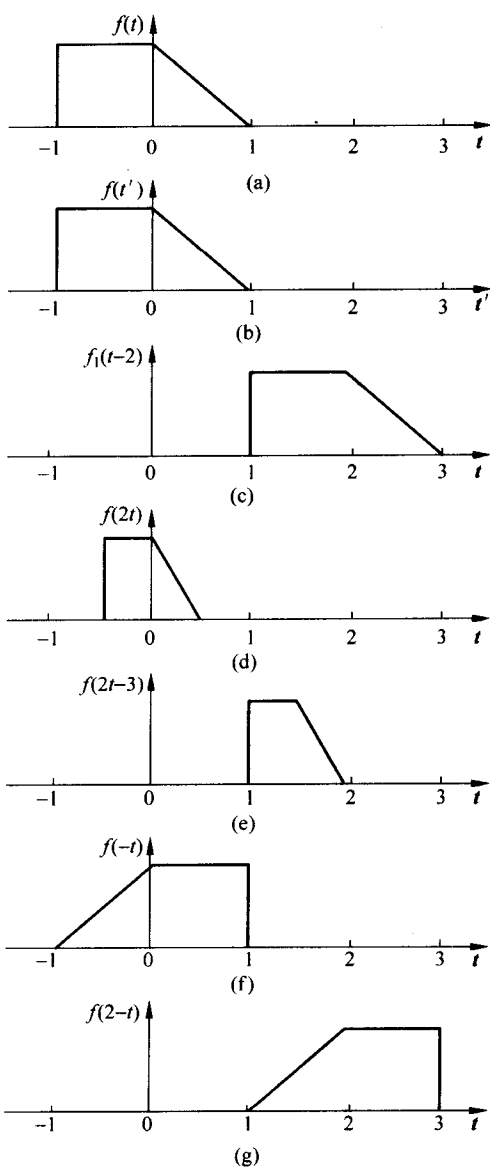


图 1.4 自变量变换引起的信号变化

$$x(t) \longrightarrow \boxed{T} \longrightarrow y(t) = T[x(t)]$$

图 1.5 数学上把系统视为一个变换

若描述系统输入、输出关系的变换是个线性变换,即若 $T[x_1(t)] = y_1(t)$, $T[x_2(t)] = y_2(t)$ 时,对任何 $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 和常数 a 、 b ,满足 $T[ax_1(t) + bx_2(t)] = ay_1(t) + by_2(t)$,则此变换所界定的系统称为线性(linear)系统。

若输入 $x(t)$ 时系统输出为 $y(t) = T[x(t)]$,而 $x(t)$ 偏移 τ 的时间后再输入,所造成的输出形状与 $y(t)$ 相同,但也偏移了同样的 τ ,即 $T[x(t-\tau)] = y(t-\tau)$,这种系统称为时不变(time invariant, TI)系统。控制类的文献中更习惯称之为定常(stationary)系统。

仅当加入输入的同时及以后才有输出的系统称为因果系统。这里把输入看成原因,输出看成结果,先有因而后有果,从而得名因果(causal)系统。

信号和系统课重点讨论线性时不变(LTI)的因果系统的分析问题。解决此问题的关键在于研究系统所界定的变换,即系统把不同的输入各变成了什么样的输出,首先应解决如何由输入求输出的问题。

2. 连续系统的微分方程

变换连续信号的系统称为连续系统。输入和输出信号都是带有信息的,都是随时间而变化的。若分别以 $x(t)$ 和 $y(t)$ 表示输入和输出信号,则它们的变化除了由 $x(t)$ 和 $y(t)$ 给出了过程,还由它们的各阶导数($x' = dx/dt$ 、 $x'' = d^2x/dt^2$ 、 \dots 、 $x^{(m)} = d^m x/dt^m$; $y' = dy/dt$ 、 \dots 、 $y^{(n)} = d^n y/dt^n$)给出了趋势。系统是变换信号的物理设施,用数学工具表示此变换的直观方法就是给出 $x(t)$ 和 $y(t)$ 及其各阶导数之间的关系,这就是系统的微分方程。比如某系统把输入放大 b 倍得到输出,则它的方程为 $y(t) = bx(t)$;若把输入和它的一阶导数的 b 倍组合在一起给出输出,则方程可表示为 $y(t) = x(t) + bx'(t)$ 。

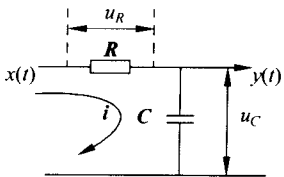


图 1.6 RC 串联电路

下面再结合具体的电路进行分析。如图 1.6 所示的 RC 串联电路,电压 $x(t)$ 加在输入端,输出电压 $y(t)$ 从电容两端取出。由基尔霍夫电压定律可得 $x = u_R + u_C$,而 $y = u_C$, $i = C \frac{du_C}{dt} = C \frac{dy}{dt} = Cy'$, $u_R = iR = RCy'$,代入上式得到

$$RCy' + y = x$$

这就是此系统的微分方程,即此系统把输入变换成了输出及其一阶导数的线性组合。

系统越复杂,微分方程中包含的导数阶次越高,它的一般形式为

$$\begin{aligned} a_0 y(t) + a_1 y'(t) + \dots + a_k y^{(k)}(t) + \dots + a_N y^{(N)}(t) = \\ b_0 x(t) + b_1 x'(t) + \dots + b_k x^{(k)}(t) + \dots + b_M x^{(M)}(t) \end{aligned} \quad (1.1)$$

或简写成

$$\sum_{k=0}^N a_k y^{(k)} = \sum_{k=0}^M b_k x^{(k)} \quad (1.2)$$

式中, $y^{(k)} = \frac{d^k y}{dt^k}$, 为 $y(t)$ 的 k 阶导数; $x^{(k)} = \frac{d^k x}{dt^k}$, 为 $x(t)$ 的 k 阶导数。

如果能根据系统的结构和参数建立微分方程, 再据具体的输入解出输出, 就解决了系统分析的基本问题。然而在时域中建立和求解方程都不容易, 1.2 节中的频域方法将使问题简化。

3. 离散系统的差分方程

离散系统变换的是离散信号(序列)。离散信号只定义在 $n \in \mathbf{Z}$ 的离散点上, 不存在导数, 只能用信号在相邻两点处的值之差表示它的变化, 这就是差分。本节只复习后向差分。

一阶差分定义为

$$\Delta f[n] = f[n] - f[n-1], \quad \Delta f[n-1] = f[n-1] - f[n-2]$$

二阶差分定义为

$$\Delta^2 f[n] = \Delta f[n] - \Delta f[n-1]$$

将前两式代入得

$$\begin{aligned} \Delta^2 f[n] &= f[n] - 2f[n-1] + f[n-2] \\ \Delta^2 f[n-1] &= f[n-1] - 2f[n-2] + f[n-3] \end{aligned}$$

同样, 三阶差分为

$$\Delta^3 f[n] = \Delta^2 f[n] - \Delta^2 f[n-1] = f[n] - 3f[n-1] + 3f[n-2] - f[n-3]$$

k 阶差分为

$$\Delta^k f[n] = \Delta^{k-1} f[n] - \Delta^{k-1} f[n-1] = \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i f[n-i] \quad (1.3)$$

其中 C_k^i 为二项式系数。

输入序列的变化可用它的各阶差分的线性组合表示, 输出序列的变化也用各阶差分的线性组合表示, 于是离散系统的性质可用此二线性组合相等时所需的组合系数 $\{\alpha_k\}$ 、 $\{\beta_k\}$ 和所包含的阶次 N 、 M 给出, 即

$$\sum_{k=0}^N \alpha_k \Delta^k y[n] = \sum_{k=0}^M \beta_k \Delta^k x[n] \quad (1.4)$$

不同的 $N, M, \{\alpha_k, \beta_k\}$ 表示了不同系统的输入变化和它所造成的输出变化之间的不同关系。式(1.4)给出了对离散系统性质的一种描述, 称为离散系统的差分方程(原始型)。

将前面定义的各阶差分表达式代入(1.4)式的等号左边可得

$$\begin{aligned} \alpha_1 \cdot \Delta y[n] &= \alpha_1 y[n] - \alpha_1 y[n-1] \\ \alpha_2 \cdot \Delta^2 y[n] &= \alpha_2 y[n] - 2\alpha_2 y[n-1] + \alpha_2 y[n-2] \\ \alpha_3 \cdot \Delta^3 y[n] &= \alpha_3 y[n] - 3\alpha_3 y[n-1] + 3\alpha_3 y[n-2] - \alpha_3 y[n-3] \\ &\dots \end{aligned}$$

再对 $y(n-k)$, $k \in [0, N]$ 合并同类项得

$$\sum_{k=0}^N a_k \Delta^k y[n] = \sum_{k=0}^N a_k y[n-k]$$

同样, 可将等号的右边化成

$$\sum_{k=0}^M \beta_k \Delta^k x[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

则式(1.4)的差分方程又可写为

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (1.5)$$

式中, 各系数 a_k 、 b_k 均为常数。各 $y[n-k]$ 和 $x[n-k]$ 均以一次方的形式出现的差分方程称为常系数线性差分方程。如果它又是在零休止状态下启动, 则此方程对应了一个线性时不变系统。系统分析中, 常用此形式的差分方程。

与连续系统的微分方程不同, 线性时不变离散系统对应的差分方程很容易求解: 有了输入序列 $x[n]$, 按方程做递推计算就可求得输出 $y[n]$ 。此算法正是实现数字系统的依据, 将在 1.3 节中详细讨论。

4. 离散线性时不变系统的卷积和(convolution sum)

离散系统处理的是离散信号, 即输入和输出都是只定义在 n 为整数点上 ($n \in \mathbf{Z}$) 的序列 $f[n]$ 。系统分析的基本任务是由输入求输出。而输入可以是千变万化的, 对应的输出也各不相同, 如何对此问题做统一的分析呢? 在时域中的做法就是把各种不同的输入序列都表示成偏移单位脉冲(unit impulse)序列的线性组合。所谓单位脉冲序列的定义是

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

即仅在 $n=0$ 点取值为 1, 而在 $n \neq 0$ 的所有其他点处均取零值的序列, 如图 1.7(b) 所示。它的 k 点偏移则是在 $n=k$ 点取值为 1, 而在 $n \neq k$ 的所有其他点处均取零值的序列, 表示为

$$\delta[n-k] = \begin{cases} 1 & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases} \quad (1.7)$$

而序列和标量 a 相乘指的是序列在各点处的值同乘 a , 所以常数 $x[k]$ 和序列 $\delta[n-k]$ 之积 $x[k]\delta[n-k]$ 是在 $n=k$ 点取值为 $x[k]$, 而在 $n \neq k$ 的所有其他点处均仍取零值的序列, 即

$$x[k]\delta[n-k] = \begin{cases} x[k] & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases} \quad (1.8)$$

图 1.7(d)~(g) 给出了 $k=0, 1, 2, \dots, m$ 时对应的 $x[0]\delta[n-0], x[1]\delta[n-1], x[2]\delta[n-2], \dots,$

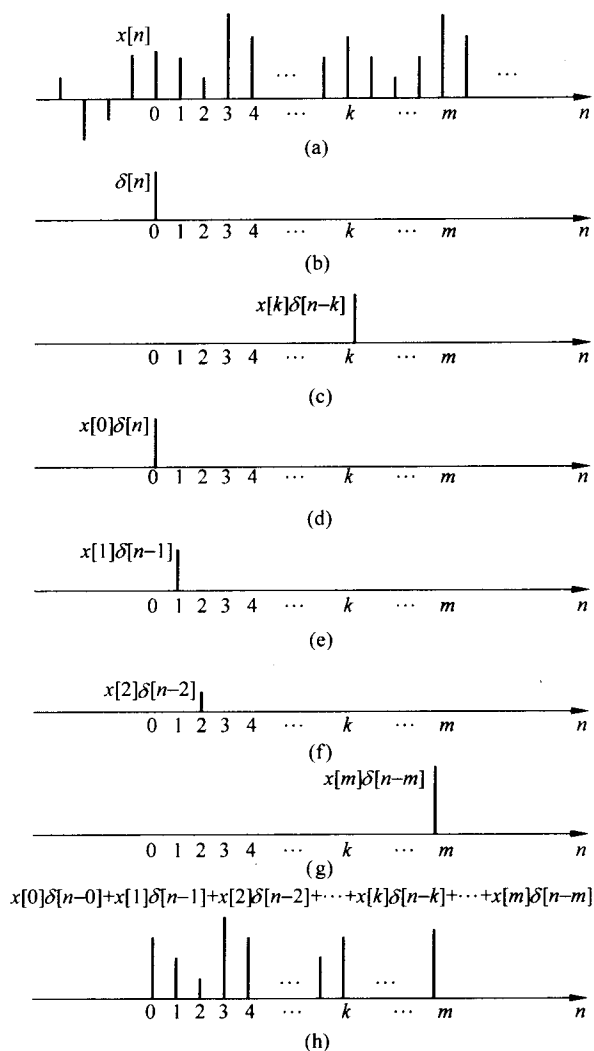


图 1.7 将 $x[n]$ 表示成偏移单位脉冲序列的线性组合

$x[m]\delta[n-m]$ 各序列的图形。由于序列相加是对应点处的值相加,把 k 从 0 到 m 的各 $x[k]\delta[n-k]$ 序列加在一起,就得到了 n 从 0 到 m 区间内的 $x[n]$,即

$$x[n] = \sum_{k=0}^m x[k]\delta[n-k] = x[0]\delta[n-0] + x[1]\delta[n-1] + \cdots + x[m]\delta[n-m] \quad 0 \leq n \leq m$$

如图 1.7(h) 所示。这种把不同偏移(k)的单位脉冲序列($\delta[n-k]$)各乘上不同的系数(此