

泛函分析讲义

第二卷

F. 黎茨 B. 塞克佛尔维-纳吉

科学出版社

泛函分析讲义

第二卷

F. 黎 茨 著
B. 塞克佛尔维-纳吉
庄 万 等 译

科 学 出 版 社

1980

内 容 简 介

全书共分两部分，此卷是其中的第二部分。这一部分主要介绍积分方程、线性泛函与线性算子。第一部分介绍了微分与积分的现代理论。两部分结成一个有机的整体，而以线性运算的概念为其中心环节。全书共十一章，在十一章后由 B. Sz.-Nagy 编写了附录，讨论了 Hilbert 类问题以及与第十章和第十一章密切相关的一些问题。

F. RIESZ, B. SZ.-NAGY

LEÇONS D'ANALYSE FONCTIONNELLE

AKADÉMIAI KIADÓ

BUDAPEST 1965 4^{ème} édition

泛 函 分 析 讲 义

第 二 卷

F. 黎茨 B. 塞克佛尔维-纳吉 著

庄 万 等 译

*

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1980 年 5 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1980 年 5 月第一次印刷 印张：12 7/8

印数：0001—10,120 字数：335,000

统一书号：13031·1125

本社书号：1579·13—1

定价： 1.90 元

出版说明

《泛函分析讲义》第二卷是在北京大学高等数学教研室集体翻译的译稿和山东师范学院庄万同志的译稿的基础上,由庄万同志进行统一定稿的.其中第四—第八章以庄万的译稿为主,第九—第十一章及附录以北大的译稿为主.北大参加翻译的同志有万伟勋(第五章),邵士敏(第六章),陈永和(第七、十一章),张锦炎(第八、九章),张恭庆(第十章及附录).山东师范学院陈玉波同志参加了翻译和定稿工作.

目 录

第二部分：积分方程，线性变换

第四章 积分方程

§ 1. 逐次逼近法	3
64. 积分方程的概念	3
65. 有界核	5
66. 平方可和核, L^2 空间的线性算子	8
67. 逆算子, 正则值与奇异值	12
68. 叠核, 预解核	16
69. 用有穷秩核平均逼近任意核	19
§ 2. Fredholm 抉择定理	23
70. 带有有穷秩核的积分方程	23
71. 带有一般核的积分方程	27
72. 相应于奇异值的分解	30
73. 对于一般核的 Fredholm 抉择定理	33
§ 3. Fredholm 行列式	34
74. Fredholm 方法	34
75. Hadamard 不等式	40
§ 4. 以完全连续性为基础的方法	41
76. 完全连续性	41
77. 子空间 $\mathfrak{M}_n$ 及 $\mathfrak{N}_n$	43
78. $\nu=0$ 的情形与 $\nu \geq 1$ 的情形, 分解定理	47
79. 奇异值的分布	51
80. 对应于一个奇异值的典范分解	52
§ 5. 对于位势理论的应用	55
81. Dirichlet 问题与 Neumann 问题, Fredholm 方法的解	55

第五章 Hilbert 空间与 Banach 空间

§ 1. Hilbert 空间	60
82. 坐标 Hilbert 空间	60
83. 抽象 Hilbert 空间	62
84. Hilbert 空间的线性算子, 基本概念	65
85. 完全连续线性算子	68
86. 双直交序列, Paley 与 Wiener 定理	73
§ 2. Banach 空间	77
87. Banach 空间与它们的共轭空间	77
88. 线性算子与它们的共轭算子	82
89. 泛函方程	84
90. 连续函数空间的算子	87
91. 再论位势理论	92

第六章 Hilbert 空间的完全连续对称算子

§ 1. 特征元素的存在性, 级数展开定理	95
92. 特征值与特征元素, 对称算子的基本性质	95
93. 完全连续对称算子	99
94. 泛函方程 $f - \lambda \Delta f = g$ 的解	103
95. 带给定符号的第 n 个特征值的直接确定法	105
96. 求特征值与特征元素的其他方法	109
§ 2. 带有对称核的算子	110
97. Hilbert 与 Schmidt 定理	110
98. Mercer 定理	114
§ 3. 对弦振动问题及对殆周期函数的应用	116
99. 弦振动问题, 空间 D 与 H	116
100. 弦振动问题, 特征振动	120
101. 殆周期函数空间	123
102. 殆周期函数的基本定理的证明	126
103. 有穷维空间的等距算子	129

第七章 Hilbert 空间有界的对称算子、 单一算子、正常算子

§ 1. 对称算子	131
104. 某些基本性质	131
105. 投影	137
106. 有界对称算子的函数	140
107. 有界对称算子的谱分解	143
108. 对称算子的正部与负部, 谱分解的另一证明	148
§ 2. 单一算子与正常算子	152
109. 单一算子	152
110. 正常算子, 因子分解	157
111. 正常算子的谱分解, 多个算子的函数	159
§ 3. 空间 L^2 的单一算子	165
112. Bochner 定理	165
113. Fourier-Plancherel 变换与 Watson 变换	167

第八章 Hilbert 空间的无界线性算子

§ 1. 线性算子概念的推广	170
114. Hellinger 与 Toeplitz 定理, 线性算子概念的推广	170
115. 共轭算子	173
116. 可交换性, 可约性	175
117. 算子的图象	178
118. 算子 $B=(I+T^*T)^{-1}$ 与 $C=T(I+T^*T)^{-1}$	181
§ 2. 自共轭算子, 谱分解	183
119. 对称算子与自共轭算子, 定义与例子	183
120. 自共轭算子的谱分解	188
121. von Neumann 的方法, Cayley 变换	196
122. 半有界的自共轭算子	199
§ 3. 对称算子的开拓	200
123. Cayley 变换, 亏指数	200

124. 半有界对称算子, Friedrichs 方法	205
125. Крейн 方法	212

第九章 自共轭算子: 函数的演算, 谱, 摄动

§ 1. 函数演算	219
126. 有界函数	219
127. 无界函数, 定义	222
128. 无界函数, 演算法则	225
129. 自共轭算子的函数的特征性质	230
130. 可交换的自共轭算子的有穷或可数集合	234
131. 任意多个可交换的自共轭算子的集合	238
§ 2. 自共轭算子的谱和它的摄动	240
132. 自共轭算子的谱, 按点谱与连续谱的分解	240
133. 极限谱	243
134. 加一个完全连续算子所引起的谱的摄动	247
135. 连续摄动	248
136. 解析摄动	253

第十章 算子群与算子半群

§ 1. 单一算子	261
137. Stone 定理	261
138. 基于 Bochner 定理的另一个证明	266
139. Stone 定理的若干应用	270
140. 更广泛的群的单一表示	272
§ 2. 非单一算子	275
141. 自共轭算子的群与半群	275
142. 一般形式算子的半群的无穷小算子	279
143. 指数公式	282
§ 3. 遍历定理	288
144. 基本方法	288
145. 基于凸集合性质的方法	293
146. 非可交换的压缩半群	295

第十一章 一般线性算子的谱理论

§ 1. 函数论方法的运用	298
147. 谱. 曲线积分	298
148. 分解定理	301
149. 谱与算子方幂的范数之间的关系	306
150. 在绝对收敛的三角级数上的应用	310
151. 函数演算初步	314
152. 两个例子	318
§ 2. J. von Neumann 关于谱集合的理论	320
153. 主要定理	320
154. 谱集合	324
155. 对称算子、单一算子与正常算子在谱集合方面的特征	328
附录 Hilbert 空间的算子扩张到该空间以外的开拓	331
§ 1. 引言	331
§ 2. 广义谱族. Наймарк 定理	333
§ 3. 矩序列	338
§ 4. Hilbert 空间的压缩	341
§ 5. 正常开拓	348
§ 6. 主要定理	350
§ 7. Наймарк 定理的证明	358
§ 8. 关于矩序列的定理的证明	361
§ 9. 关于压缩的三个定理的证明	363
§ 10. 关于正常开拓的定理的证明	368
参考文献	370
索引	389
记号表	401

第 二 部 分

积分方程. 线性变换

第四章 积分方程

§ 1. 逐次逼近法

64. 积分方程的概念. 积分方程的一般理论是本世纪的工作. 然而, 十九世纪的几何学家们已经有时遇到过个别的这种类型的方程. 最早的例子大概是积分

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} f(y) dy$$

的反演的问题, 这对于数学物理的某些分支是一个十分重要的问题, 它已于 1811 年由 Fourier 解出, 其解形如

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} g(x) dx.$$

在 1823 年, Abel 研究“等时曲线”(tautochrone)问题的一个推广时引出方程

$$g(x) = \int_a^x \frac{f(y)}{(x-y)^\alpha} dy \quad (0 < \alpha < 1, g(a) = 0),$$

对于这个方程, 他找到了解

$$f(y) = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_a^y \frac{g'(x)}{(y-x)^{1-\alpha}} dx. {}^{1)}$$

这个 Abel 方程曾经是后来很多研究的对象. 它属于形如

$$\int_a^x H(x, y) f(y) dy = g(x) \quad (1)$$

的现在称之为 Volterra 方程的一类积分方程, 这里 $H(x, y)$ 与 $g(x)$ 是给定的函数, 而 $f(x)$ 是要确定的函数. 当 $H(x, y)$ 有连续微商 $H_x(x, y)$ 时, 方程(1)可以通过取微商而变成方程

1) Abel[1], [2].

$$f(x)H(x, x) + \int_a^x H_x(x, y)f(y)dy = g'(x),$$

或者, 若还有 $H(x, x) \neq 0$, 则可以变成方程

$$f(x) + \int_a^x K(x, y)f(y)dy = g_1(x), \quad (2)$$

这里

$$K(x, y) = \frac{H_x(x, y)}{H(x, x)}, \quad g_1(x) = \frac{g'(x)}{H(x, x)}.$$

通常总是把带有初始条件或边界条件的线性微分方程转化为积分方程. 例如, 1837 年 J. Liouville^[1] 在他的二阶线性微分方程的研究中就已经利用了这样的转化. 作为例子, 考察带有初始条件 $f(a)=1, f'(a)=0$ 的方程

$$f''(x) + [\rho^2 - \sigma(x)]f(x) = 0.$$

因为易见与此相近的方程

$$f''(x) + \rho^2 f(x) = g(x)$$

有满足给定的初始条件的唯一解

$$f(x) = \cos \rho(x-a) + \frac{1}{\rho} \int_a^x g(y) \sin \rho(x-y) dy,$$

所以, 原方程的解一定满足积分方程

$$f(x) - \frac{1}{\rho} \int_a^x \sigma(y) \sin \rho(x-y) f(y) dy = \cos \rho(x-a),$$

这是一个形如(2)的积分方程.

由 V. Volterra^[1] 及 J. le Roux^[1] 首先研究的形如(1)与(2)的方程是形如

$$\int_a^b K(x, y)f(y)dy = g(x), \quad (1')$$

$$f(x) - \int_a^b K(x, y)f(y)dy = g(x) \quad (2')$$

的积分方程的特殊情形, 这里的积分限是定数. 形如(1)与(2)的方程显然对应于在 $x < y$ 时为零的函数 $K(x, y)$. 函数 $K(x, y)$ 称为积分方程的核.

以下我们将研究第二类积分方程, 亦即形如(2')的方程. 这

类方程也称为 Fredholm 积分方程, 以纪念这位首先(在1900年)研究出这类方程的完整理论的著名的瑞典几何学家¹⁾。

我们将要得到的结果可以推广到广泛得多的泛函方程上去。现在我们只指出一个最直接的推广, 就是基本区间 (a, b) 可以换成任意维空间中的任意一个有界的或无界的积分区域 D , 例如, 可以取某一曲线或某一曲面来作为积分区域。当然, 这时的 x 与 y 应理解为区域 D 的两个点, 而积分则在 D 上进行。积分也可以换成关于某一正质量分布的 Stieltjes 积分, 或者换成在第 61 段中讨论过的那种类型的任一泛函。

65. 有界核. 为了下面的研究, 我们首先考察方程

$$f(x) - \int_a^b K(x, y)f(y)dy = g(x), \quad (3)$$

它的核 $K(x, y)$ 是有界的, 并且除了 $y=x$ 以外是连续的。(我们允许在直线 $y=x$ 上不连续是为了包括 Volterra 核的情形, 它是在三角形 $a \leq y \leq x \leq b$ 上连续而在其外为零的。) 给定的函数 $g(x)$ 假定是可和的。

不论可和函数 $h(x)$ 如何, 积分

$$\int_a^b K(x, y)h(y)dy$$

都有意义并且为 x 的连续函数, 这个函数我们表为 $Kh(x)$ 或 Kh . 把方程(3)写成

$$f = g + Kf$$

的形式, 并且取函数 $f_0(x) = 0$ 作为首次逼近而试用逐次逼近法来求它的解, 则我们依次得到:

$$\begin{aligned} f_1 &= g, \quad f_2 = g + Kf_1 = g + Kg, \\ f_3 &= g + Kf_2 = g + Kg + K^2g, \dots \end{aligned}$$

而一般地有

$$f_n = g + Kf_{n-1} = g + Kg + \dots + K^{n-1}g,$$

这里的“叠式” $K^n g$ 由递推关系

1) Fredholm[1], [2].

$$K^1 g = K g, K^n g = K(K^{n-1} g) \quad \text{当 } n \geq 2$$

来确定. 这样我们就导致函数级数

$$g + K g + K^2 g + \cdots + K^n g + \cdots, \quad (4)$$

这个级数称为 Neumann 级数¹⁾.

假如这个级数一致收敛, 则它的和 f 就是方程 (3) 的解.

事实上, 因为这时容许逐项积分, 所以我们有

$$\begin{aligned} K f &= K(g + K g + K^2 g + \cdots) \\ &= K g + K(K g) + K(K^2 g) + \cdots \\ &= K g + K^2 g + K^3 g + \cdots = f - g. \end{aligned}$$

然而为了保证级数 (4) 一致收敛, 只需假定

$$M = \max |K(x, y)| < \frac{1}{b-a}, \quad (5)$$

因为这时级数 (4) 从第二项开始受控制于收敛级数

$$\begin{aligned} &AM + AM^2(b-a) + AM^3(b-a)^2 + \cdots \\ &+ AM^n(b-a)^{n-1} + \cdots, \end{aligned}$$

这里

$$A = \int_a^b |g(x)| dx.$$

条件 (5) 对于 Neumann 级数的一致收敛性却是远非必要的. 这里举两个例子:

1) $K(x, y) = \alpha(x)\beta(y)$, 其中的 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是任意两个连续函数, 只服从条件:

$$\int_a^b \alpha(x)\beta(x) dx = 0.$$

这时我们有

$$K g(x) = \int_a^b \alpha(x)\beta(y)g(y) dy = c\alpha(x)^{2)},$$

1) Carl Neumann 在他用位势理论研究 Dirichlet 问题的解时, 首先给出了逐次逼近的收敛性的严格证明; 参看 C. Neumann[*]. 类似的展开式也在上面已提到过的 Liouville 的文章中遇到.

2) $c = \int_a^b \beta(y)g(y) dy.$

$$\begin{aligned} K^2 g(x) &= \int_a^b \alpha(x) \beta(y) c \alpha(y) dy \\ &= c \alpha(x) \int_a^b \beta(y) \alpha(y) dy = 0, \end{aligned}$$

$$K^3 g = K(K^2 g) = 0, \quad K^4 g = K(K^3 g) = 0, \quad \dots$$

于是, 级数(4)退化为它的开头的两项, 而方程(3)有解

$$f(x) = g(x) + K g(x).$$

2) Volterra 核, 它以条件

$$K(x, y) = 0 \quad \text{当 } a \leq x \leq y \leq b$$

为特征. 保留以前的记号

$$M = \max |K(x, y)|, \quad A = \int_a^b |g(x)| dx,$$

则我们有

$$\begin{aligned} |K g(x)| &= \left| \int_a^x K(x, y) g(y) dy \right| \leq AM, \\ |K^2 g(x)| &= \left| \int_a^x K(x, y) [K g(y)] dy \right| \\ &\leq \int_a^x M \cdot AM dy = AM^2(x-a), \\ |K^3 g(x)| &= \left| \int_a^x K(x, y) [K^2 g(y)] dy \right| \\ &\leq \int_a^x M \cdot AM^2(y-a) dy = AM^3 \frac{(x-a)^2}{2}, \end{aligned}$$

而一般地有

$$|K^n g(x)| \leq AM^n \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} \quad (n=1, 2, \dots).$$

所以, 级数(4)从第二项开始有对于任何 M 都收敛的控制级数

$$\begin{aligned} &AM + AM^2(b-a) + AM^3 \frac{(b-a)^2}{2} + \dots \\ &+ AM^n \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} + \dots. \end{aligned}$$

可见对于任意的 Volterra 核, Neumann 级数总是一致收敛的, 并且提供了方程的解.

附带指出, 条件(5)并不方便, 因为把有穷区间 (a, b) 换为一个无穷区间时, 条件(5)没有意义.

66. 平方可和核. L^2 空间的线性算子. 正如 E. Schmidt^[2]所注意到的那样, 条件(5)可以换成较少约束的条件

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, y)|^2 dx dy < 1. \quad (6)$$

我们甚至可以完全免去连续性的假设; 只需假定核 $K(x, y)$ 是平方可和的, 即假设它属于相应于积分区域 $a \leq x \leq b, a \leq y \leq b$ 的(复)空间 L^2 . 我们用 L^2 表示这个函数空间, 而对于定义在区间 $a \leq x \leq b$ 上的单变量 x 的函数的空间仍用记号 L^2 . 在空间 L^2 中的数量积与范数我们用符号

$$(\cdot, \cdot) \text{ 与 } \|\cdot\|$$

来表示, 而在 L^2 中的数量积与范数则用符号

$$(\cdot, \cdot) \text{ 与 } |\cdot|.$$

此外, 如果我们要那样推广关于核的假设的话, 则必须对给定的函数 $g(x)$ 给予某些限制, 即不仅要求它本身是可和的, 而且还是平方可和的, 也就是要求它属于空间 L^2 .

令 $K(x, y)$ 是属于 L^2 的函数. 由累次积分的 Fubini 定理(见第 40 段)推知, 积分

$$\int_a^b |K(x, y)|^2 dy$$

对于几乎所有的 x 存在, 并且

$$\int_a^b \left[\int_a^b |K(x, y)|^2 dy \right] dx = \int_a^b \int_a^b |K(x, y)|^2 dx dy = |K|^2.$$

所以函数

$$k(x) = \left[\int_a^b |K(x, y)|^2 dy \right]^{\frac{1}{2}}$$

是空间 L^2 的一个元素, 并且 $\|k\| = |K|$.

令 $h(x)$ 是属于 L^2 的任一函数. 积分

$$\int_a^b K(x, y) h(y) dy$$