管理數學及作業研究

（附問題研討）

管理科學叢書編輯委員會

莊　晉　葉金田　主編

賴尚憲　周杰之　鄒靖寧
樊國綱　何丁舜　張仲浩　編著

科教圖書出版社印行

總經銷　科技圖書股份有限公司

管理數學及作業研究

（附問題研討）

管理科學叢書編輯委員會

莊　晉　葉金田　主編

賴尚憲　周杰之　鄒靖寧
樊國綱　何丁舜　張仲浩　編著

科教圖書出版社印行

編輯大意

1. 本書是以編著者在企業界從事企業管理的實際經驗與在各大專院校的教學心得，並酌量採用各國最新的參考資料，按理論與實務並重的方式編寫，期能適用於大專院校有關課程，並希望對於企業界在科學管理上有所貢獻。
2. 本書的目標在使讀者瞭解一切與管理有關的科學方法如何配合應用在各種管理活動上，並熟悉實際的計量管理技巧，期能使讀者在從業時發揮所長。
3. 本書對於有關實物除舉例加以說明之外，每章節之後均附有付問題及其詳細研討，以期收到學以致用的效果。
4. 本書雖審慎編寫，難免有疏漏之處，尚祈諸學者前輩不吝指正，期能使再版時達到盡善盡美之境界，則由衷感激。

編著者謹識

管理數學及作業研究

（附問題研討）

目錄

第壹篇 微積分在管理上之應用

第一章 微積分在管理上的應用

第貳篇 線性代數在管理上之應用

第二章 矩陣及其運算

第三章 行列式與矩陣

第叁篇　作業研究

第四章　線性規劃

（LINEAR PROGRAMMING）

第五章　運輸問題與指派問題

第六章　馬可夫鏈鎖

（MARKOV CHAIN）

第七章　整數規劃

第八章　要徑法（CPM）與計劃評核（PERT）術

第九章　競賽理論

（GAME THEORY）

第十章　等候問候

(QUEUEING THEORY)

第十一章　動態規劃

(DYNAMIC PROGRAMMING)

第十二章　存量模式

(INVENTORY MODEL)

附 錄

第四篇　問題研討

第一章　微積分在管理上的應用

1－1 導函數在管理上的應用

微積分除了在工程、物理、化學上的應用之外，對於管理上、經濟學上的許多問題而言，微積分早已成為解題的重要工具了，在本節中將會看到，若以函數 f 來描述某一經濟的實體，則形容詞〝邊際的〞就是指導數 f'，以下介紹各種應用。

(一)成本分析

若生產某商品 x 單位的成本以 $C(x)$ 表示，則 C 稱為成本函數，一個單位的平均成本 $c(x)$ 定義為 $C(x)/x$，為了能夠應用微積分的方法，我們將 x 視為實數，即使此變數只能取整數值。我們通常假設 $x \geq 0$，因為負產量沒有實際的意義。成本函數的導數 C' 稱為邊際成本函數，若將導數解釋為變化率，則 $C'(x)$ 為成本隨生產量改變的變化率。$C'(x)$ 稱為產量為 x 單位的邊際成本。$C'(x) > 0$ 是很顯然的，因為在生產更多單位時，成本應該會增加。

若 C 為成本函數，且 n 為正整數，則由導數定義

得　$$C'(n) = \lim_{h \to 0} \frac{C(n+h) - C(n)}{h}$$

所以，若 h 很小，則

$$C'(n) \doteq \frac{C(n+h)-C(n)}{h}$$

若生產單位數 n 很大，經濟學家令上式中的 $h=1$，來近似邊際成本，而得出

$$C'(n) \doteq C(n+1)-C(n)$$

產量爲 n 單位的邊際成本是（大約是）再多生產一個單位的成本。

某些公司發現，生產某一商品 x 單位的成本 $C(x)$ 爲

$$C(x)=a+bx+dx^2+kx^3$$

常數 a 表示一些項目固定的經常費用，如租金、冷氣、照明等，這些皆與生產量無關，若生產一單位的成本爲 b 元，不考慮其他因素，則上式的第二項 bx 表示生產 x 單位的成本，若 x 很大，則 dx^2 與 kx^3 二項會嚴重的影響生產成本。

【例 1】 某公司估計生產某商品 x 單位的成本（以元計）爲

$$C(x)=200+0.05x+0.0001x^2$$

試求生產(1) 500 單位；(2) 1000 單位；(3) 5000 單位的成本，平均成本，和邊際成本

【解】 生產 x 單位的平均成本爲

$$c(x)=\frac{C(x)}{x}=\frac{200}{x}+0.05+0.0001x$$

邊際成本爲

$$C'(x)=0.05+0.0002x$$

x	$C(x)$	$c(x)=\frac{C(x)}{x}$	$C'(x)$
500	250.00	0.50	0.15
1,000	350.00	0.35	0.25
5,000	2950.00	0.59	1.05

平均成本 $c(x)$ 的導數 $c'(x)$ 稱爲邊際平均成本，對 $c(x)=C(x)/x$ 應用除法律，得

$$c'(x)=\frac{xC'(x)-C(x)}{x^2}$$

所以，在

$$xC'(x)-C(x)=0$$

亦即，在

$$C'(x)=\frac{C(x)}{x}=c(x)$$

平均成本會有極值。因此，最小平均成本僅在邊際成本與平均成本相等時，才能發生。

【例2】 在例1中，試求(1)使平均成本極小的單位數，以及(2)最小平均成本。

【解】 (1)由以上的討論，我們必須使 $C'(x)=c(x)$，亦即

$$0.05+0.0002x=\frac{200}{x}+0.05+0.0001x$$

化簡爲

$$0.0001x=\frac{200}{x}$$

或

$$x^2=\frac{200}{0.0001}=2{,}000{,}000$$

所以

$$x=\sqrt{2{,}000{,}000}\doteq 1414$$

我們可用一階或二階導數判別法來驗證在這個單位數的平均成本爲最小。

(2)利用(1)部分的結果，最小平均成本為

$$c(1414)=\frac{200}{1414}+0.05+0.0001(1414)\doteq 0.33$$

【例3】 某公司決定，生產一商品 x 單位的成本 $C(x)$ 可用

$$C(x)=100+\frac{10}{x}+\frac{x^2}{200}$$

來估計，試問應生產若干單位，才能使成本為最小？

【解】 因為邊際成本為

$$C'(x)=-\frac{10}{x^2}+\frac{x}{100}$$

當

$$-\frac{10}{x^2}+\frac{x}{100}=0$$

或

$$\frac{-1000+x^3}{100x^2}=0$$

時，成本函數會有極值，解出 $x=10$ 。C 在 $x=10$ 處有絕對極小值，請讀者自行證明

【例4】 每週產銷特別產品 $100x$ 單位的總成本為

$C(x)=1000+33x-9x^2+x^3$ ，求

(1)當邊際成本最小時的生產水準

(2)最小的邊際成本

【解】 $C(x)=1000+33x-9x^2+x^3$

$C'(x)=33-18x+3x^2$

$C''(x)=-18+6x=0 \qquad \therefore \quad x=3$

$C'''(x)=6>0$

(1) $\therefore$ $C'(3)$ 爲最小値，此時之生產水準爲 $100x=300$ 單位

(2)最小的邊際成本爲 $C'(3)=6$ 單位

(二)需求分析

爲了決定售價，公司必須考慮許多因素，除了生產成本與希望的利潤以外，賣者還應該知道，假如價格上升，消費者需求的變動情形對某些商品而言，需求爲常數，價格的改變對銷售幾乎沒有影響。對一些非生活必需品而言，價格的上升可能會使銷售量減少。假設一公司由過去的經驗得知，在單位價格爲 $p(x)$ 時，可以銷售 x 單位，此處 p 爲某型函數。有時候我們說，在需求爲 x 時，單位價格爲 $p(x)$，並稱 p 爲該商品的需求函數。總收入或總收益爲銷售量乘以單位價格，即 $x\cdot p(x)$，因此，由

$$R(x)=xp(x)$$

定義的函數 R 稱爲總收益函數。導數 p' 與 R' 分別稱爲邊際需求函數與邊際收益函數，它們常被用來求需求函數和總收益函數對銷售量的變化率。

若令 $S=p(x)$，則 S 爲在需求爲 x 單位的單位售價。因爲價格 S 的減少通常會造成需求 x 的增加，故需求函數 p 通常爲遞減，亦即，對所有的 x，$p'(x)<0$。需求函數有時是由一含有 S 與 x 的方程式隱含定義，如下例所示。

【例 5】　某商品 x 單位的需求與單位售價 S 元的關係爲方程式 $2x+S^2-12000=0$，試求需求函數，邊際需求函數，總收益函數，與邊際收益函數。並求出達到最大收益的單位

數，以及單位價格，又最大收益爲何？

【解】 因爲 $S^2 = 12000 - 2x$ 且 S 爲正，故得知需求函數爲

$$S = p(x) = \sqrt{12000 - 2x}$$

p 的定義域爲使 $12000 - 2x > 0$ 的所有 x，或者說，$2x < 12000$，所以 $0 \leq x < 6000$。p 的圖形繪於圖 1-1-1。理論上，在價格爲 $\sqrt{12000}$，或者說價格接近 109.54 元時，需求爲零；在價格接近 0 元時，需求接近 6000。邊際需求函數 p' 爲

$$p'(x) = \frac{-1}{\sqrt{12000 - 2x}}$$

負號指出價格減少時，需求會增加

總收益函數 R 爲

$$R(x) = xp(x) = x\sqrt{12000 - 2x}$$

微分並化簡之，得出邊際收益函數 R' 爲

$$R'(x) = \frac{12000 - 3x}{\sqrt{12000 - 2x}}$$

因此，$x = 12000/3 = 4000$ 爲總收益函數 R 的臨界值。又因爲，若 $0 \leq x < 4000$，則 $R'(x)$ 爲正；若 $4000 < x < 6000$，則 $R'(x)$ 爲負，故在生產 4000 單位時，有最大總收益。所對應的價格爲

$$p(4000) = \sqrt{12000 - 2(4000)} \doteq 63.25 \text{ 元}$$

在此價格，銷售 4000 單位的最大收益爲

$$4000(63.25) = 253{,}000 \text{ 元}$$

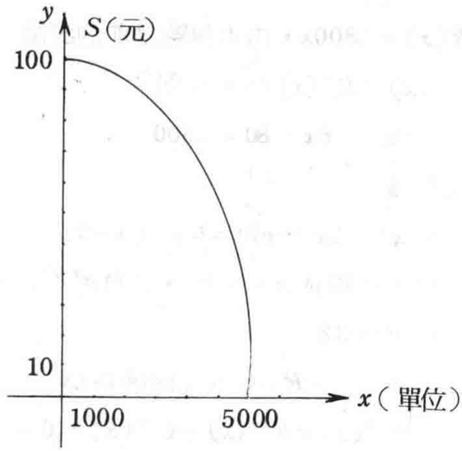

圖 1-1-1　需求函數的圖形

(三)利潤分析

若 x 單位的商品，以單位價格 $p(x)$ 售出，則利潤 $P(x)$ 爲

$$P(x)=R(x)-C(x)$$

其中 R 與 C 分別爲總收益函數與總成本函數，P 稱爲利潤函數，P' 稱爲邊際利潤函數，P 的臨界值爲下列方程式的解

$$P'(x)=R'(x)-C'(x)=0$$

這說明了，在 $R'(x)=C'(x)$，或者是 $R'(x)=c(x)$ 時，可能會有最大（或最小）利潤。因此，若 P 有極值，則邊際收益，邊際成本以及平均成本三者相等。

【例 6】　某公司估計，每週製造某商品 x 單位的成本（元）爲

$$C(x)=x^3-3x^2-80x+500$$

每一單位的售價爲 2800 元，每週生產若干，可使利潤最大？又每週的最大可能利潤爲何？

【解】　因爲銷售 x 單位的收益爲 $2800x$，故總收益函數 R 爲

$R(x)=2800x$，由本例題之前的討論，最大利潤發生在

$C'(x)=R'(x)$ 時，亦即

$$3x^2-6x-80=2800$$

化簡爲

$$x^2-2x-960=0 \text{ 或 } (x-32)(x+30)=0$$

所以 $x=32$ 或 $x=-30$，因負解不在考慮範圍內，故只需

檢查 $x=32$

利潤函數 $P=R-C$ 的二階導數爲

$$P''(x)=R''(x)-C''(x)=0-(6x-6)$$

所以

$$P''(32)=-6(32)+6<0$$

這表示在每週生產 32 單位時，可得到最大利潤，最大利

潤爲

$$\begin{aligned} P(32)&=R(32)-C(32)\\ &=2800(32)-[(32)^3-3(32)^2-80(32)+500]\\ &=61,964 \text{ 元} \end{aligned}$$

【例 7】 某公司出售某商品，當價格爲 50 / 每單位時，每週需求量爲 1,000 單位，當價格升爲 70 時，需求量降爲 800，設需求函數爲線型函數，試求此函數與總收益函數。

【解】

$$p-70=\frac{-20}{200}(x-800)$$

$$p-70=\frac{-x}{10}+80$$

$$p=\frac{-x}{10}+150$$