三　证
哥德巴赫猜想

秦 正 党

前　言

在 1996 年出版的“试证哥德巴赫猜想”一书里，奠定了用余数规律来研究素数的基础；找到了解决“1 + 1”的新路子。现在看来：基础还是正确的；但路子却很艰险，诸多险山恶水挡住去路，因而此路不通。

在 1998 年出版的“再证哥德巴赫猜想”一书里，找到了中心自然数与其对称数列之间的规律；从而找到了解决“1 + 1”的捷径。可惜，由于描述合数的公式还不明确，还很晦涩；人们难以相信我真的把“1 + 1”解决了；真是功亏一篑！

在本书里，得出了既清楚又准确的描述合数的公式，补上了所欠的一篑，这才攻破了“1 + 1”这个堡垒。

有了以上三项突破，许多难题都变得比较容易了，甚至可以说是迎刃而解。因而在本书里不但最终解决了“1 + 1”；还发现素数、对称素数与孪生素数之间是相通的，进而给出了他们各自的函数式；并证明：对称素数函数式的最小值为一双（就是“1 + 1”），三个函数式的最大值都是无限的。这样本书在范围及深度这两个方面都超过了“1 + 1”。

迄今，我未读过任何数论书籍和论文，也未得到任何老师的指导。所以本书没有列出任何参考书和文献，也未列出导师姓名；书的内容是我独自一人在长时期里想出来的。这样书中的文章、语言、定义、甚至名词和符号等都与传统有所不同，这会给读者造成一些困难。

但，如能按本书内容本身去分析和判断，而不硬套某些传统的东西，则还是比较容易审阅的。诚盼各位先生给予审阅指教和帮助。

秦正党
1999年2月15日

地址：北京北洼路北京无线电厂宿舍楼 2—4—203
邮编：100081

目　录

第1章　余数

本章是后面各章的理论基础

1.1. 单余零筛法

设：等差数列 $M = 1, 2, 3\cdots, n, n+1, \cdots$

从2开始，取K个连续素数作为除数，M中各自然数作为被除数，所得各余数[α]排列如下：

M	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ⋯, $\gamma_K - 1$, γ_K,	n, ⋯
$\gamma_1 = 2$	[1], [0], ⋯	$[\alpha_1]$, ⋯
$\gamma_2 = 3$	[1], [2], [0], ⋯	$[\alpha_2]$, ⋯
$\gamma_3 = 5$	[1], [2], [3], [4], [0], ⋯	$[\alpha_3]$, ⋯
$\gamma_4 = 7$	[1], [2], [3], [4], [5], [6], [0], ⋯	$[\alpha_4]$, ⋯
⋯		⋯
γ_K	[1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], ⋯, $[\gamma_K - 1]$, [0], ⋯	$[\alpha_K]$, ⋯

可知，因子2的余数规律为[1]，[0]这2个余数的有序循环排列。

因子3的余数规律为[1]，[2]，[0]这3个余数的有序循环排列。

⋯

因子 γ_K 的余数规律为[1]，[2]，⋯，$[\gamma_K - 1]$，[0]这 γ_K 个余数的有序循环排列。

可知：在M中，对从1开始的每 γ_K 个连续自然数，因子 γ_K 只有一个[0]，只能筛掉一个自然数；这就是 γ_K 的单余零筛法。

又知：在M中，从任一个自然数开始的每 γ_K 个连续自然数，因子 γ_K 的单余零筛法也是适用的。

定理 1.1a. 设首项为 a_i，公差为 $d(>1)$ 的自然数等差数列 M，因子为 γ_K；若 d 与 γ_K 互素，则 γ_K 对 M 的单筛是适用的。

证明：设在 M 中，从任一项 a_i 开始的 γ_K 个连续项为：$M_{(d)} = a_i, a_i + d, a_i + 2d, \cdots, a_i + (\gamma_K - 1)d$。

再设 $M_{(d)}$ 中的任意两项为 a_p, a_Q，且 $a_p < a_Q$。

令：$a_p = a_i + F\cdot d$，　　$a_Q = a_i + G\cdot d$

则：$a_Q - a_p = (G - F)\cdot d$

在 $(G-F)\cdot d$ 中：d 与 γ_K 互素；又因 F，G 是 a_p, a_Q 的项次数，且 $F<G$，所以 $(G-F)$ 一定是小于 γ_K 的某个自然数，必与 γ_K 互素。

则 $(G-F)\cdot d$ 一定不能被 γ_K 整除，也就是 $(a_Q - a_p)$ 一定不能被 γ_K 整除；所以 a_p, a_Q 被 γ_K 除所得余数必不相等。

既然任意两项 ap，a_Q 被 γ_K 除所得余数都不相等，则在该 γ_K 个连续项中共有 γ_K 个不同的余数，只能是 [1]，[2]，…，[$\gamma_K - 1$]，[0] 等 γ_K 个余数各出现一次；也就是 $M_{(d)}$ 中有且只有一个余数为 [0]。

所以 γ_K 的单筛对 $M_{(d)}$ 是适用的。

所以 γ_K 的单筛对 M 也是适用的。

定理 1.1b. 设首项为 a_1，公差 $d(>1)$，等差数列为 M，因子为 m。若 d 与 m 不是互素，则因子 m 的单筛对 M 是不适用的。

证明：设在 M 中，从任一项 a_i 开始的 m 个连续项为：$M_{(d)} = a_i, a_i + d, a_i + 2d, \cdots, a_i + (m-1)d$。

设 m 与 d 含有公因子 $F(>1)$，$m = \gamma_M\cdot F$，$d = \gamma_d\cdot F$，且 γ_M 与 γ_d 互素。

设 $M_{(d)}$ 中任意两项为 a_p、a_Q，且 $a_p < a_Q$

令：$a_P = a_i + H\cdot d$　　$a_Q = a_i + K\cdot d$

则：$a_Q - a_p = (K - H)\cdot d$

则：$\frac{a_Q-a_p}{m}=\frac{(K-H)\cdot d}{m}=\frac{(K-H)\cdot\gamma_d\cdot F}{\gamma_M\cdot F}=\frac{(K-H)\cdot\gamma_d}{\gamma_M}$

因：H,K 为区间[1,(m-1)]内的某两个整数，则有：

$1\leqslant(K-H)\leqslant m-1$。

又因：$1<\gamma_M<m-1$。

所以，在(K-H)从1到(m-1)的变化过程中一定能出现：$K-H=\gamma_M$。这时的(K-H)一定能被 γ_M 整除；也就是(a_Q-a_p)能被 m 整除。

则这时的 a_p, a_Q 被 m 除的余数一定相等。这表明在 $M_{(d)}$ 的 m 个连续项中，[1],[2],[3],…,[m-1],[0]等 m 个余数，不可能是每个余数各出现一次；因而余[0]可能不出现，也可能出现1次、2次…。

所以因子 m 的单筛对 $M_{(d)}$ 是不适用的，对 M 也是不适用的。

1.2. 余数组合

定义．$_nC_{K[\alpha]}$。任一自然数 n，被 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_K$ 等 K 个因子除，所得的 K 个余数$[\alpha_1],[\alpha_2],\cdots,[\alpha_K]$的集合就称为 n 的 K 个因子的余数组合；表为$_nC_{K[\alpha]}$。

定理 1.2a. 设 $D_K=\gamma_1\times\gamma_2\times\cdots\times\gamma_K=2\times3\times\cdots\times\gamma_K$，则在区间$[1,D_K]$内的每个自然数的$_nC_{K[\alpha]}$都不相同，共有 D_K 个。

证明：当从1开始，按公差1递增时，$_nC_{K[\alpha]}$的变化规律相当于：共有 K 个位置；在 γ_1 位置有[1],[0]等2个不同元素的有序循环排列；在 γ_2 位置有[1],[2],[0]等3个不同元素的有序循环排列；…；在 γ_K 位置有$[1],[2],\cdots,[\gamma_K-1],[0]$等 γ_K 个不同元素的有序循环排列。

根据排列组合的运算法则可得$_nC_{K[\alpha]}$的总数为：

$D_K=2\times3\times5\times\cdots\times\gamma_K$。

又因各个因子的元素，都是沿着自然数序列从 1 开始有序循环排列的。所以在区间$[1, D_K]$之内，每个自然数 n 与它的${}_nC_{K[\alpha]}$都有确定的对应关系。

定理 1.2b. 设 $D_K = \gamma_1 \times \gamma_2 \times \cdots \times \gamma_K = 2 \times 3 \times \cdots \times \gamma_K$，则${}_nC_{K[\alpha]}$为 n 的周期函数，且周期为 D_K。

证明：根据定义${}_nC_{K[\alpha]} = ([\alpha_1], [\alpha_2]\cdots, [\alpha_K])$

$\because D_K = \gamma_1 \times \gamma_2 \times \cdots \times \gamma_K$，

$\therefore {}_{D_K}C_{K[\alpha]} = ([0], [0], \cdots[0])$，

设：$AD_K = A \times \gamma_1 \times \gamma_2 \times \cdots \times \gamma_K$，$A = 1, 2, 3, \cdots$，

则：${}_{AD_K}C_{K[\alpha]} = ([0], [0], \cdots[0])$，

$\therefore n + AD_K$ 被 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_K$ 除所得的余数组合${}_{n+AD_K}C_{K[\alpha]}$

$= {}_{n+DK}C_{K[\alpha]} = ([0+\alpha_1], [0+\alpha_2], \cdots, [0+\alpha_K])$，

$= ([\alpha_1], [\alpha_2], \cdots, [\alpha_K]) = {}_nC_{K[\alpha]}$。

即：${}_nC_{K[\alpha]}$的周期为 D_K。

1.3. 同余数组合等差数列

定义．在某个自然数等差数列中，若每个自然数 n 的余数组合${}_nC_{K[\alpha]}$都是相同的，就叫 K 个因子的同余数组合等差数列。

定理 1.3. 设 $D_K = \gamma_1 \times \gamma_2 \times \cdots \times \gamma_b \times \gamma_{b+1} \times \cdots \times \gamma_K = D_b \times C$，$D_b = \gamma_1 \times \gamma_2 \times \cdots \times \gamma_b$，$C = \gamma_{b+1} \times \gamma_{b+2} \times \cdots \times \gamma_K$。则区间$[1, D_K]$内的 D_K 个自然数必能组成 D_b 个等差数列；每个等差数列都有各自相同的${}_nC_{b[\alpha]}$，且各有 C 项。

证明：根据定理 1.2a. 知：在区间$[1, D_b]$内的每个自然数都有不同的${}_nC_{b[\alpha]}$。

根据定理 1.2b. 知：每个${}_nC_{b[\alpha]}$的周期都是 D_b。

设：区间$[1,D_b]$内任一个自然数为n_i。可得等差数列：

$n_i, n_i+D_b, n_i+2D_b; \cdots, n_i+AD_b\cdots$,

D_b=公差，n_i=首项，$A=0,1,2,\cdots$,

$\because {}_{AD_b}C_{b[\alpha]}=([0],[0]\cdots,[0])$

则等差数列中任一项n_A的${}_{n_A}C_{b[\alpha]}$都与${}_{n_i}C_{b[\alpha]}$相同。

因在区间$[1,D_b]$之内，共有D_b个自然数，

所以共有D_b个等差数列。

又因$D_K=D_b\times C$。

所以每个等差数列在$[1,D_K]$之内有C项。

1.4. 有益值

定义．有益值$E^K_{(-1)}$。设$D_K=2\times3\times\cdots\times\gamma_K$。在区间$[1,D_K]$内的自然数，经$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_K$等K个小因子单筛后剩余的自然数的总个数就叫有益值$E^K_{(-1)}$。

定理1.4a．$E^K_{(-1)}=(2-1)(3-1)\times\cdots\times(\gamma_K-1)$

证明：因$E^K_{(-1)}$中，每个自然数的${}_nC_{K[\alpha]}$中都不含余零[0]。

则在K个位置中，每一位置都少1个元素[0]。即：

在γ_1位置上有$(2-1)=1$个元素：[1]。

在γ_2位置上有$(3-1)=2$个元素：[1]，[2]。

…

在γ_K位置上有(γ_K-1)个元素，

$\therefore E^K_{(-1)}=(2-1)(3-1)(5-1)\times\cdots\times(\gamma_K-1)$

定义．有益值$E^K_{(-2)}$。设$D_K=2\times3\times\cdots\times\gamma_K$，在区间$[1,D_K]$内的自然数，经$\gamma_1,\gamma_2,\cdots\gamma_K$等K个小因子双筛（但小因子2仍为单筛，其余各小因子假定都筛掉2个）后剩余的自然数的总个数就

叫有益值$E^{K}_{(-2)}$。

定理 1.4b. $E^{K}_{(-2)}=(2-1)(3-2)\times\cdots\times(\gamma_K-2)$。

证明：在 K 个位置中，除 2 外，每一位置都少 2 个元素。即：

在 γ_1 位置上有$(2-1)=1$个元素：[1]。

在 γ_2 位置上有$(3-2)=1$个元素：[1]或[2]。

…

在 γ_K 位置上有(γ_K-2)个元素，

$\therefore E^{K}_{(-2)}=(2-1)(3-2)(5-2)\times\cdots\times(\gamma_K-2)$

第2章　素数

本章将给出描述合数的通式，从而给出素数的函数式。

2.1.　3[×]奇数等差数列

定义：若某个自然数 N 的 2,3,5 等 3 个小因子的余数组合$_nC_{3[\alpha]}$中，不含余零[0]者，就叫 3[×]奇数。

按$_nC_{3[\alpha]}$的异同，一切 3[×]奇数可组成下列八个 3[×]奇数等差数列：

① B_1(2[1]3[1]5[1])数列：　$31^* + (M-1)\times 30$，　M = 1,2,3,…
② B_2(2[1]3[1]5[2])数列：　$7 + (M-1)\times 30$，　M = 1,2,3,…
③ B_3(2[1]3[1]5[3])数列：　$13 + (M-1)\times 30$，　M = 1,2,3,…
④ B_4(2[1]3[1]5[4])数列：　$19 + (M-1)\times 30$，　M = 1,2,3,…
⑤ D_1(2[1]3[2]5[1])数列：　$11 + (M-1)\times 30$，　M = 1,2,3,…
⑥ D_2(2[1]3[2]5[2])数列：　$17 + (M-1)\times 30$，　M = 1,2,3,…
⑦ D_3(2[1]3[2]5[3])数列：　$23 + (M-1)\times 30$，　M = 1,2,3,…
⑧ D_4(2[1]3[2]5[4])数列：　$29 + (M-1)\times 30$，　M = 1,2,3,…

*.B_1 数列的首项本应是 1；但因 1 既不是素数，又不能作为因子去筛掉别的自然数；又因$_1C_{3[\times]} = {}_{31}C_{3[\times]}$ = 2[1]3[1]5[1]。故本书在谈到 3[×]或 3[×,×]奇数时，总是以 31 代替 1。

可以看出：除 2,3,5，等 3 个素数外，其他一切素数均存在于上述八个数列之中。

2.2. 余数循环表

定义：大因子 γ_S，就是≥7 的素数

定义：大因子系列 $F_{\gamma i} = \gamma_i + a_{\gamma i}\times 30$，　γ_i 就是上述八个数列首

项中的某一个，称它为首项大因子；　$a_{\gamma_i}=0,1,2,\cdots$。

定理 2.2. 在任一个 3[×]奇数等差数列中，某个首项大因子 γ_i 的余数循环的顺序是相同的；但起点是不同的。

证明：2.1. 的八个数列的公差 $=2\times3\times5=30$，八个首项大因子（7，11，…，29，31）与公差互素，根据定理 1.1a. 知：在任一个数列的每 γ_i 个连续项中，$\gamma_i[\alpha]$ 必是[1]，[2]，…，[γ_i-1]，[0] 等 γ_i 个余数各出现一次，也仅出现一次。

又因八个数列的公差都是 30，它被 γ_i 除，所得的余数及商都是相同的；所以 γ_i 对八个数列的余数循环的顺序是相同的。

但因八个数列的首项各不相同，所以 γ_i 的余数循环的起点各不相同。

根据定理 2.2. 可得各首项大因子的余数循环表如下：

①大因子系列 $F_7=7+a_7\times30$，　$a_7=0,1,2,\cdots$　$\xrightarrow[\text{[+2]或[-5]}]{+30}$

$+4a_7+1$ *

[1]，[3]，[5]，[0]，[2]，[4]，[6]　[1]

$5a_7+1$ * *

* 余数上面的→，表示余数增大时的△M（定理 2.3b.）

* * 余数下面的→，表示余数减小时的△M

②大因子系列 $F_{11}=11+a_{11}\times30$，　$a_{11}=0,1,2,\cdots$　$\xrightarrow[\text{[+8]或[-3]}]{+30}$

$+2a_{11}+1$

[4]，[1]，[9]，[6]，[3]，[0]，[8]，[5]，[2]，[10]，[7]　[4]

$3a_{11}+1$

③大因子系列 $F_{13}=13+a_{13}\times30$　$a_{13}=0,1,2,\cdots$　$\xrightarrow[\text{[+4]或[-9]}]{+30}$

$+2a_{13}+1$

[2]，[6]，[10]，[1]，[5]，[9]，[0]，[4]，[8]，[12]，[3]，[7]，[11]　[2]

$+3a_{13}+1$

④大因子系列 $F_{17}=17+a_{17}\times 30$　$a_{17}=0,1,2,\cdots$　$\xrightarrow[{[+13]或[-4]}]{+30}$

$+a_{17}+1$

[15],[11],[7],[3],[16],[12],[8],[4],[0],[13],[9],[5],[1],[14],

$+2a_{17}+1$

[10],[6],[2],　[15]

⑤大因子系列 $F_{19}=19+a_{19}\times 30$　$a_{19}=0,1,2,\cdots$　$\xrightarrow[{[+11]或[-8]}]{+30}$

$+a_{19}+1$

[15],[7],[18],[10],[2],[13],[5],[16],[8],[0],[11],[3],[14],[6],

$+2a_{19}+1$

[17],[9],[1],[12],[4],　[15]

⑥大因子系列 $F_{23}=23+a_{23}\times 30$　$a_{23}=0,1,2,\cdots$　$\xrightarrow[{[+7]或[-16]}]{+30}$

$+a_{23}=1$

[15],[22],[6],[13],[20],[4],[11],[18],[2],[9],[16],[0],[7],[14],

$+2a_{23}+1$

[21],[5],[12],[19],[3],[10],[17],[1],[8],　[15]

⑦大因子系列 $F_{29}=29+a_{29}\times 30$　$a_{29}=0,1,2,\cdots$　$\xrightarrow[{[+1]或[-28]}]{+30}$

$a_{29}+1$

[15],[16],[17],[18],[19],[20],[21],[22],[23],[24],[25],[26],[27],

[28],[0],[1],[2],[3],[4],[5],[6],[7],[8],[9],[10],[11],[12],[13],

$+2a_{29}+1$

[14],　[15]

⑧大因子系列 $F_{31}=31+a_{31}\times 30$　$a_{31}=0,1,2,\cdots$　$\xrightarrow[{[+30]或[-1]}]{+30}$

[15],[14],[13],[12],[11],[10],[9],[8],[7],[6],[5],[4],[3],[2],

$+a_{31}+1$

$\overset{+1}{\rightarrow}$

[1], [0], [30], [29], [28], [27], [26], [25], [24], [23], [22], [21], [20],

[19], [18], [17], [16], [15]

2.3. 各大因子系列的余数循环规律

定义：大因子系列 $F_{\gamma_i} = \gamma_i + a_{\gamma i} \times 30$, $a_{ri} = 0, 1, 2, \cdots$; 3[×]奇数等差数列 $S_{[\times]} = n_{[\times]} + (M-1) \times 30$, $M = 1, 2, 3, \cdots$ 序号或周期号；γ_i, $n_{[\times]}$ 各为 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 等八个素数中的某一个。（当 γ_i, $n_{[\times]}$ 在脚码时，表为 γi, $n[\times]$）。

定义：若 $S_{[\times]}$ 中某一项 A 被 γ_i 除得余数为 $[\alpha_i]$，商为 (β_i)，则表为 $A = \gamma_i[\alpha_i]$、(βi)。

若 $S_{[\times]}$ 中某一项 C，被 $F_{\gamma i}$ 除得余数也为 $[\alpha_i]$，商也为 (β_i)，则表为 $C = F_{\gamma i}[\alpha_i]$、$(\beta_i)$；并称 C 为 A 的 $F_{\gamma i}$ 对应项。

若 A、B 为 $S_{[\times]}$ 中两相邻项，且 C、D 分别为 A、B 的对应项，则 C、D 称为两相邻对应项。

定理 2.3a. 在数列 $S_{[\times]} = n_{[\times]} + (M-1) \times 30$ 中，设 $n_{[\times]} = \gamma_i [\alpha_i]$、$(\beta_i)$，$n_{[\times]}$ 的对应项 $N_1 = F_{\gamma i}[\alpha_i]$、$(\beta_i)$；则 N_1 的序号：$M_{N1} = 1 + (\beta_i) \times a_{\gamma i}$。

证明：$F_{\gamma_i} = \gamma_i + a_{\gamma i} \times 30$, $a_{\gamma i} = 0, 1, 2, \cdots$

根据被除数、除数、商及余数之间的关系，可得：

$[n_{[\times]} + (M_{N1} - 1) \times 30] - F_{\gamma i} \times (\beta_i) = [\alpha]$

被除数 N_1　　　　　　除数　商　余数

若 M_{N1} = 给定值$(1 + (\beta_i) \times a_{\gamma i})$，将其代入上式得：

$[n_{[\times]} + (\beta_i) a_{\gamma i} \times 30] - (\gamma_i + a_{\gamma i} \times 30) \times (\beta_i) = n_{[\times]} - \gamma_i(\beta_i) = [\alpha_i]$

可知：当 $M_{N1} = 1 + (\beta_i) a_{\gamma i}$ 时，大因子系列 $F_{\gamma i}$ 对 N_1 的余数及商刚好等于 γ_i 对 $n_{[\times]}$ 的余数及商；按定义知：N_1 就是 $n_{[\times]}$ 的对应项。

定理 2.3b. 在数列 $S_{[\times]}=n_{[\times]}+(M-1)\times 30$ 中，A、B 为两相邻项，C、D 为 $F_{\gamma i}$对于 A、B 的对应项，C、D 之间的序号增量为 $\triangle M$；设：公差 $30=\gamma_i[\triangle\alpha_d]$、$(\triangle\beta_d)$，则 $\triangle M=(\triangle\beta_d)\times a_{\gamma i}+1$；或 $30=\gamma_i[-(\gamma_i-\triangle\alpha_d)]$、$(\triangle\beta_d+1)$，则 $\triangle M=(\triangle\beta_d+1)\times a_{\gamma i}+1$。

证明：$F_{\gamma i}=\gamma_i++a_{\gamma i}\times 30$，$S_{[\times]}=n_{[\times]}+(M-1)\times 30$，

根据两相邻对应项的定义，根据被除数、除数、商及余数之间的关系；并设 $\triangle M$=给定值，则有：

C、D 之间，$F_{\gamma i}$的余数增大值 $=\triangle M\times 30-F_{\gamma i}(\triangle\beta_d)$ $=[(\triangle\beta_d)a_{\gamma i}+1]\times 30-(\gamma_i+\alpha_{\gamma i}\times 30)\times(\triangle\beta_d)=30-\gamma_i\times(\triangle\beta_d)$ $=[\triangle\alpha_d]=$ 数列 $S_{[\times]}$中，两相邻项 A、B 之间的 γ_i 的余数增大值。

C、D 之间，$F_{\gamma i}$的余数减小值 $=\triangle M\times 30-F_{\gamma i}\times(\triangle\beta_d+1)$ $=[(\triangle\beta_d+1)a_{\gamma i}+1]\times 30-(\gamma_i+a_{\gamma i}\times 30)(\triangle\beta_d+1)=30-\gamma_i(\triangle\beta_d+1)=-\gamma_i+[30-\gamma_i\times(\triangle\beta_d)]=-\gamma_i+\triangle\alpha_d=-[\gamma_i-\triangle\alpha_d]=$ $S_{[\times]}$中两相邻项 A、B 之间的 γ_i 的余数减小值。

可知：当 $\triangle M$=给定值时，C、D 之间 $F_{\gamma i}$的余数，商的差值刚好分别等于两相邻项 A、B 之间 γ_i 的余数、商的差值。

当 C 是 A 的对应项时，则 D 必是 B 的对应项。

定理 2.3c. 在 $S_{[\times]}$数列中，设 A、B 为两相邻项，C、D 为大因子系列 $F_{\gamma i}$对于 A、B 的对应项，则在区间(C、D)内，$F_{\gamma i}$的余数都大于$[\gamma_i]$。

证明：设 $S_{[\times]}=n_{[\times]}+(M-1)\times 30$，$M=1,2,3,\cdots$；$F_{\gamma i}=\gamma_i+a_{\gamma i}\times 30$，$a_{\gamma i}=0,1,2,\cdots$，

设公差 $30=\gamma_i\times(\triangle\beta_d)+[\triangle\alpha_d]$，或 $30=\gamma_i\times(\triangle\beta_d+1)-[\gamma_i-\triangle\alpha_d]$。

设 C、D 两项的序号分别为 M_C，M_D，

从 C 开始，序号 M 递增 1，$F_{\gamma i}$的余数$[\alpha]$及商(β)的变化为：

M：　　M_C，　　M_C+1，　　$\cdots$，

$F_{\gamma_i}[\alpha]$、(β),　　$[\alpha_a]$、(β_a),　　$[\alpha_a + 30]$、(β_a)　　…

$M_C + (1)a_{\gamma_i} + 1$, …

$[\alpha_a + ((1)a_{\gamma_i} + 1) \times 30 - (1)(\gamma_i + a_{\gamma_i} \times 30)]$、$(\beta_a + 1)$

$= [\alpha_a + 30 - (1)\gamma_i]$、$(\beta_a + 1)$, …

$M_C + (2)a_{\gamma_i} + 1$,　　…

$[\alpha_a + ((2)a_{\gamma_i} + 1) \times 30 - (2)(\gamma_i + a_{\gamma_i} \times 30)]$、$(\beta_a + 2)$

$= [\alpha_a + 30 - (2)\gamma_i]$、$(\beta_a + 2)$,　　…

$M_D = M_C + (\triangle\beta_a)a_{\gamma_i} + 1$

$[\alpha_a + ((\triangle\beta_d)a_{\gamma_i} + 1) \times 30 - (\triangle\beta_d)(\gamma_i + a_{\gamma_i} \times 30)]$、$(\beta_a + \triangle\beta_d)$

$= [\alpha_a + 30 - (\triangle\beta_d) \times \gamma_i]$、$(\beta_a + \triangle\beta_d)$

$= [\alpha_b^*]$、(β_b^*)

$* \because 30 - \triangle\beta_d \times \gamma_i = [\triangle\alpha_d]$

$\therefore [\alpha_b] = [\alpha_a + \triangle\alpha_d]$，余数增大，

$\therefore (\beta_b) = (\beta_a + \triangle\beta_d)$

或 $M_D = M_C + (\triangle\beta_d + 1)a_{\gamma_i} + 1$

$[\alpha_a + ((\triangle\beta_d + 1)a_{\gamma_i} + 1) \times 30 - (\triangle\beta_d + 1)(\gamma_i + a_{\gamma_i} \times 30)]$、$(\beta_a + \triangle\beta_d + 1)$

$= [\alpha_a + 30 - (\triangle\beta_d + 1)\gamma_i]$、$(\beta_a + \triangle\beta_d + 1)$

$= [\alpha_a - (\gamma_i - \triangle\alpha_d)]$、$(\beta_a + \triangle\beta_d + 1)$

$= [\alpha_b^{**}]$、(β_b^{**})

$** \because 30 - (\triangle\beta_d + 1)\gamma_i = -(\gamma_i - \triangle\alpha_d)$

$\therefore [\alpha_b] = [\alpha_a - (\gamma_i - \triangle\alpha_d)]$，余数减小

$\therefore (\beta_b) = (\beta_a) + \triangle\beta_d + 1$

根据定义知：在 C、D 两项的 F_{γ_i}的余数及商分别等于 γ_i 在 A、B 两项的余数及商，所以$[\alpha_b^*][\alpha_b^{**}]$都小于 γ_i.

在 C、D 两项之间，仅当商值每加大 1 时，对应的余数才减小 1 个 γ_i，…直到 D 点，减小$\triangle\beta_d$ 个 γ_i 或减小$(\triangle\beta_d+1)$个 γ_i，余数才小于 γ_i；所以其余各项的余数至少大于$[\alpha_b^*]$、$[\alpha_b^{**}]$1 个 γ_i。

定理 2.3d. 在 $S_{[\times]}$数列中，大因子系列 F_{γ_i}的小于 γ_i 的余数是按 2.2. 的 γ_i 的余数表循环的。

证明：根据定理 2.3a.，2.3b. 知：F_{γ_i}小于 γ_i 的余数项，是与 γ_i 的余数表逐项对应的。

又根据定理 2.3c. 知：在 F_{γ_i}的两相邻对应项之间的余数都是大于 γ_i 的。

所以大因子系列 F_{γ_i}的小于 γ_i 的余数是按 γ_i 的余数表循环的。

2.4. 余零[0]序号通式

定义：$S_{[\times],[0],F\gamma_i}$ = 数列 $S_{[\times]}$中，被大因子系列 F_{γ_i}整除的一切合数的序号通式。

定义：凡能被大因子 γ_s 整除的自然数，其余数为[0]，称为 γ_s[0]自然数。

定义：某自然数 A，被 γ_s 除，得余数$[\alpha_s]$，得商(β_s)，就表为 $A=\gamma_s[\alpha_s]$、(β_s)

2.4.A. 求余零[0]序号通式的方法：

设 $S_{[\times]}=n_{[\times]}+(M-1)\times 30$，$n_{[\times]}=11,13,\cdots,29,31$ 等八个素数中的某一个，$M=1,2,3,\cdots$序号。

设 $F_{\gamma_i}=\gamma_i+a_{\gamma_i}\times 30$，$\gamma_i=11,13,\cdots 29,31$ 等八个素数中的某一个，$a_{\gamma_i}=0,1,2,\cdots$。