CaiJing 高等财经院校系列教材

GAODENGCAIJINGYUANXIAOXILIEJIAOCAI

概率论与数理统计

GAILULUNYUSHULITONGJI

陈晓兰
刘蒲凰 主编

经济科学出版社

高等财经院校系列教材

概率论与数理统计

陈晓兰　刘蒲凰　　主　编
郝秀梅　刘纪芹　刘太琳　副主编

经济科学出版社

责任编辑：吕　萍
责任校对：徐领弟
版式设计：代小卫
技术编辑：王世伟

概率论与数理统计

陈晓兰　刘蒲凰　　主　编

郝秀梅　刘纪芹　刘太琳　副主编

经济科学出版社出版、发行　新华书店经销

社址：北京海淀区阜成路甲 28 号　邮编：100036

总编室电话：88191217　　发行部电话：88191540

网址：www.esp.com.cn

电子邮件：esp@esp.com.cn

山东济南铁路局印刷厂印装

880×1230　32 开　8.375 印张　220000 字

2004 年 6 月第一版　2006 年 1 月第二次印刷

印数:6001—9000 册

ISBN 7-5058-4191-2/F·3469　定价:14.00 元

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/陈晓兰，刘蒲凰主编．—北京：经济科学出版社，2004.6

（高等财经院校系列教材）

ISBN 7-5058-4191-2

Ⅰ．概…　Ⅱ．①陈…②刘…　Ⅲ．①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材　Ⅳ．021

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 050264 号

前　言

在大家已经掌握了《微积分》的基本理论、基本知识和基本方法的基础上，从对确定性现象的研究与学习过渡到对《概率论与数理统计》中的随机现象的研究和学习，将会面临着思维方式以及数学方法等方面的转变。为了使大家尽快适应该门课程的学习，我们认真组织编写了本部教材。本书在编写过程中特别注意了以下几个方面：

1. 在不失严谨的基础上，加强通俗性和直观性

对于教材中的一些重要理论，我们着重分析基本概念、基本思路和基本方法，不过分强调严格的数学论证，而是着眼于培养读者的逻辑思维能力和分析问题、解决问题的能力。叙述上尽可能详尽而又突出重点，力求写得通俗易懂，深入浅出。在内容的安排和概念的引入等方面都尽可能地联系直观背景。

2. 教材内容的编排更适合大家的思维习惯

本书注重在概念的讲解上，从具体到抽象，使读者由感性认识到理性认识有一个渐进的过程。书中配有较多的例题，旨在通过对例题的讲述，使读者易于掌握解题的基本方法和技巧。

3. 针对财经类专业的特点，加强应用性

为使大家了解概率论与数理统计在现代经济与管理中的简单应用，本书在例题与习题的编排上力求结合经济和管理中简单的实际问题。通过学习，将会对该学科广泛的应用性有更深刻的体会。

本书应讲授除打星号（*）以外的所有章节，必要时也可删去二维随机变量（§2.6）中的部分内容，这对以后学习数理统计

部分的内容影响不大。个别定理、性质的证明，可根据面授时间的长短作适当删节。

本书可作为高等财经类院校的教学用书，也可作为参加高等教育自学考试的教学与自学参考用书。

本书由陈晓兰、刘蒲凰主编，郝秀梅、刘纪芹、刘太琳任副主编。

各章节撰写人员为：陈晓兰（第一章、第二章第1、2、3节）、刘蒲凰（第二章第4、5、6节）、郝秀梅（第三章）、刘太琳（第四章）、刘纪芹（第五、六章）。

本书的编写与出版得到了山东财政学院继续教育学院、文理学院的领导和老师们的支持、关心与协助，在此表示由衷的感谢。

书中不当以至谬误之处，恐在所难免，请同行专家及读者不吝指教。

编者

2004年4月15日于济南

目录

第一章　随机事件及其概率

引　言

现实世界存在着两类现象：一类是所谓确定性现象，即在一定条件下必然会发生（或必然不会发生）的现象. 例如：

（1）在标准大气压下，纯水加热到100℃必然沸腾；

（2）在标准大气压下，温度高于4℃的纯水不会结冰.

这类现象，我们可以根据其赖以存在的条件，事先准确地断定其未来的结果，称之为**确定性现象**. 研究这类现象所使用的数学工具是我们已经学过的微积分、代数、几何等. 另一类是所谓**非确定性现象**，即在一定条件下具有多种可能的结果，究竟发生哪种结果事先无法确定的现象. 例如：

（1）掷一颗骰子，出现的点数可能是1，2，3，4，5，6中的某一个；

（2）保险公司的年赔偿金额；

（3）从某厂生产的一批产品中，任意抽取4件进行检验，抽到的次品数可能是0，1，2，3或4.

这类现象，在相同的可控制条件下进行一系列重复的观察或实验，每次出现的可能结果不止一个，而在每次实验或观察之前无法预知确切的结果，呈现出偶然性即不确定性，我们称之为**随机现象**.

恩格斯曾经说过："在表面上是偶然性在起作用的地方，这种偶然性始终是受内部的隐蔽着的规律支配的，而问题只是在于发现

这些规律."(《马克思恩格斯选集》第四卷)人们经过长期实践和深入研究之后,也发现随机现象是偶然性与必然性的辩证统一. 其偶然性表现在每次实验或观察之前,不能准确地预言发生哪种结果;其必然性表现在大量重复实验或观察中,它的结果呈现出某种量的规律性. 例如,抛掷一枚形状对称、质地均匀的硬币一次,其结果可能是正面(徽花面)朝上,也可能是反面(数字面)朝上,正面出现与否,抛掷之前是无法确切地预言的. 但多次重复地抛这枚硬币,正面出现的次数大约占抛掷总次数的一半(见§1.3中表1-1). 这种在大量重复实验或观察中呈现出的量的规律性,我们称之为**随机现象的统计规律性**. **概率论与数理统计**就是用以研究随机现象的统计规律性的一门重要的应用数学学科. 一般认为数理统计是概率论的一种应用,而概率论则是数理统计的理论基础. 由于我们所处的客观世界,无处不有偶然性在起作用,所以概率论与数理统计的理论与方法已经广泛应用于自然科学、社会科学等诸多领域.

"欲涉远必自迩,欲登高必自卑."我们要对一门科学进行学习与研究,就必须从钻研它的一些基本概念和方法入手. 因为任何一门科学,总包含着它所依据的一系列基本概念和方法. 为此,我们首先介绍学习概率论与数理统计所必需的预备知识.

§1.1 预备知识

1.1.1 两个基本原理

1. 加法原理

若完成一件事有 m 种不同的方式,第 i 种方式中有 n_i($i=1, 2, \cdots, m$)种不同的方法,其中任何一种方法都可以一次完成这件事,则完成这件事共有 $n_1+\cdots+n_m$ 种不同的方法.

2. 乘法原理

若一件事需要经过先后 m 个不同步骤才能最后完成. 其中第 i 个步骤有 n_i（$i=1, 2, \cdots, m$）种不同方法，则完成该件事共有 $n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_m$ 种不同方法.

例 1.1.1　飞行在北京——天津——上海——广州航空线上的民航飞机，要准备多少种不同的飞机票？

解　由乘法原理知，需要 $4 \times 3 = 12$ 种不同的飞机票.

加法原理和乘法原理是排列组合的基础.

1.1.2　排列与组合

1. 不重复的排列

从 n 个不同的元素中每次取出 m（$1 \leqslant m \leqslant n$）个不同的元素，按照一定的顺序排成一列，称为从 n 个不同元素中每次取 m 个不同元素的**排列**. 若 $m<n$，称之为**选排列**；若 $m=n$，称之为**全排列**.

选排列和全排列的种数分别用符号 P_n^m 和 P_n^n 表示，由乘法原理知其计算公式分别为

$$P_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!},$$

$$P_n^n = n!.$$

2. 可重复的排列

从 n 个不同的元素中有放回地（可重复）取 m 个元素，按照一定的顺序排成一列，称为从 n 个不同元素中取出 m 个的**可重复的排列**.

由乘法原理知其排列种数为 n^m.

3. 组合

从 n 个不同的元素中每次取出 m（$1 \leqslant m \leqslant n$）个不同的元素，

不管顺序如何组成一组，称为从 n 个不同元素中每次取 m 个不同元素的组合. 其组合总数用符号 C_n^m 表示，由乘法原理知其计算公式为

$$C_n^m = \frac{P_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}.$$

规定 $0! = 1$.

注 1.1.1 由上述组合计算公式不难验证组合有如下性质

(1) $C_n^m = C_n^{n-m}$; (2) $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$;

(3) $\sum\limits_{k=0}^{m} C_{n_1}^k \cdot C_{n_2}^{m-k} = C_{n_1+n_2}^m$; (4) $\sum\limits_{m=0}^{n} C_n^m = 2^n$.

例 1.1.2 从 6 个毕业生中，分配 4 个人到 4 所中学工作，每校一人，有多少种分配法?

解 有 $P_6^4 = 360$ 种分配法.

例 1.1.3 某城市的电话号码是七位数字，并且首位不能为零，最多可以安装多少台不同号码的电话机?

解 这是一个从 0，1，2，…，9 十个数码中选取七个数字的可重复的排列问题. 由乘法原理知最多可以安装 9×10^6 台电话机.

例 1.1.4 在一次考试中，某学生应做 9 道考题中的 6 道，问他有多少种选法? 如果还要求他至少回答前 5 道题中的 3 道题，有多少种选法?

解 本题与顺序无关，属于组合问题. 在 9 道考题中选 6 道，有 $C_9^6 = 84$ 种选法；若至少要回答前 5 道题中的 3 道，包括下列三种情况:

(1) 在前 5 题中选 3 个，后 4 题中选 3 个. 由乘法原理，有 $C_5^3 \cdot C_4^3 = 40$ 种选法；

(2) 在前 5 题中选 4 个，后 4 题中选 2 个，有 $C_5^4 \cdot C_4^2 = 30$ 种选法；

(3) 前 5 题全选，后 4 题中选 1 个，有 $C_5^5 \cdot C_4^1 = 4$ 种选法.

由加法原理，共有 $C_5^3 \cdot C_4^3 + C_5^4 \cdot C_4^2 + C_5^5 \cdot C_4^1 = 74$ 种选法.

§1.2　随机事件

1.2.1　随机事件

概率论与数理统计是研究随机现象的统计规律性的数学学科. 为了研究随机现象，就要对客观事物进行观察或实验. 这里所说的观察或实验是广义的，可以是各类科学实验，也可以是对某些事物的某些特征的观察. 例如，观察某种商品的日销售量，各种福利彩票的摇奖等. 在概率论中，我们把对随机现象的观察或实验统称为**随机试验**，简称**试验**. 概率论中所研究的随机试验具有以下特点：

(1) 在可控条件相同的前提下，试验可以（或原则上可以）重复进行，即**重复性**；

(2) 每次试验的结果具有多种可能性，但是试验之前可以明确试验的所有可能结果，即**明确性**；

(3) 在每次试验之前不能准确地预言该次试验将会出现哪一种结果，即**随机性**.

例 1.2.1　掷一颗骰子，观察出现的点数就是一个随机试验.

例 1.2.2　抛一枚硬币，观察正、反面出现的情况也是一个随机试验.

在概率论中，将随机试验的结果称为**随机事件**，简称**事件**. 换言之，随机事件是指每次试验中，可能发生也可能不发生，而在大量重复试验中具有某种规律性的事件. 通常用大写的拉丁字母 A、B、…等表示. 例如，在例 1.2.1 掷骰子的试验中，“出现 2 点”、“出现偶数点”，在例 1.2.2 抛硬币的试验中，“正面朝上”等都是随机事件. 在随机事件中，有的可以看成是由某些事件复合而成的，而有些事件则不能分解为其他事件的组合. 我们将不能分解为其他事件组合的最简单的随机事件称为**基本事件**. 例如，例 1.2.1

中“出现2点”、“出现5点”等都是基本事件.“出现偶数点”也是随机事件，但它不是基本事件，而是由“出现2点”，“出现4点”、“出现6点”这三个基本事件组成的. 我们将这种能够分解为两个或多个基本事件的随机事件称为**复合事件**.

1.2.2 样本空间

对于随机试验中事件及事件之间的关系与运算，如果应用集合概念和几何图示法，则较为直观且易于理解. 为此，我们引入样本空间的概念，从集合论的角度来描述和研究随机现象.

对于一个特定的随机试验，它的每一个基本结果（基本事件）称为一个**样本点**，用小写字母 w 表示. 全体样本点的集合，称为该试验的**样本空间**，通常用 Ω 表示.

显然，一个特定随机试验的样本空间 Ω 的子集就是该试验的一个随机事件. 若这个子集是单点集，则它对应该试验的一个基本事件. 随机事件 A 在某一随机试验中发生，当且仅当 A 所包含的某一个样本点在试验中出现. 由于每次试验中一定有样本空间 Ω 中的某一个样本点出现，因此，又称样本空间 Ω 为**必然事件**，即每次试验中一定发生的事件，称空集 Φ 为**不可能事件**，即每次试验中一定不发生的事件.

应该指出的是：必然事件和不可能事件是每次试验之前都可以准确预言的，从本质上讲它们都不是随机事件. 但为了讨论问题方便，我们还是把它们作为两个极端情况处理. 必然事件与不可能事件有着紧密的联系，并且，不论必然事件、不可能事件还是随机事件，都是相对于一定的试验条件而言，如果试验的条件变了，事情的性质也将可能发生变化. 例如，在掷骰子的试验中，掷一颗骰子时，“点数小于7”是必然事件，掷两颗骰子时，“点数之和小于7”是随机事件，而掷7颗骰子时“点数之和小于7”就是不可能事件了.

例 1.2.3 将一枚硬币连抛3次，观察正反面出现的情况，试写出该随机试验的样本空间.

解 用"H"表示出现"正面"，"T"表示出现反面. 于是，由题设，基本事件是从两个相异元素 H、T 中，允许重复地取出3个元素的排列，而所有这种排列共有 $2^3=8$ 种可能结果，所以，样本空间是

$$\Omega=\{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T),(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$$

注 1.2.1 随机试验的样本空间是由试验的所有基本事件组成的集合. 所以，只要根据题设条件，分析基本事件的特征，则样本空间为

$$\Omega=\{e \mid e\text{ 是试验的基本事件}\}.$$

基本事件和样本空间是概率论中的两个十分重要的概念. 样本空间可以是有限集，也可以是无限集. 如观察"某射击手在击中目标之前的射击次数"的样本空间是

$$\Omega=\{k \mid k=0,1,2,\cdots\}.$$

例 1.2.4 将 a、b 两球随机放入3个不同的盒子中，事件 A 表示第一个盒子内没有球，事件 B 表示两球在同一个盒子内，写出该随机试验的样本空间以及事件 A、B 的集合.

解 在该试验中，基本事件可以分成两类，一类是 a、b 两球放在同一个盒中，共有 $P_3^1=3$ 种可能结果：

$$(ab,0,0),(0,ab,0),(0,0,ab)$$

另一类是 a、b 两球分别放在两个不同的盒子中，共有 $P_3^2=6$ 种可能结果：

$$(a,b,0),(b,a,0),(a,0,b),(b,0,a)$$
$$(0,a,b),(0,b,a).$$

所以，样本空间为

$$\Omega=\{(ab,0,0),(0,ab,0),(0,0,ab),(a,b,0),(b,a,0),(a,0,b),(b,0,a),(0,a,b),(0,b,a)\}.$$

$$A=\{(0,ab,0),(0,0,ab),(0,a,b),(0,b,a)\}$$

$$B=\{(ab,0,0),(0,ab,0),(0,0,ab)\}.$$

在集合论中，常常用"文（Venn）氏图"直观地描述集合及其相互关系. 我们在引入了样本空间和样本点的概念之后，也可以

借助文氏图来直观地描述一个随机试验以及随机试验所包含的随机事件及其相互关系. 即用平面上某一方形（或矩形、或其他平面图形）区域表示必然事件即样本空间 Ω，用该区域上的子区域表示随机事件，如图 1 - 1.

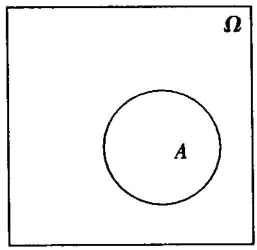

图 1 - 1

文氏图将有助于我们对一些概念和理论的理解.

1.2.3 随机事件之间的关系与运算

在研究随机试验时，我们发现一个随机试验中往往有多个随机事件，其中有些比较简单，而有些则较为复杂. 为了用较简单的事件表示较复杂的事件进而研究较复杂事件的性质和规律，下面引入同一试验的各种事件之间的几种主要关系和运算.

1. 包含关系

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称**事件 B 包含事件 A**，或称**事件 A 包含于事件 B**，记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

2. 相等关系

如果事件 A 包含事件 B，事件 B 也包含事件 A，则称**事件 A 与 B 相等**，记为 $A = B$.

3. 事件的和（并）

"两事件 A 与 B 中至少有一件发生"也是一个事件，把这一事件称为 **A 与 B 的和（并）**，记为 $A+B$ 或 $A\cup B$.

4. 事件的积（交）

"两事件 A 与 B 同时发生"也是一个事件，将这一事件称为 **A 与 B 的积（交）**，记为 AB 或 $A\cap B$.

事件的和与积都可以推广到有限多个事件以及可列个事件的情形：

$\sum\limits_{i=1}^{n} A_i$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 表示 A_1，A_2，…，A_n 中至少有一个事件发生；

$\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 表示 A_1，A_2，…A_n，…中至少有一个事件发生；

$\prod\limits_{i=1}^{n} A_i$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 表示 A_1，A_2，…，A_n 同时发生的事件；

$\prod\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 表示 A_1，A_2，…，A_n…同时发生的事件.

5. 事件的差

"事件 A 发生而事件 B 不发生"是一个事件，称为**事件 A 与 B 之差**，记为 $A-B$.

6. 互不相容事件

如果事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\Phi$，则称**事件 A 与 B 互不相容（或称互斥）**.

若 A_1，A_2，…，A_n 诸事件中，任何两个事件都是互不相容的，即 $A_iA_j=\Phi\,(i\neq j,\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，则称 **$n$ 个事件 A_1，A_2，…，A_n 两两互不相容（或两两互斥）**.

7. 对立事件

"事件 A 不发生"即"事件'非 A'"称为**事件 A 的对立事件**