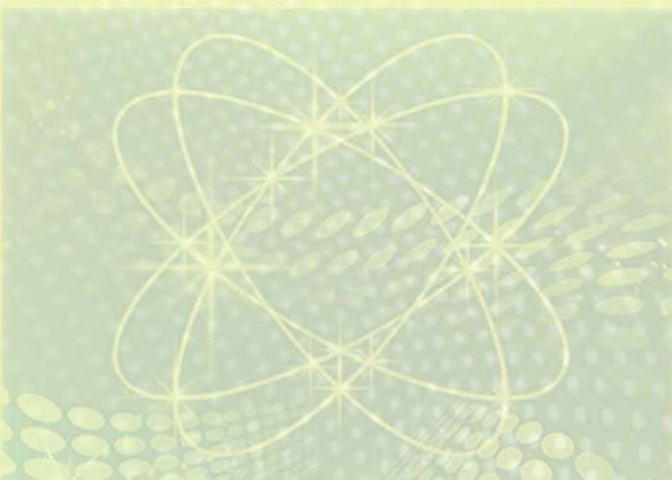
大学数学系列课程学习辅导与同步练习

概率论与数理统计

任叶庆 李小爱 唐美兰 编著



中南大学出版社

中南大学数学与统计学院高等数学教学与研究中心

大学数学系列课程学习辅导与同步练习

概率论与数理统计

任叶庆　李小爱　唐美兰　**编著**

中南大學出版社
www.csupress.com.cn

前　言

大学数学系列课程包括高等数学(上、下)、线性代数、概率论与数理统计等课程，它是高等院校各专业必修的基础理论课，是高等院校人才培养的关键环节。认真扎实学好大学数学系列课程有助于学生科学思维能力、数学运用能力、创新探索能力的培养，有利于后续课程的学习，并为进一步深造奠定必要的数学基础和科学素养。

2013 年，中南大学首批“开放式精品示范课堂建设计划”资助建设高等数学开放式精品示范课堂建设。课程建设团队经过 2 年的探索、研究与实践，形成了特色鲜明的大学数学开放式课堂教学模式，受到了学校领导与学生的肯定与支持，决定面向全校推广应用。

为配合开放式课堂教学模式改革的实践，适应学生自主研学、自由探索的需要，激发学生对本课程学习的积极性，有效地将课堂学习延伸到课外，方便师生互动、规范作业，大学数学系列课程教学团队经多年的经验积累、对课程教学的不断改革钻研，精心设计了《大学数学系列课程学习辅导与同步练习》，作为课程学习的配套资料，其内容主要包括课程知识结构、重点难点、知识点综合例题、课程导学、同步练习，内容设置加强了对课堂教学的针对性，力求达到课前预学、课后复习、作业练习、巩固提高的目的，通过课前、课间、课后环节自主性、探索性、讨论式、启发式学习，加深对教学内容的理解，培养学生独立运用理论知识、严密思考与科学计算的能力。

《大学数学系列课程学习辅导与同步练习》涵盖了整个大学一年级两个学期及大学二年级上学期的所有大学数学系列(高等数学(上、下)、线性代数、概率论与数理统计)课程的内容，配套同步练习册代替了学生的大学数学作业本，每套同步练习含填空、选择、计算、证明题。填空、选择只要将答案填入即可，计算、证明题需在活页纸下方或反面空白处写出主要步骤。为方便教师批改、学生同步学习，课程导学、同步练习作为活页形式，课前完成下次课程的导学，课后完成上次课相应的一套同步练习，并交任课教师批阅，教师批阅后返回给学生，以备复习时使用。做好课程教学的导学和同步练习是学好大学数学系列课程的重要环节。教科书上的习题可作为同学们课外练习补充、复习之用。

书山有路勤为径，学海无涯苦作舟。希望同学们充分利用《大学数学系列课程学习辅导与同步练习》，自主学习，在科学的道路上不断进取、勇往直前，学有所成!

感谢中南大学开放式精品示范课堂建设计划的项目支持，感谢中南大学数学与统计学院大学数学系列课程教学团队全体教师的无私奉献，感谢中南大学出版社的大力支持。

中南大学

高等数学教学与研究中心

2015 年 9 月 20 日

目　录

第 1 章　随机事件及其概率

Ⅰ. 学习内容要点与要求

1. 理解随机事件的概念、理解样本空间的概念，掌握事件间的关系与运算;
2. 理解古典概率、几何概率、条件概率的定义，掌握概率的基本性质;
3. 掌握概率的加法公式、乘法公式，掌握全概率公式和 Bayes 公式;
4. 掌握随机事件之间的关系与运算规律;
5. 理解随机事件独立性的概念，掌握应用事件的独立性简化概率计算的方法;
6. 理解独立重复试验的概念，理解 Bernoulli 概型;
7. 会计算古典概型的概率;
8. 会利用二项概率公式计算随机事件的概率.

Ⅱ. 重点、难点与知识结构

重点

1. 随机事件的概率及其性质;
2. 条件概率与乘法公式，全概率公式与 Bayes 公式;
3. 随机事件的独立性及 Bernoulli 概型.

难点

1. 古典概率的计算;
2. 条件概率的概念及计算;
3. 全概率公式与 Bayes 公式的应用.

本章知识点网络图

- 随机现象 — 随机试验 — 随机事件
  - 表达方式
    - 语言叙述
    - 点集 — 基本事件、样本空间、事件、必然事件、不可能事件
    - 关系
      - 包含、相等、互不相容、对立、完备事件组
      - 相互独立
        - 定义(描述性定义与严格定义)
        - 性质
    - 运算
      - 形式 — 加(并)、交(积)、减、逆
      - 法则 — 交换、结合、分配、对偶、吸收、分解
    - 随机变量取值范围
  - 概率
    - 定义 — 描述性定义、统计定义、古典定义、几何定义、公理化定义
    - 性质
      - 非负、有界、有限可加
      - 加法公式、减法公式、求逆公式
    - 条件概率
      - 定义
      - 乘法公式
    - 概型
      - 等可能概型
        - 古典概型
        - 几何概型
      - 独立实验概型(n 重 *Bernoulli* 概型)

Ⅲ. 典型例题分析

一、样本空间、随机事件的描述、事件间的关系及运算

例 1 设一批零件，有正品也有次品，从这批零件中任意抽取 7 件. 设 A 表示事件“抽到的次品数不多于 3”，B 表示事件“抽到的次品数为奇数”. 试问：事件 $A\cup B$、AB、$A-B$、$\overline{B}$ 各表示什么意思?

解 A 表示抽到的次品数为 0，1，2，3，即 $A=\{0,1,2,3\}$，B 表示抽到的次品数为 1，3，5，7，即 $B=\{1,3,5,7\}$，则 $A\cup B=\{0,1,2,3,5,7\}$，$AB=\{1,3\}$，$A-B=\{0,2\}$，$\overline{B}=\{0,2,4,6\}$，所以 $A\cup B$ 表示抽到的次品数为 0，1，2，3，5 或 7；AB 表示抽到的次品数为 1 或 3；$A-B$ 表示抽到的次品数为 0 或 2；$\overline{B}$ 表示抽到的次品数为 0，2，4 或 6.

说明：利用集合形式写出随机事件的关键是对样本空间、事件的积、事件的和、事件的差、互斥事件及对立事件等定义能准确理解并切实掌握.

二、古典概率与几何概率的计算

例 1 在房间里有 10 个人，分别佩戴从 1 号到 10 号的纪念章，任选 3 人记录其纪念章的号码. (1) 求最小号码为 5 的概率；(2) 求最大号码为 5 的概率.

解 设 A 表示事件“最小号码为 5”，B 表示事件“最大号码为 5”，而 10 人中任选 3 人共有 $C_{10}^3=120$ 种选法，此即为样本点的总数.

(1) 因选到的最小号码为 5，则其中一个号码为 5 且其余两个号码都大于 5. 它们可从 6 ~ 10 这 5 个数中选取，故 $P(A)=\dfrac{C_5^2}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{12}$.

(2) 同理可得 $P(B)=\frac{C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{20}$.

例 2　在(0, 1) 区间内任取两个随机数 x, y, 求两数之积小于 $\frac{1}{4}$ 的概率.

解　显然 (x, y) 为一个样本点, 从而样本空间

$$S=\{(x, y) \mid 0<x<1, 0<y<1\}$$

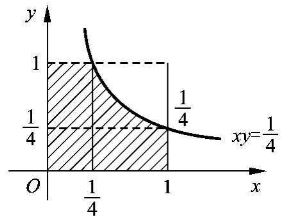


图 1－1

又设 A 为所求事件, 则易知 $A=\{(x, y) \mid xy<\frac{1}{4}\}$, 如图 1－1 阴影部分所示, 所求概率为阴影部分的面积与 S 的面积之比, 故

$$P(A)=\frac{\frac{1}{4}+\int_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{1}{4x} \mathrm{d} x}{1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4} \ln x\Big|_{\frac{1}{4}}^{1}=\frac{1}{4}(1+\ln 4)=0.5966.$$

小结: 直接计算一个随机事件的概率只有在特定的简单试验模型中才可以进行, 古典概率与几何概率都是在特定的古典试验概型(有限等可能) 与几何试验概型(无限等可能) 中, 应用概率的古典定义与几何定义直接计算事件的概率. 应该指出的是:

(1) 在古典概率的计算中, 正确计算出所求概率 $P(A)$ 的事件 A 中所含的样本点数目(或 A 中所包含的基本事件个数) 是解此类题的关键, 也是解题难点所在. 如果能够从分析事件 A 发生的结构出发, 弄清导致 A 发生的每个环节, 将有助于正确计算 A 中所含样本点数, 避免漏算或重复计算的错误. 在计算过程中经常会用到排列组合的有关知识, 有时也需要利用列举法逐一分析 A 所包含的样本点数.

(2) 在几何概率的计算中, 关键的问题是如何计算出事件 A 的度量(长度、面积、体积等), 关于这一点, 根据题设条件画出正确图形, 并熟悉一些简单几何图形度量(面积、体积等) 的计算将有助于解题.

三、利用概率与条件概率的性质和基本公式计算事件的概率

例 1　已知 $P(A)=0.3$, $P(B)=0.6$, 试在下列两种情形下分别求出 $P(A-B)$ 与 $P(B-A)$.

(1) 事件 A、B 互不相容; (2) 事件 A、B 有包含关系.

解　(1) 由于 $AB=\Phi$, 因此 $A-B=A$, $B-A=B$. 于是

$$P(A-B)=P(A)=0.3, P(B-A)=P(B)=0.6$$

(2) 由题设知 $A \subset B$.

事实上, 若 $A \supset B$, 由性质可得 $P(A) \geqslant P(B)$, 因此与已知 $P(A)=0.3$, $P(B)=0.6$ 矛盾. 故有 $A \subset B$, 于是

$$P(A-B)=P(\Phi)=0, P(B-A)=P(B)-P(A)=0.3.$$

小结: 在概率的基本公式中, 加法公式、乘法公式与减法公式常常与事件间关系与运算结合应用, 特别要注意两点: 一个是在事件具备某种特定关系时, 各公式的应用形式. 比如当 $A \supset B$ 时, $P(A \cup B)=P(A)$, $P(A-B)=P(A)-P(B)$, $P(AB)=P(B)$; 另一点应注

意各个公式的灵活应用，比如从加法公式可以得到：$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$.

例 2 10 件产品中有 4 件不合格品，从中任取两件，已知所取两件产品中有一件是不合格品，求另一件也是不合格品的概率.

解 设事件 A_i 表示“从 10 件产品中任取两件，有 i 件不合格品”，$i=0,1,2$，A_0,A_1,A_2 互斥. 设 $B=A_1\cup A_2$，依题意所求概率为 $P(A_2\mid B)$，而

$$P(A_2)=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{15},\ P(A_1)=\frac{C_4^1C_6^1}{C_{10}^2}=\frac{8}{15},$$

可得
$$P(B)=P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{10}{15};$$

显然，事件 $B\supset A_2$，因此 $P(A_2B)=P(A_2)$，应用条件概率公式，得

$$P(A_2\mid B)=\frac{P(A_2B)}{P(B)}=\frac{2/15}{10/15}=0.2.$$

四、全概率公式与 Bayes 公式的应用

例 设有来自三个地区的各 10 名、15 名和 25 名考生的报名表，其中女生的报名表分别为 3 份、7 份和 5 份. 随机地取一个地区的报名表，从中先后抽出两份.（1）求先抽到的一份是女生表的概率 p；（2）已知后抽到的一份是男生表，求先抽到的一份是女生表的概率 q.

解 设 H_i 表示报名表是第 i 个地区考生的$(i=1,2,3)$，A_j 表示第 j 次抽到的报名表是男生表$(j=1,2)$，则

$$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3},$$

$$P(A_1\mid H_1)=\frac{7}{10},\ P(A_1\mid H_2)=\frac{8}{15},\ P(A_1\mid H_3)=\frac{20}{25}.$$

(1) $p=P(\overline{A}_1)=\sum\limits_{i=1}^{3}P(H_i)P(\overline{A}_1\mid H_i)=\frac{1}{3}(\frac{3}{10}+\frac{7}{15}+\frac{5}{25})=\frac{29}{90}.$

(2) 由全概率公式得

$$P(A_2\mid H_1)=\frac{7}{10},\ P(A_2\mid H_2)=\frac{8}{15},\ P(A_2\mid H_3)=\frac{10}{25},$$

$$P(\overline{A}_1A_2\mid H_1)=\frac{7}{30},\ P(\overline{A}_1A\mid H_2)=\frac{8}{30},\ P(\overline{A}_1A_2\mid H_3)=\frac{5}{30},$$

$$P(A_2)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(A_2\mid H_i)=\frac{1}{3}(\frac{7}{10}+\frac{8}{15}+\frac{20}{25})=\frac{61}{90},$$

$$P(\overline{A}_1A_2)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(\overline{A}_1A_2\mid H_i)=\frac{1}{3}(\frac{7}{30}+\frac{8}{30}+\frac{5}{30})=\frac{2}{9},$$

因此，
$$q=P(\overline{A}_1\mid A_2)=\frac{P(\overline{A}_1A_2)}{P(A_2)}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{61}{90}}=\frac{20}{61}.$$

小结：关于全概率公式与 Bayes 公式的解题步骤可以概括如下：（1）应用全概率公式与 Bayes 公式时，首先要明确导致所讨论事件 A 发生的完备事件组 $B_1,B_2,\cdots,B_n$；其次要根据题设条件计算出 $P(B_i)$ 与 $P(A\mid B_i)$；最后应用全概率公式解出所要计算的概率 $P(A)$ 或应用

Bayes 公式求出条件概率 $P(B_i \mid A)$. (2) 全概率公式中的完备事件组，可以是有限个事件(最少为两个: A 与$\overline{A}$)，也可以是可列个事件. (3) 全概率公式 $P(A) = \sum_i P(B_i)P(A \mid B_i)$ 中的事件可以是一个单一的事件，也可以是一些事件运算后的一个事件.

五、事件的独立性

例　某工人看管甲、乙、丙3台机器，在1小时内，这3台机器不需照管的概率分别为0.8，0.9，0.6，设这三台机器是否需照管是相互独立的，求在1小时内: (1) 有机床需要工人照管的概率; (2) 机床因无人照管而停工的概率.

解　(1) 设 A_i 表示"第 i 台机器无需照管"，$i = 1, 2, 3$ 分别表示甲、乙、两台机床，且 A_1, A_2, A_3 相互独立. 则有机器需要工人照管的事件为 $\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \overline{A}_3$，即$\overline{A_1A_2A_3}$，因而

$$P(\overline{A_1A_2A_3}) = 1 - P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 1 - 0.8 \times 0.9 \times 0.6 = 0.568.$$

(2) 以 B 表示"机器因无人照看而停工"

$$\begin{aligned} P(B) &= P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3) + P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) \\ &= 0.2 \times 0.1 \times 0.6 + 0.2 \times 0.9 \times 0.4 + 0.8 \times 0.1 \times 0.4 + 0.2 \times 0.1 \times 0.4 \\ &= 0.124. \end{aligned}$$

说明: 若事件 A 与 B 相互独立，则 $P(AB) = P(A)P(B)$，$P(A - B) = P(A)P(\overline{B})$，$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 1 - P(\overline{A})P(\overline{B})$.

又若事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$相互独立，则$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$，$P(A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\cdots P(\overline{A_n})$. 由此可见，事件的独立性会给一些事件的概率计算带来方便.

导学 1.1

(**1.1** 随机试验、随机事件及样本空间)

一、相关问题

1. 向上抛一粒石子，在地心引力的作用下会发生什么现象?

2. 向上抛掷一颗骰子，在地心引力的作用下会发生什么现象?

3. 国王想处死一位大臣，但还不想让“暴君”的名声落在自己头上. 行刑之前，执行官将两个纸条递给大臣示意他抽取一个. 大臣抽了一个将其塞进了嘴里吞了下去，说“我接受了神的审判，你看看剩下的字条就知道我吞进去的是什么了”. 大家一看剩下的字条上写的“死”. 这是天意吗?

二、相关知识

1. 自然现象或社会现象等各种现象一般可以分成几类?有何特点?

2. 概率论与数理统计的研究对象是什么? 概率论的研究是如何展开的?

3. 简述样本空间的定义.

4. 简述随机事件的定义、分类，并说明随机试验、样本空间、随机事件间的关系.

5. 简述随机事件间关系的运算性质.

三、练习题

1. 写出下列随机试验的样本空间

(1) 记录一个小班一次数学考试的平均分数(以百分制记分);

(2) 生产产品直到得到 10 件正品，记录生产产品的总件数;

(3) 对某工厂出厂的产品进行检查，合格的盖上“正品”，不合格的盖上“次品”，如果连续查出 2 个次品就停止检查，或检查 4 个产品就停止检查，记录检查的结果.

2. 设 A，B，C 为三事件，用 A，B，C 的运算关系表示下列事件

(1) A 发生，B 与 C 不发生;

(2) A，B 都发生，而 C 不发生;

(3) A，B，C 至少有一个发生;

(4) A，B，C 都发生;

(5) A，B，C 都不发生;

(6) A，B，C 不多于一个发生;

(7) A，B，C 不多于两个发生;

(8) A，B，C 至少有两个发生.

四、思考题

如何理解互斥与互逆事件?

导学 1.2

(**1.2** 概率的定义及性质　**1.3** 古典概型与几何概型)

一、相关问题

电视主持人指着三扇关着的门说 “其中一扇后是汽车，另两扇后各有一只山羊. 你可随意打开一扇，后面的东西就归你了. 你当然想得到汽车. ”当你选定一扇门，如 1 号门(但未打开) ，这时主持人打开有山羊的另一个扇门，不妨说是 3 号门(主持人清楚哪扇门后是汽车) ，并对你说: ”现在再给你一次机会，允许你改变原来的选择. ”你为了得到汽车是坚持 1 号门还是改选 2 号门?

二、相关知识

1. 简述概率的统计定义.
2. 概率的公理化定义的含义? 有何意义? 由概率的公理化定义可以得到概率的哪些重要性质?
3. 简述古典概型的特点、古典概率的定义与公理化定义的关系.
4. 如何求古典概型对应的随机事件发生的概率?
5. 简述小概率推断原理.
6. 简述几何概型的特点. 如何求几何概型对应的随机事件发生的概率?

三、练习题

1. 若 A，B 为任意两个随机事件，则(　　) .

(A) $P(AB) \leqslant P(A)P(B)$;　　(B) $P(AB) \geqslant P(A)P(B)$;

(C) $P(AB) \leqslant \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$;　　(D) $P(AB) \geqslant \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$.

2. 从 5 双不同鞋子中任取 4 只，4 只鞋子中至少有 2 只配成一双的概率是多少?

3. 甲、乙两人约定在下午 1 时到 2 时之间到某站乘公共汽车，又这段时间内有 4 班公共汽车，它们的开车时刻分别为 1∶15、1∶30、1∶45、2∶00. 如果他们约定: (1) 见车就乘，(2) 最多等一辆车，求甲、乙两人同乘一辆车的概率. 假定甲乙两人到达车站的时刻是互不相关的，且每人在 1 时到 2 时的任何时刻到达车站是等可能的.

四、思考题

1. 如何理解互斥事件的加法公式与一般加法公式?
2. 对事件 A，B，C，当 $ABC = \varnothing$ 时，$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$ 是否成立?

导学 1.3

(**1.4** 条件概率与乘法公式)

一、相关问题

甲乙两城市都位于长江下游. 根据一百多年的气象记录，知道一年中，雨天的比例甲城市占 0.2，乙城市占 0.18，两地同时下雨占 0.12. 求:

(1) 已知甲城市下雨，求乙城市下雨的概率;

(2) 已知乙城市下雨，求甲城市下雨的概率;

(3) 甲乙两城市至少有一城市下雨的概率.

二、相关知识

1. 简述条件概率的概念?
2. 条件概率与公理化定义有什么关系?
3. 如何求条件概率?有几种方法?
4. 概率的乘法公式是怎么推导来的?
5. 应用乘法公式求多个事件同时发生的概率时，这些事件之间在发生的时间上或逻辑上有什么关系?

三、练习题

1. 掷两颗骰子，已知两颗骰子点数之和为 7，求其中有一颗为 1 点的概率(要求用两种方法求).

2. 已知 10 个电子元件中有 2 个废品，现在其中任取 2 次，每次取 1 个，且不放回，求:

(1) 2 个都是正品的概率; (2) 第一次取得正品，而第 2 次取到废品的概率; (3) 一个是正品而另一个是废品的概率.

四、思考题

设 A, B 是随机事件，则 $P(AB)$ 与 $P(A|B)$ 有什么不同?