数理化自学丛书

代数

第四册

数理化自学丛书

代　数

第四册

数理化自学丛书编委会
数学编写小组编

中国人民解放军战士出版社翻印

重 印 说 明

《数理化自学丛书》是一九六六年前出版的．计有《代数》四册，《平面几何》二册，《三角》一册，《立体几何》一册，《平面解析几何》一册（《物理》四册；《化学》四册．这套书的特点是：比较明白易懂，从讲清基本概念出发，循序前进，使读者易于接受和理解，并附有不少习题供练习用．这套书可以作为青年工人、知识青年和在职干部自学之用，也可供中等学校青年教师教学参考，出版以后，很受读者欢迎．但是在"四人帮"及其余党控制上海出版工作期间，这套书横被扣上所谓引导青年走白专道路的罪名，不准出版．

英明领袖华主席和党中央一举粉碎了祸国殃民的"四人帮"．我国社会主义革命和社会主义建设进入新的发展时期．党的第十一次全国代表大会号召全党、全军、全国各族人民高举毛主席的伟大旗帜，在英明领袖华主席和党中央领导下，为完成党的十一大提出的各项战斗任务，为在本世纪内把我国建设成为伟大的社会主义的现代化强国，争取对人类作出较大的贡献，努力奋斗．许多工农群众和干部，在党的十一大精神鼓舞下，决心紧跟英明领袖华主席和党中央，抓纲治国，大干快上，向科学技术现代化进军，为实现四个现代化作出贡献，他们来信要求重印《数理化自学丛书》．根据读者的要求，我们现在在原书基础上作一些必要的修改后，重新出版这套书，以应需要．

十多年来，科学技术的发展是很快的．本丛书介绍的虽仅是数理化方面的基础知识，但对于应予反映的科技新成就方面内容，是显得不够的．同时，由于本书是按读者自学的要求编写的，篇幅上就不免有些庞大，有些部分也显得有些烦琐．这些，要请读者在阅读时加以注意．

对本书的缺点，希望广大读者批评指出，以便修订时参考．

一九七八年一月

目　录

第一章　排列和组合

排列和组合是初等代数中的一段独特的内容，是数学里的重要基础知识之一．它对我们解决许多实际问题，以及进一步学习某些数学知识(如概率、二项式定理、行列式等等)，都有着重要的应用．

本章将在阐明排列和组合的意义的基础上，着重学习几种基本的、常用的排列和组合问题的解法．

§1·1　排　　列

让我们来看下面这几个问题．

问题1．用红、黄、蓝三种颜色的小旗，按不同的顺序升上旗竿，用以作出信号．在每个信号里，如果要求这三面小旗都要用到，那末单凭这三面小旗可以作出哪几种不同的信号？

【解】　在这三面小旗中，先取定一面(例如红旗)升上旗竿，这时，第二面旗子就只能在余下的两面中任取一面(要末是黄旗，要末是蓝旗)，第三面旗子就只能用剩下的最后一面旗了．这样就可以作出2种不同的信号：

$$\text{红}\begin{cases}\text{黄——蓝}\\ \text{蓝——黄}\end{cases}.$$

如果第一面旗是取定黄旗或者蓝旗，和上面的讨论一样，可以分别作出2种不同的信号：

$$\text{黄}\begin{cases}\text{红——蓝}\\ \text{蓝——红}\end{cases};\qquad \text{蓝}\begin{cases}\text{红——黄}\\ \text{黄——红}\end{cases}.$$

很明显，上面作出的这6种信号是各不相同的，并且，除这6种信号外，不可能再作出其他不同的信号了．由此，我们就找到了这个问题的答案：可以作出上面列举的这6种不同信号．

问题2． 由数字1、2、3，可以组成：

(1) 多少个没有重复数字的二位数？

(2) 多少个二位数？

【解】 (1) 我们可以按照先选十位上数字再选个位上数字的顺序，把各个不同的二位数一起列举出来：

$$1\begin{cases}2\\3\end{cases};\qquad 2\begin{cases}1\\3\end{cases};\qquad 3\begin{cases}1\\2\end{cases}.$$

由此可知，总共可组成6个不同的二位数．

(2) 对于一般的二位数，两个数位上的数字未必不同，因此，当我们选定了一个数字做十位上的数字以后，个位上的数字仍旧可以在这三个数字中任选，所以把这三个数字所组成的二位数一起列举出来便是：

$$1\begin{cases}1\\2\\3\end{cases};\qquad 2\begin{cases}1\\2\\3\end{cases};\qquad 3\begin{cases}1\\2\\3\end{cases}.$$

由此可知，总共可组成9个不同的二位数．

上面所提出的这两个问题，有着一个共同的特点，它们都可以看成是：从一些元素（旗子、数字）中，每次取出几个元素，按照一定的顺序摆成一排的问题．

从m个元素中，每次取出n个元素，按照一定的顺序摆成一排，称为**从m个元素里每次取出n个元素的排列**．

注意　根据上面这个排列的定义，所给的这m个元素和取出的n个元素，都不要求各不相同．本书只讨论下面这两种排列：

(1) 从 m 个各不相同的元素里，每次取出 n 个各不相同的元素的排列[如上面的问题 1 和问题 2 中的(1)都属于这一类型]，以后把这类排列简称为相异元素不许重复的排列.

(2) 从 m 个各不相同的元素里，每次取出 n 个元素(可以重复)的排列[如问题 2 中的(2)就属于这一类型]，以后把这类排列简称为相异元素可重复的排列.

在考虑排列问题时，常常把所给的元素顺次编上号码，用符号 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 来代表. 当元素不多时，还可以简单地用字母 $a, b, c, d, \cdots$；或者用数字 0, 1, 2, …, 9 来表示. 熟练地解这类符号、字母或者数字的排列问题，可以帮助我们掌握解排列问题的基本方法，提高解题能力. 在下面的例题和习题里，列入这类问题的目的就在于此.

例 写出从四个字母 a, b, c, d 中每次取出 2 个字母的所有不同排列，并要求：

(1) 不许重复；　　　　(2) 可以重复，

这种排列各有几个？

【解】 (1) $ab, ba, ca, da,$

$ac, bc, cb, db,$

$ad, bd, cd, dc.$

这样的排列有 12 种.

(2) $aa, ba, ca, da,$

$ab, bb, cb, db,$

$ac, bc, cc, dc,$

$ad, bd, cd, dd.$

这样的排列共有 16 种.

从上面的例子中可以看到，如果两个排列里所含的元素不完全一样，例如 ab 和 ac，就是不同的排列；如果所含的元素完全一样，而排列的顺序不同，例如 ab 和 ba，那末也是不

同的排列.

习　题　1·1

1. 由1、2、3、4、5这五个数字所组成的二位数一共有几个？其中不含重复数字的有几个？

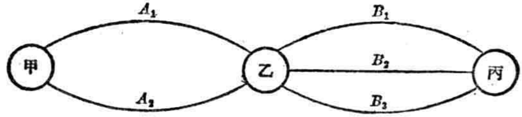
2. 用红色的、黄色的、蓝色的小旗各一面升上旗竿，以作出信号.总共可作出多少种不同的信号？

〔提示：作信号时，可以只用一面小旗升上旗竿，也可以用二面或者三面小旗按不同顺序升上旗竿.〕

§1·2　乘法原则

对排列问题的研究，主要是求出根据已知条件所作出的不同排列的种数. 对于一些简单的问题，可以采用上节例题中的方法，把所有不同的排列列举出来，数出种数找到答案.显然，这种方法是很烦的. 为了能找寻出一个简单的、直接的求排列种数的方法，下面先来考察一个具体问题.

问题　如果从甲地到乙地有2条路可走，乙地到丙地又有3条路可走，试问：从甲地经乙地而到丙地，可以有几种不同的走法？



【解】　如果用A_1、A_2表示从甲地到乙地的两条路，用B_1, B_2, B_3表示从乙地到丙地的这三条路(上图)，从图中可以看出，从甲地经乙地到丙地，有并且只有下面这6种走法：

$$A_1——B_1,\quad A_1——B_2,\quad A_1——B_3,$$
$$A_2——B_1,\quad A_2——B_2,\quad A_2——B_3.$$

可以看出，解这个问题需要考虑两个步骤：第一步，先从由甲地到乙地的这两条路中任意选择一条(有 2 种选法)；第二步，再从乙地到丙地这三条路中任意选择一条(有 3 种选法)；而最后计算出来的不同走法的种数 6，正就是这两个步骤中每一步骤的选法种数(2 与 3)的乘积.

对这个具体问题的解，给了我们一个重要的启示：倘使撇开了这里所说的"从甲地到乙地"、"从乙地到丙地"这些具体内容，而把它们一般地看成是要完成一件事的两个步骤，并且把这里所说的"2 条路"、"3 条路"一般地叙述成"有 m_1 个方法"、"有 m_2 个方法"，这样，就可以作出如下的结论：

设完成第一件事有 m_1 个方法，在完成第一件事以后再完成第二件事又有 m_2 个方法；那末，依次完成这两件事，就有

$$N=m_1\cdot m_2$$

个方法.

更一般地，我们还可以作出这样的结论：

设完成第一件事有 m_1 个方法，在完成第一件事以后再完成第二件事又有 m_2 个方法，在完成这二件事以后再完成第三件事又有 m_3 个方法……，在完成了前 $n-1$ 件事以后再完成第 n 件事又有 m_n 种方法；那末，依次完成这 n 件事，就有

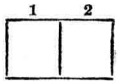
$$\boldsymbol{N=m_1\cdot m_2\cdot m_3\cdots m_n}$$

个方法.

在上面这个式子里，等号右边是乘积的形式，为了突出这一点，我们把上面这个结论称为**乘法原则**.

应用这个原则，就可以不通过具体作出排列，而求出符合题设条件的所有的不同排列的种数.

例如，对§1·1例题中的(1)所作的排列，可以看成是在排好顺序的两个位置



上，从 a, b, c, d 这四个字母里，选取字母去分别占据，因此可以认为这是要依次完成下面两件事：

(1) 先在 a, b, c, d 这四个字母中选取1个，去占据第1号位置；

(2) 再在余下的3个字母(因为排列里不许有重复字母，所以已经占有第1号位置的那个字母不能再选)中选取1个去占据第2号位置.

因为，完成第一件事有4个方法，完成第二件事有3个方法，所以完成这两件事共有

$$N=4\cdot3=12$$

个方法.

类似地，读者可以自己来说明上节例题里(2)所求的排列种数是

$$N=4\cdot4=16.$$

习　题　1·2

应用乘法原则解下列各题：

1. 从 a, b, c, d, e 这5个字母里，每次取出：

(1) 2个；　(2) 3个；　(3) 4个；　(4) 5个

不同字母，求所组成的各种不同排列的种数.

[解法举例：(1) $N_2=5\cdot4=20.$]

注意　本题的四个小题目都是要求排列的种数 N，为便于区别，我们用 N_2 表示选取2个字母的排列种数，N_3, N_4, N_5 便分别表示选取3, 4, 5个字母的排列种数.

2. 用数字 1, 2, 3, 4 可以组成多少个:

(1) 二位数?　　　　(2) 三位数?　　　　(3) 四位数?

其中不含有重复数字的各有几个?

3. (1) 从 9 块不同颜色的积木里，取出三块排成一横排，共有多少种不同排法?

(2) 在所有的三位数里，共有几个不含有数字 0 的?

比较一下，(1)和(2)有什么区别.

§1·3 相异元素不许重复的排列

在习题 1·2 第 1 题里，读者已经计算过：从 a, b, c, d, e 这 5 个字母里，每次取出 2 个、3 个、4 个、5 个不同字母，所组成的各种不同排列的种数分别是:

$$N_2=5\cdot 4=20,$$

$$N_3=5\cdot 4\cdot 3=60,$$

$$N_4=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2=120,$$

$$N_5=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120.$$

观察上面这些式子，可以看出：所求的排列种数是若干个连续自然数的乘积，乘积中最大的一个因数就是所给元素的个数，乘积中因数的个数等于排列中含有的元素的个数.

为了统一起来，有时也把这 5 个字母里只取出 1 个，说成是这 5 个不同字母中取出 1 个字母的排列. 很明显，这样作出的排列的种数是

$$N_1=5.$$

把上面这个问题推广到一般的情况，就可以得出结论:

从 m 个不同元素里，每次取出:

1 个元素的所有排列的种数是 m;

2 个不同元素的所有排列的种数是 $m(m-1)$;

3 个不同元素的所有排列的种数是 $m(m-1)(m-2)$;

4 个不同元素的所有排列的种数是

$$m(m-1)(m-2)(m-3);$$

……………………………………………………

n 个 $(1\leqslant n\leqslant m)$ 不同元素的所有排列的种数是

$$m(m-1)(m-2)\cdots[m-(n-1)],$$

就是

$$m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1).$$

上面这种排列是 m 个各不相同元素中每次取 n 个各不相同元素的排列，我们用符号 A_m^n 表示这类排列里所有不同排列的种数. 于是，

$$\boldsymbol{A_m^n=m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}.$$

这个公式称为**排列数公式**. 这里 m, n 都表示自然数，且 $n\leqslant m$.

把这公式写成定理形式，即是:

定理 从 m 个不同元素里每次取出 n 个不同元素的所有排列的种数，等于 n 个连续自然数的乘积，其中最大的一个数是 m.

为了以后解排列问题的需要，下面先来熟悉一些关于排列数的运算.

例 1. 计算 $\dfrac{A_{16}^3}{2A_8^4}$ 的值.

【解】 $\dfrac{A_{16}^3}{2A_8^4}=\dfrac{16\cdot15\cdot14}{2\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}=\dfrac{16\cdot15\cdot14}{16\cdot14\cdot15}=1.$

例 2. 计算 $\dfrac{A_9^5+A_9^4}{A_9^3}$ 的值.

【解】 $\dfrac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5+9\cdot8\cdot7\cdot6}{9\cdot8\cdot7}=\dfrac{9\cdot8\cdot7\cdot6(5+1)}{9\cdot8\cdot7}=36.$

习　题　1·3(1)

1．计算以下各式的值：

(1) A_6^3;　　(2) A_{10}^4;

(3) $\frac{A_{12}^8}{A_{12}^7}$;　　(4) $\frac{3A_{20}^{19}}{2A_{20}^{18}}$.

2．计算以下各式的值：

(1) $\frac{A_8^3-A_8^2}{A_4^3}$;　　(2) $\frac{A_{10}^5+A_{10}^4}{A_{12}^6-A_{12}^5}$;

(3) $\frac{4A_5^2}{A_2^2+A_3^2+A_4^2}$;　　(4) $\frac{A_7^6}{A_8^3\cdot A_3^2}$.

应用上面的公式，可以很简便地解答一些关于相异元素的不许重复的排列问题.但在应用这公式时,必须先考察两点：

(1) 所给的元素是不是各不相同的?

(2) 在作出的排列里,元素是不是各不相同的?

下面举例来说明这类问题的解法.

例 3． 某铁路线上一共有 48 个大小车站,铁路局要为这条路线上准备几种不同车票?

【解】 因为每张车票都标明起点站和终点站的站名，所以同样的两站间就有 2 种不同的车票. 从 48 个车站的站名中取出两个车站名,分起点站和终点站排起来,所有这种排列的种数即是本题的解,所以这是求在 48 个不同元素中每次取 2 个不同元素的所有排列的种数问题. 于是，由上面的定理即得,需要准备的车票种数是

$$A_{48}^2=48\cdot 47=2256.$$

答：要准备 2256 种不同的车票.

注意　在解排列的具体问题时,解答中要作简要的说明，不宜只列出一个算式;在以后解组合问题时也一样.

习　题　1·3(2)

1. 用1、2、3、4、5、6这6个数字，可以组成多少个没有重复数字的

(1) 三位数; (2) 四位数.

2. 有颜色不同的小旗5面，现在要取出3面顺次升入旗竿作出信号，问可以构成多少种不同的信号？

3. 有5本不同的书，要分别包上包书纸. 现有花色不同的包书纸6张，问有几种不同的包法？

4. 有甲、乙、丙、丁、戊5个队进行乒乓球比赛，如果每个队都要与另一队在本队的场子里以及客队的场子里各比赛一次，问这次比赛总共要进行多少场次？

§1·4　全　排　列

在公式

$$A_m^n=m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+2)(m-n+1)$$

中，如果令 $n=m$，就得

$$A_m^m=m(m-1)(m-2)\cdots2\cdot1.$$

这个公式指出：把 m 个不同的元素全部取出来作排列，所有这样的排列的种数，等于从1开始的 m 个连续自然数的连乘积.

这种排列称为 **m 个不同元素的全排列**，并且用专门的符号 P_m 来表示这类排列所有的排列种数，就是

$$\boldsymbol{P_m=A_m^m=1\cdot2\cdots(m-1)\cdot m}.$$

为了方便起见，把从1开始的 m 个自然数的连乘积，用记号 $m!$(读做 m 阶乘)来表示. 应用这一记法，m 个不同元素的全排列的种数公式就可以写成

$$\boldsymbol{P_m=m!}.$$

例 1. 计算 $\dfrac{8!-6!}{7!-6!}$ 的值.

分析 $8!=8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=(8\cdot7)\times6!$,

$7!=7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=7\times6!$,

所以分子分母中都含有因数 6!, 可以先约去 6! 后再计算。

【解】
$$\frac{8!-6!}{7!-6!}=\frac{(8\cdot7)\times6!-6!}{7\times6!-6!}=\frac{55\times6!}{6\times6!}$$
$$=\frac{55}{6}=9\frac{1}{6}.$$

注
$$\begin{aligned}(n+1)!&=(n+1)\cdot n!\\&=(n+1)\cdot n\cdot(n-1)!\\&=\cdots\cdots\end{aligned}$$

这种变换在计算中很有用, 应该熟悉这些计算技巧.

例 2. 求证 $P_{n+1}-P_n=nP_n$.

【证】
$$\begin{aligned}P_{n+1}-P_n&=(n+1)!-n!=(n+1)\cdot n!-n!\\&=(n+1-1)\cdot n!\\&=n\cdot n!=n\cdot P_n,\end{aligned}$$

命题得证.

习 题 1·4

1. 计算:

(1) $\dfrac{P_{10}-9P_9-8P_8}{P_8}$; (2) $\dfrac{P_{10}}{P_6\cdot P_4}$.

2. 求证:

(1) $P_8-8P_7+7P_6=P_7$; (2) $16P_3=P_5-P_4$.

3. 把编上号码的 5 台车床排成一列, 共有几种不同的排法?

§1·5 加法原则

在习题 1·1 里, 我们曾经解过下面这个问题:

问题 用红色的、黄色的、蓝色的小旗各一面升上旗竿，以作出信号，总共可作出多少种不同的信号？

解这个问题时，我们是这样考虑的：

作出的信号可以按照用到的小旗的面数分成三大类，即

(1) 只用一面小旗的，这样作出的信号有 $A_3^1=3$ 种；

(2) 用二面小旗的，这样作出的信号有 $A_3^2=6$ 种；

(3) 三面小旗都用的，这样作出的信号有 $A_3^3=6$ 种.

因为上面这三类信号都不相同，并且除此之外不再有其他不同的信号可作，因此总共可作出的不同信号，应该是这三类方法所作出的各种信号的和，由此得

$$N=3+6+6=15\ (\text{种}).$$

象乘法原则一样，从这个问题的解答中，可以启发我们作出如下的一般结论：

设完成一件事有 n 类方法，只要选择任何一类方法中的一种方法，这件事就可以完成. 如果已知其中第一类方法有 m_1 种，第二类方法有 m_2 种……，第 n 类方法有 m_n 种，并且这 $m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种方法里，任何两种方法都不相同，那末完成这件事就有

$$\boldsymbol{N=m_1+m_2+\cdots+m_n}$$

种方法.

在上面这个式子里，等号右边是和的形式，为了突出这一点，我们把这一结论称为**加法原则**.

在解一些比较复杂的排列问题时，常常要用到加法原则和 §1·2 里提出的乘法原则，下面举例来说明.

例 1. 用 0、1、2、3 这 4 个数字，可以组成多少个没有重复数字的四位数.

分析 因为四位数的千位上的数字不能是 0，为了这一点，我们把