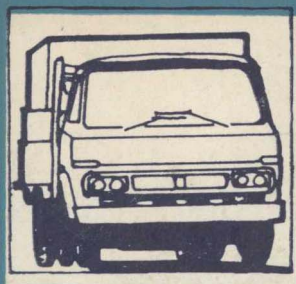


高等学校试用教材

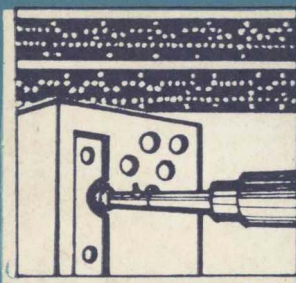
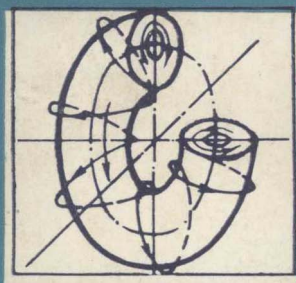
060256



流体力学基础

下 册

清华大学工程力学系潘文全 主编



机械工业出版社

高等学校试用教材

流体力学基础

下 册

清华大学工程力学系潘文全 主编



机械工业出版社

流体力学基础（下册）

清华大学工程力学系潘文全 主编

*

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南街一号）

（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 $787 \times 1092 \frac{1}{16}$ ·印张 $18\frac{3}{4}$ ·字数459千字

1982年2月北京第一版·1982年2月北京第一次印刷

印数00,001—11,500·定价1.95元

*

统一书号：15033·5111

前 言

本书是根据 1978 年 4 月在天津召开的高等学校一机部对口专业座谈会的精神，以及同年 10 月在杭州召开的流体力学专业教材会议所确定的教材计划和教材大纲编写的。

本书按流体力学学科系统阐明流体运动所遵循的基本规律，以及流体与固体相对运动时的相互作用。并着重讨论流体力学的基本物理概念，以及流体力学问题的建立过程和数学处理方法，使读者获得从事流体力学研究工作所必需具备的理论基础。为加深对于基本内容的理解，本书各章（除第 14 章外）编入了若干例题和习题。在取材的深度和广度上，本书适当考虑了不同类型专业的要求，以使读者有一定的选择余地。

本书共分上下两册，上册已由机械工业出版社于 1980 年出版，此书为下册。

本书可作为高等理工科院校流体力学专业本科学生及机械、能源、航空、船舶、水利、化工、气象等专业研究生的流体力学课程的教材；亦可供从事有关流体力学工作的教师、科学工作者及工程技术人员参考。

本书下册由潘文全、叶宏开等同志合编，潘文全同志任主编。第 13 章的主要部分初稿由张兆顺同志提供。浙江大学吴松盛、许学溶、陈英贤等同志任主审。章光華、时爱民等同志对部分初稿提出了很多宝贵意见。本书责任编辑是孙祥根同志。编者在此对以上同志表示感谢。

由于编者水平有限，教学经验不足，加以编写时间匆促，书中一定会有很多缺点、错误，望广大读者批评指教。

目 录

第十章 可压缩流体的一元流动	1	三、压力系数的线性化	51
§ 10-1 小扰动波传播的物理过程	1	§ 11-4 亚声速流的小扰动	51
§ 10-2 可压缩流体的一元定常流动	3	一、波形壁亚声速绕流	52
一、一元定常流动的基本方程	3	二、薄翼亚声速流的相似律	54
二、等熵一元定常流动基本方程的积分	4	§ 11-5 超声速流的小扰动	60
三、完全气体的等熵一元定常流动	5	一、超声速小扰动绕流的通解	60
§ 10-3 变截面喷管中的等熵流动	10	二、波形壁超声速绕流	62
一、亚声速流与超声速流的区别	10	三、薄翼超声速绕流	64
二、渐缩喷管中的流动	11	四、薄翼超声速绕流相似律	67
三、拉伐尔喷管中的流动	13	§ 11-6 超声速流动中的特征线	69
§ 10-4 等截面管中流体有摩擦与加热的流动特征	15	一、特征线方程	69
一、等截面绝热摩擦管道中的流动特征	15	二、特征线性质	71
二、等截面加热管道中流动特征	17	三、特征线上马赫数变化规律	73
§ 10-5 正激波	18	四、简单波	74
一、正激波形成的物理过程	18	§ 11-7 超声速气流的偏转流动	76
二、正激波上的基本方程	19	一、超声速气流膨胀性偏转流动	76
三、阮金—雨贡纽曲线	20	二、超声速气流压缩性偏转流动	78
四、正激波前、后物理量之间的关系式	21	§ 11-8 斜激波	79
五、运动激波与激波反射	24	一、斜激波的形成	79
六、拉伐尔喷管中带有正激波的流动	27	二、斜激波关系式	80
§ 10-6 可压缩理想流体的一元不定常流动	28	三、激波极曲线	82
一、一元不定常流动的基本方程	28	四、弱斜激波	84
二、特征线与黎曼不变量	28	五、薄菱形翼型的升力和阻力	86
三、简单波	31	六、脱体激波	88
四、活塞引起的无激波扰动	32	七、超声速气流中总压的量测	90
五、活塞引起的有激波扰动	37	§ 11-9 波的反射和相交	90
六、特征线在固壁上的吸收和反射	39	一、斜激波的反射和相交	90
习题	42	二、膨胀波的反射和相交	92
第十一章 可压缩流体的平面流动	44	三、平面超声速自由射流	93
§ 11-1 运动流场中的小扰动传播特征	44	习题	94
§ 11-2 可压缩定常有势流动的基本方程	46	第十二章 粘性流体动力学基础	98
一、可压缩理想流体无旋流动的基本方程	46	§ 12-1 流动的粘性效应	98
二、可压缩理想流体平面无旋流动基本方程	47	一、圆柱绕流	98
§ 11-3 平面无旋流动的小扰动理论	48	二、二元翼型绕流	99
一、基本方程的线性化	48	三、管内流动	100
二、边界条件的线性化	50	§ 12-2 层流与湍流	101
		§ 12-3 广义牛顿粘性应力公式	103
		一、应力张量分析	103

二、变形速率张量	105	二、湍流流动的耗散性	166
三、应力张量与变形速率张量的关系	105	三、湍流流动的有旋性	166
§ 12-4 粘性流体动力学基本方程	108	四、若干典型条件下的湍流的特点	168
一、连续方程	109	§ 13-4 湍流的量纲分析法	169
二、运动方程	109	一、湍流特征物理量及湍流雷诺数	169
三、能量方程	110	二、湍流场中的应力及能量耗散 的量纲分析	169
四、关于粘性流体动力学方程组的 封闭性	112	§ 13-5 混合长度理论	171
§ 12-5 粘性流动的边界条件	115	一、混合长度理论的基本思想	171
一、流体边界面两侧的过渡关系	115	二、光滑壁面附近的完全发展湍 流的速度分布	173
二、边界条件	118	三、粗糙壁面附近完全发展湍流 速度分布	178
§ 12-6 粘性流体动力学的相似律	119	四、对混合长度理论的评论	180
一、基本方程和边界条件的无量纲化	119	§ 13-6 管内湍流流动	180
二、由无量纲方程和边界条件导 出的相似律	125	一、圆管内的速度分布	180
§ 12-7 不可压缩粘性流动的基本特性	127	二、圆管内的流动损失	182
一、粘性流动的有旋性	127	三、非圆管中的流动损失	189
二、粘性流动的旋涡扩散性	128	四、局部流动损失	189
三、粘性流动的能量耗散性	130	习题	190
§ 12-8 不可压缩粘性流体动力学 若干解析解	130	第十四章 边界层理论	194
一、圆管内的定常层流流动	131	§ 14-1 边界层概念	194
二、平行平板间的定常层流流动	135	§ 14-2 边界层特征	195
三、同轴环形空间的层流流动	137	一、边界层名义厚度的量级估计	195
四、无界平板在粘性流体中的突然运动	139	二、边界层排挤厚度 δ_1	196
§ 12-9 极慢粘性流动的近似解	142	三、动量损失厚度 δ_2	197
一、滑动轴承的润滑理论	143	四、能量损失厚度 δ_3	197
二、圆球绕流	146	§ 14-3 不可压缩层流边界层基本方程 和边界条件	198
习题	150	一、平壁面层流边界层基本方程	198
第十三章 湍流	153	二、边界层的边界条件和起始条件	200
§ 13-1 湍流的统计平均法	153	三、边界层壁面阻力系数	202
一、湍流的随机性	153	§ 14-4 平壁面层流边界层的勃拉修斯解	202
二、时均法	154	一、勃拉修斯解	203
三、体均法	155	二、结果分析	205
四、概率平均法	155	§ 14-5 平面射流湍流边界层	207
五、三种平均法之间的关系及各 态遍历假说	156	一、基本方程和边界条件	207
六、脉动值及其性质	157	二、求解	209
§ 13-2 湍流的基本方程	159	§ 14-6 边界层动量积分关系式	214
一、湍流的连续性方程	159	一、边界层动量积分关系式	214
二、湍流的平均动量方程——雷诺方程	159	二、零压梯度平壁面层流边界层	217
§ 13-3 湍流流动的基本性质	162	三、零压梯度平壁面湍流边界层	219
一、湍流能量的输运性	162	四、零压梯度平壁面混合边界层	221

§ 14-7 边界层流动的分离与压差阻力	223	§ 15-8 波阻	258
一、边界层流动的分离	223	§ 15-9 浅水中的重力波	264
二、物体的压差阻力	225	一、浅水运动的基本方程	264
习题	228	二、长波	266
第十五章 重力波	230	三、水激波——涨潮波, 水跃	270
§ 15-1 基本方程和边界条件	230	四、水坝的破坏问题	272
一、基本方程	230	§ 15-10 考特威—德佛里斯方程和孤立波	275
二、边界条件和它的线性化	230	一、考特威—德佛里斯方程	275
三、初始条件	232	二、孤立波	279
§ 15-2 平面驻波	233	附录	281
一、无限深水域中的平面驻波	234	I 常见流体的密度和重度	281
二、等深度水域中的驻波	237	II 不同温度下水、空气和水银的密度	281
§ 15-3 平面进行波	238	III 普通液体的表面张力 (20℃, 与 空气交界)	281
一、无限深水域中的平面进行波	238	IV 标准大气	282
二、等深度水域中的平面进行波	241	V 常见气体的粘性系数	283
§ 15-4 两种液体分界面上的平面进行波	242	VI 水的粘性系数	283
§ 15-5 波群和群速度	245	VII 空气的粘性系数	283
§ 15-6 盖尔斯特涅尔摆线波	248	VIII 常见气体的比热 c_p	284
一、质点的轨迹与波的压力分布	248	IX 完全气体的等熵流 ($\gamma = 1.4$)	284
二、摆线波的性质	250	X 完全气体正激波前、后关系 ($\gamma = 1.4$)	290
§ 15-7 波的能量	254	XI 完全气体的普朗特—迈耶函数 v	293
一、重力波的能量	254		
二、能量的转移	257		

第十章 可压缩流体的一元流动

流体的可压缩性是流体的固有属性,任何真实流体都是可压缩流体。但是,对于某些实际问题,若在整个流场中密度差异甚微,则可以认为整个流场中密度为常数,这就是不可压缩流体动力学所讨论的问题。

在流动过程中密度变化较大的流体力学问题,则是可压缩流体动力学讨论的对象。流体密度的变化与压力的变化密切相关。例如在爆炸过程中,由于流体压力变化很大,此时必须考虑流体密度的变化,又例如在高速流动中,也必须考虑密度的变化,但是应当指出,在不定常流动中,即使气流速度不高,流体的可压缩性对于流动也可能有重要影响。

本章将主要讨论可压缩流体流动的若干物理特性和一元等熵流动。

§ 10-1 小扰动波传播的物理过程

在密度有变化的流场中,相邻两点之间的密度差与它们的压力差密切相关。密度对压力的变化率是分析可压缩流动的一个重要参数。我们将会看到,密度对压力的变化率与声波的传播速度有密切关系,声波就是在可压缩流体中传播的小扰动波,它的传播速度简称声速,或称音速。

为了说明小扰动波传播的物理过程,让我们观察图 10-1 a 所示的理想化模型。在等截面直长管内充满可压缩流体,管的左端装有活塞,管内流体原先处于静止状态。若推动活塞以微小速度 dV 向右运动,则紧贴活塞右侧的气体也随伴它向右运动,并且产生微小的压力增量;向右运动的流体又推动它右侧的流体向右运动,并产生压力增量。这个过程以速度 a 逐渐向右传递,这就是小扰动波的传播过程,也就是声波的传播过程,故通常称 a 为声速。在小扰动波通过之前流体处于静止状态,压力为 p ,密度为 ρ ;在小扰动波通过之后,流体的速度变为 dV ,压力变为 $p + dp$,密度变为 $\rho + d\rho$ 。未扰动区域和扰动区域的交界面称作波锋。

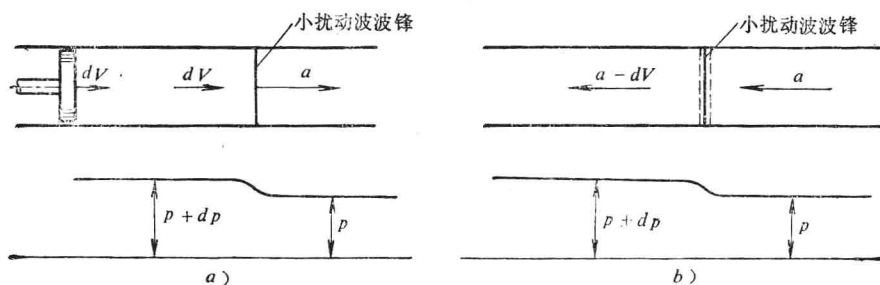


图10-1 小扰动波传播的物理过程

小扰动波的传播速度和流体的物理量有密切关系。为分析方便起见，将坐标固结在波锋上，如图 10-1 b 所示。这样，波锋右侧原来静止的流体将以速度 a 向左运动，压力为 p ，密度为 ρ 。左侧流体将以速度 $a - dV$ 向左运动，压力为 $p + dp$ ，密度为 $\rho + d\rho$ 。今以图中用虚线所示的区域作为控制体，波锋处于控制体中。当波锋两侧的控制面无限接近时，控制体体积趋于零。

设管道截面积为 A ，对控制体写出连续方程

$$\rho a A = (\rho + d\rho)(a - dV)A$$

略去二阶小量，得

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dV}{a} \quad (10-1)$$

对控制体建立动量方程时，注意到控制体的体积为零。且可忽略切应力的作用，于是动量方程可写成

$$pA - (p + dp)A = \rho a A [(a - dV) - a]$$

整理可得

$$dp = \rho a dV \quad (10-2)$$

由式 (10-1) 及 (10-2)，消去 dV 可得声速公式

$$a^2 = \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_s \quad (10-3)$$

若活塞向左运动，则由活塞向右发出的是压力下降的小扰动波。利用上述类似的方法，可以得到与式 (10-3)，相同的公式。由于小扰动波在传播过程中，流体的密度、压力及温度的变化无限小，因此可以假定这个过程是等熵过程，于是声速公式 (10-3) 可写成

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s} \quad (10-4)$$

声速公式 (10-4) 无论对于气体还是液体都是适用的。

对于完全气体，等熵过程中存在下列关系

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{const}$$

对它取对数再微分，并考虑到完全气体的状态方程 $p = \rho RT$ 可得

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \frac{\gamma p}{\rho} = \gamma RT$$

因此完全气体的声速公式可写成

$$a = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\gamma RT} \quad (10-5)$$

可见，完全气体中的声速是温度 T 的函数。在室温条件下，空气中的声速约为 335 m/s，氢气中的声速约为 1280 m/s。

最后应当指出, 在我们写出声速公式 (10-4) 时, 曾假定小扰动波的传播过程是等熵过程, 实验表明, 这个假定是正确的。历史上曾有人假定过小扰动波的传播过程是等温过程。实验表明这个假定与实际不符的。

§ 10-2 可压缩流体的一元定常流动

若流场中所讨论的各物理量都只是一个空间坐标 l 和时间 t 的函数, 则称这种流动为一元流动。

一元管流是最简单的一元流动。真实的管内流动, 如喷管、扩压器以及管道内的流动都可近似地简化为一元管流, 即认为在任一管截面上各点的物理量是相等的, 或用截面上物理量的平均值代替截面上各点的物理量。若以 l 表示从流线上某点起算的弧长, 则截面上平均物理量沿流线的变化可表示为

$$B = B(l, t)$$

对于定常流动显然有 $B = B(l)$, 本节只限于讨论定常流动。至于不定常流动将在 § 10-6 中讨论。

一、一元定常流动的基本方程

在流管上任取一段微元流管作为控制体, 如图 10-2 所示。对此控制体写出连续方程, 动量方程及能量方程。

(一) 连续方程

对控制体可写出连续方程如下

$$Q_m = VA\rho = \left(V + \frac{dV}{dl}dl\right) \left(A + \frac{dA}{dl}dl\right) \left(\rho + \frac{d\rho}{dl}dl\right) \quad (10-6)$$

整理上式, 略去高阶小量可得

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (10-7)$$

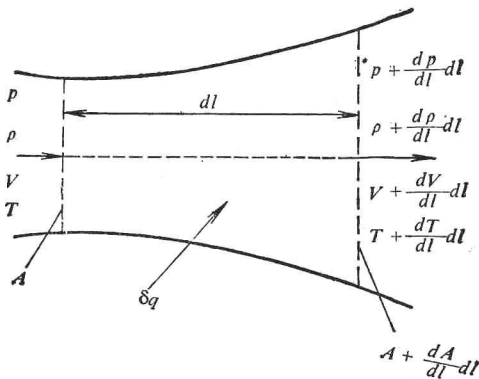


图10-2 一元定常流动

(二) 动量方程

在忽略质量力的条件下, 动量方程可写成

$$pA + \left(p + \frac{dp}{2}\right)dA - (p + dp)(A + dA) - \delta F_R = \rho V A [(V + dV) - V]$$

式中 F_R 为管壁作用于流体的摩擦阻力, 整理上式, 略去高阶小量可得

$$VdV + \frac{dp}{\rho} + \frac{\delta F_R}{A\rho} = 0 \quad (10-8)$$

(三) 能量方程

在壁面固定的情况下, 通过控制体侧面与外界并无机械功交换, 但可能有热量交换。

用 δq 表示单位质量流体在单位时间内所吸收的热量。于是能量方程可写成

$$Q_m \frac{1}{2} V^2 + pAV + Q_m e + Q_m \delta q = Q_m \frac{1}{2} (V + dV)^2 + (p + dp)(A + dA)(V + dV) + Q_m(e + de)$$

整理上式, 略去高阶小量, 可得

$$VdV + di = \delta q \quad (10-9)$$

式中 $i = e + \frac{p}{\rho}$ 。

上述三个方程是可压缩流体定常一元流动的基本方程, 其中 p , ρ , V , i , A , δq , F_R 为未知量。在求解具体问题时, 还必须补充足够的条件, 以使方程封闭。

二、等熵一元定常流动基本方程的积分

由热力学知, 等熵流动的条件是过程绝热、可逆。

在绝热流动的条件下, $\delta q = 0$, 于是能量方程 (10-9) 可写成

$$VdV + di = 0$$

积分可得

$$\frac{V^2}{2} + i = \text{const} \quad (10-10)$$

应当指出, 在建立此方程时, 只要求过程绝热, 而并未限制过程是否可逆, 因而这个方程既适用于可逆过程, 也适用于不可逆过程。

在可逆流动的条件下, $\delta F_R = 0$, 于是动量方程 (10-8) 可写成

$$VdV + \frac{dp}{\rho} = 0$$

积分可得

$$\boxed{\frac{1}{2} V^2 + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} = \text{const}} \quad (10-11)$$

显然, 这个方程只适用于可逆过程。

连续方程 (10-7) 与过程是否绝热或可逆无关, 其积分形式为

$$\boxed{AV\rho = \text{const}} \quad (10-12)$$

这三个方程构成了可压缩一元定常绝热可逆流动的基本方程组, 即等熵流动的基本方程组。

三、完全气体的等熵一元定常流动

对于完全气体存在下列状态方程

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad (10-13)$$

$$i = c_p T \quad (10-14)$$

并且

$$c_p - c_v = R \quad (10-15)$$

$$c_p / c_v = \gamma \quad (10-16)$$

$$c_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} R \quad (10-17)$$

由式 (10-5) 知, 完全气体的声速公式为

$$a = \sqrt{\gamma RT} \quad (10-18)$$

于是完全气体流动的马赫数为

$$M = \frac{V}{a} = \frac{V}{\sqrt{\gamma RT}} \quad (10-19)$$

利用式 (10-13)、(10-14)、(10-17) 及 (10-18) 可得

$$i = c_p T = \frac{\gamma}{\gamma - 1} RT = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = \frac{a^2}{\gamma - 1} \quad (10-20)$$

因而能量方程 (10-10) 可写成下列各种形式

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} V^2 + c_p T &= \text{const} \\ \frac{1}{2} V^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} RT &= \text{const} \\ \frac{1}{2} V^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} &= \text{const} \\ \frac{1}{2} V^2 + \frac{1}{\gamma - 1} a^2 &= \text{const} \end{aligned} \quad (10-21)$$

在过程等熵的条件下, 存在等熵关系式

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{const} \quad (10-22)$$

将此关系代入动量方程 (10-11), 积分之也可得到式 (10-21)。这就说明, 在等熵流动的条件下, 能量方程与动量方程一致。但是, 在过程绝热而非可逆的条件下, 能量方程仍然为式 (10-21), 而由动量方程式 (10-8) 并不能获到上述结果。

(一) 任意两截面上物理量之间的关系

现在让我们利用上述方程建立任意两截面上物理量之间的关系式。

利用式 (10-19) 及 (10-21) 中第二式可得

$$\boxed{\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2}} \quad (10-23)$$

这个关系既适用于等熵过程，也适用于非等熵过程。

利用式 (10-22)、(10-13) 及上式，可得

$$\frac{p_2}{p_1} = \left[\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2} \right]^{\gamma/\gamma-1} \quad (10-24)$$

此式在推导过程中，应用了条件 (10-22)，因此只适用于等熵过程。

利用式 (10-21) 中的第二式及式 (10-19) 可得

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{M_2}{M_1} \left[\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2} \right]^{1/2} \quad (10-25)$$

此式既适用于等熵过程，也适用于非等熵过程。

利用式 (10-24)，(10-22) 可得

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left[\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2} \right]^{1/\gamma-1} \quad (10-26)$$

此式在推导过程中应用了条件 (10-22)，因此只适用于等熵过程。

利用连续方程 (10-12) 及 (10-25)(10-26) 可得

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{M_1}{M_2} \left[\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (10-27)$$

此式也只适用于等熵过程，因为推导过程中应用了关系式 (10-26)。

方程 (10-23)——(10-27) 给出了完全气体可逆绝热管流任意两截面上的物理量之间的关系。若已知某一截面 A_1 上的物理量，则由上述各式可确定此管任一截面 A_2 上的物理量。

但是在工程计算中，很少直接利用它们进行计算，而往往首先把它们变成与某种参考状态的物理量相比的形式，从而使计算变得更为方便。

(二) 任意截面上物理量与参考状态物理量的对比关系式

在本书的第六章中，我们讨论了三种参考状态：滞止状态，临界状态和最大速度状态。处于任何状态的流体，都可以设想通过等熵过程转变为对应的滞止状态，临界状态和最大速度状态。应当指出，参考状态可以是问题中真实存在的状态，也可以是实际上不存在的状态，对于等熵流动来说，参考状态往往是真实可能存在的状态。

(1) 与滞止状态的关系

滞止状态是流体速度为零的假想状态，以下标“0”表示之，即 $V_0 = 0$ 或 $M_0 = 0$ 的

状态, 其它各物理量用 T_0 、 p_0 、 ρ_0 表示。于是, 能量方程 (10-21) 可写成

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}V^2 + c_p T &= c_p T_0 \\ -\frac{1}{2}V^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1}RT &= \frac{\gamma}{\gamma-1}RT_0 \\ -\frac{1}{2}V^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} &= \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0} \\ -\frac{1}{2}V^2 + \frac{1}{\gamma-1}a^2 &= \frac{1}{\gamma-1}a_0^2 \end{aligned} \quad (10-28)$$

上式还可以写成下列形式

$$\begin{aligned} V &= [2c_p(T - T_0)]^{1/2} \\ V &= \left[2 \frac{\gamma}{\gamma-1} R (T_0 - T) \right]^{1/2} \\ V &= \left[2 \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p}{\rho} \right) \right]^{1/2} \\ V &= \left[\frac{2}{\gamma-1} (a_0^2 - a^2) \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (10-29)$$

利用式 (10-23)、(10-24)、(10-26) 可以得到任意截面上的物理量与滞止状态物理量之间的关系

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \quad (10-30)$$

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (10-31)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (10-32)$$

应当指出, 式 (10-30) 并不要求过程等熵。

例如, 对于与大容器相连接的一元管流, 由于容器体积足够大, 如图 (10-3) 所示, 可以认为容器中的状态处于速度等于零的滞止状态。于是式 (10-30)、(10-31)、(10-32) 就给出了容器中物理量与管流任意截面上物理量之间的关系式。

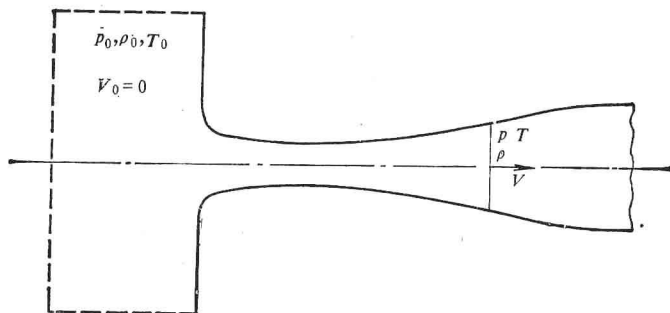


图10-3 一元管流

(2) 滞止状态与临界状态的关系

临界状态是流体速度等于当地声速时的状态, 以下标“*”表之即 $V_* = a_*$, a_* 为临界声速, V_* 为临界速度, 此时 $M_* = 1$, 各物理量用 T_* , p_* , ρ_* 表示。由能量方程 (10-28) 可得

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}V_*^2 + c_p T_* &= c_p T_0 \\ -\frac{1}{2}V_*^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1}RT_* &= \frac{\gamma}{\gamma-1}RT_0 \end{aligned} \quad (10-33)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}V_*^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_*}{\rho_*} &= \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \\ -\frac{1}{2}V_*^2 + \frac{1}{\gamma-1}a_*^2 &= \frac{1}{\gamma-1}a_0^2 \end{aligned}$$

由于 $V_* = a_*$, 于是由上式的最后一式得到

$$a_*^2 = \frac{2}{\gamma+1}a_0^2 \quad (10-34)$$

由于 $M_* = 1$, 于是由式 (10-30) (10-31) (10-32) 可得

$$\frac{T_*}{T_0} = \frac{2}{\gamma+1} \quad (10-35)$$

$$\frac{p_*}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (10-36)$$

$$\frac{\rho_*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (10-37)$$

若气体的 $\gamma = 1.4$ 则

$$\frac{T_*}{T_0} = 0.833, \quad \frac{p_*}{p_0} = 0.528, \quad \frac{\rho_*}{\rho_0} = 0.634$$

采用与 (一) 中相类似的推导方法, 由式 (10-33) 可以得到任意截面上的物理量与临界状态物理量之间的关系式^①

$$\frac{T}{T_*} = \frac{\gamma+1}{2+(\gamma-1)M^2} \quad (10-38)$$

$$\frac{p}{p_*} = \left[\frac{\gamma+1}{2+(\gamma-1)M^2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (10-39)$$

$$\frac{\rho}{\rho_*} = \left[\frac{\gamma+1}{2+(\gamma-1)M^2} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (10-40)$$

$$\frac{V}{V_*} = M \left[\frac{\gamma+1}{2+(\gamma-1)M^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (10-41)$$

$$\frac{A}{A_*} = \frac{1}{M} \left(\frac{2}{\gamma+1} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} M^2 \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (10-42)$$

式中 A_* 为 $M=1$ 处的截面面积。

① 对于 $\gamma = 1.4$ 的完全气体, 式 (10-38) — (10-42) 计算表格列于附录Ⅲ中。

(3) 滞止状态与最大速度状态的关系

最大速度状态是流体速度达到最大值的假想状态, 由式 (10-29) 的第二式可见, 当 $T = 0$ 时, 速度可以达到最大值, 即

$$V_{\max} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} RT_0} \quad (10-43)$$

或

$$V_{\max} = \left(\frac{2}{\gamma-1} \right)^{1/2} a_* \quad (10-44)$$

利用式 (10-34), 上式又可写成

$$V_{\max} = \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right)^{1/2} a_* \quad (10-45)$$

应当指出, 上述三个关系, 都是由能量方程直接得到的, 因此并不要求过程等熵。

(三) 流量公式

由连续方程 (10-12) 知, 管流的流量为

$$Q_m = AV\rho = A \frac{p}{RT} V = A \frac{pV}{\sqrt{\gamma RT}} \sqrt{\frac{\gamma}{R}} \sqrt{\frac{T_0}{T}} \frac{1}{\sqrt{T_0}} \quad (10-46)$$

利用式 (10-30), (10-18) 可把上式写成

$$Q_m = A \sqrt{\frac{\gamma}{R}} \frac{p}{\sqrt{T_0}} M \sqrt{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \quad (10-47)$$

若利用式 (10-31) 消去上式中的 M , 则可得

$$Q_m = \frac{Ap}{\sqrt{RT_0}} \left(\frac{2\gamma}{\gamma-1} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \left[\left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (10-48)$$

若利用式 (10-31) 消去式 (10-47) 中的 p , 则可得

$$Q_m = A \sqrt{\gamma p_0 \rho_0} M \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (10-49)$$

该式表明, 当滞止参数 p_0 , ρ_0 不变时, 流量只是马赫数的函数, 因此, 若令 $\frac{dQ_m}{dM} = 0$ 就可求得 M 为何值时流量为最大值。由 $\frac{dQ_m}{dM} = 0$ 可得

$$1 - M^2 \frac{\gamma+1}{2} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-1} = 0$$

由此解出 $M=1$, 即流速等于声速时流量最大。因此在式 (10-49) 中令 $M=1$ 即可得最大流量为

$$Q_{m\max} = A_* \sqrt{\gamma p_0 \rho_0} \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = A_* \left[\gamma p_0 \rho_0 \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \right]^{1/2} \quad (10-50)$$

利用关系式 (10-36), (10-37) 上式又可写成

$$Q_{\max} = A_* \left[p_* \rho_* \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1} - \frac{1}{\gamma-1}} \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \right]^{1/2} \\ = A_* (p_* \rho_*)^{1/2} = A_* \rho_* a_* \quad (10-51)$$

在结束本节讨论之前，我们要顺便指出，在某些问题中，有时使用无量纲速度

$$\lambda = \frac{V}{a_*}$$

比使用马赫数 M 更为方便，这是因为 λ 中的 a_* 只与滞止参数有关，而与流速无关，但 $M = \frac{V}{a}$ 中的声速 a ，却与各点的流速值有关。 λ 通常称作速度系数，它与 M 的关系可由式 (10-38) 求出

$$\lambda^2 = \frac{V^2}{a_*^2} = \frac{V^2}{a^2} \frac{a^2}{a_*^2} = M^2 \frac{T}{T_*} = M^2 \frac{(\gamma+1)}{2 + (\gamma-1)M^2} = \frac{\gamma+1}{2/M^2 + (\gamma-1)}$$

或
$$M^2 = \frac{2}{\frac{\gamma+1}{\lambda^2} - (\gamma-1)} \quad (10-52)$$

利用此式，可以用 λ 取代本节讨论的所有公式中的 M ，从而可以得到一系列相应的关系式

§ 10-3 变截面喷管中的等熵流动

喷管中的流动是最典型的一元流动。研究喷管中的流动，不但有工程应用价值，而且可以进一步了解一元流动的性质。

一、亚声速流与超声速流的区别

亚声速流动与超声速流动在物理上有重要差别。由式 (10-7) 知，连续方程为

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (10-53)$$

在过程可逆的条件下， $\delta F_K = 0$ ，因此动量方程 (10-8) 可写成

$$VdV = -\frac{dp}{\rho} \quad (10-54)$$

由式 (10-3)、(10-4) 知

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \frac{dp}{d\rho}$$

于是式 (10-54) 可写成

$$VdV = -\frac{dp}{\rho} = -\frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{\rho} = -a^2 \frac{d\rho}{\rho}$$

由于 $M = \frac{V}{a}$ ，故上式可写成

$$\frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{dV}{V} \quad (10-55)$$

再将此式代入式 (10-53) 可得