

内 容 提 要

本书是按国家教育委员会批准并要求自1987年秋起试行的《结构力学课程教学基本要求》(参考学时110)所规定的内容编写的。

本书分上、下两册。对《基本要求》中规定的学习内容保证了必要的篇幅,同时还编入了进一步加深、加宽的内容。因此除作为土建、水利专业本科生《结构力学》课程的教材外,也可供土建、水利工程技术人員参考。

结 构 力 学

(上册)

刘昭培 张福美 主编

天津大学土木系结构力学教研室编

*

天津大学出版社出版

(天津大学内)

河北省邮电印刷厂印刷

新华书店天津发行所发行

*

开本: 787×1092毫米1/16 印张: 19¹/₄ 字数: 480千字

1989年12月第一版 1989年12月第一次印刷

印数: 1—1600

ISBN 7-5618-0184-X

TU·23

定价: 4.20元

目 录

第一章 绪论	(1)
§ 1-1 结构力学的研究对象和任务	(1)
§ 1-2 结构的计算简图	(1)
§ 1-3 平面杆件结构的分类	(7)
§ 1-4 荷载及其分类	(8)
§ 1-5 结构力学的学习方法	(8)
第二章 平面体系的几何组成分析	(10)
§ 2-1 概述	(10)
§ 2-2 自由度、刚片与约束	(11)
§ 2-3 几何不变体系的基本组成规则	(13)
§ 2-4 几何组成分析的方法、步骤和举例	(16)
§ 2-5 体系的几何组成与静定性的关系	(18)
习题.....	(21)
第三章 静定梁、静定平面刚架和三铰拱的计算	(25)
§ 3-1 概述	(25)
§ 3-2 静定梁的受力分析	(26)
§ 3-3 静定平面刚架的内力计算	(43)
§ 3-4 三铰拱的内力计算	(52)
习题.....	(64)
第四章 静定桁架的计算	(73)
§ 4-1 概述	(73)
§ 4-2 静定平面桁架的计算	(75)
§ 4-3 静定组合结构的计算	(86)
• § 4-4 静定空间桁架的计算	(90)
§ 4-5 静定结构小结	(97)
习题.....	(104)
第五章 虚功原理和结构位移的计算	(110)
§ 5-1 概述	(110)
§ 5-2 虚功原理	(111)
§ 5-3 平面杆件结构位移计算的一般公式 单位荷载法	(119)
§ 5-4 静定结构在荷载作用下的位移计算	(121)
§ 5-5 图乘法	(127)
§ 5-6 静定结构由于温度改变和支座移动引起的位移	(133)
§ 5-7 线性变形体系的几个互等定理	(136)
习题.....	(139)

第六章 用力法计算超静定结构	(146)
§ 6-1 超静定结构的概念和超静定次数的确定	(146)
§ 6-2 力法原理和力法方程	(149)
§ 6-3 用力法计算超静定梁和刚架	(153)
§ 6-4 用力法计算超静定桁架和组合结构	(159)
§ 6-5 用力法计算两铰拱	(163)
§ 6-6 对称性的利用	(167)
§ 6-7 弹性中心法的概念	(173)
§ 6-8 温度变化时超静定结构的计算	(175)
§ 6-9 支座移动时超静定结构的计算	(177)
§ 6-10 有制造误差时超静定结构的计算.....	(180)
§ 6-11 超静定结构的位移计算.....	(181)
§ 6-12 超静定结构最后内力图的校核.....	(184)
习题.....	(187)
第七章 用位移法计算超静定结构	(194)
§ 7-1 位移法的基本概念	(194)
§ 7-2 等截面直杆的转角位移方程	(199)
§ 7-3 基本未知量数目的确定	(205)
§ 7-4 位移法的典型方程及计算步骤	(207)
§ 7-5 位移法应用举例	(210)
§ 7-6 建立位移法方程的另一作法——由原结构取隔离体直接建立平衡 方程	(219)
§ 7-7 对称性利用	(221)
* § 7-8 考虑刚域及剪切变形时刚架的计算	(224)
习题.....	(229)
第八章 用渐近法计算超静定梁和刚架	(233)
§ 8-1 力矩分配法的基本概念	(233)
§ 8-2 用力矩分配法计算连续梁和无结点线位移刚架	(238)
* § 8-3 无剪力分配法	(249)
* § 8-4 力法、位移法和渐近法的总结、比较.....	(253)
§ 8-5 超静定结构的特性	(255)
* § 8-6 力法、位移法及渐近法的联合应用	(256)
* § 8-7 混合法的概念	(259)
习题.....	(260)
第九章 结构在移动荷载下的计算	(265)
§ 9-1 影响线的概念	(265)
§ 9-2 静力法作简支梁、伸臂梁的影响线	(266)
§ 9-3 间接荷载作用下的影响线	(270)
§ 9-4 用机动法作单跨静定梁的影响线	(271)
§ 9-5 桁架的影响线	(275)

§ 9-6 影响线的应用	(278)
§ 9-7 简支梁的内力包络图和绝对最大弯矩	(285)
§ 9-8 用机动法作超静定梁影响线的概念	(290)
§ 9-9 连续梁的内力包络图	(293)
习题	(296)

第一章 绪 论

§ 1-1 结构力学的研究对象和任务

在土建、水利等各类工程的建筑物中，都有起支承荷载作用的骨架，我们称它为结构。结构通常是由多个构件联结而成，如屋架、塔架等；最简单的结构是单个构件，如单根梁或柱。

按照几何观点，结构可以分为杆件结构、薄壁结构和实体结构三类。杆件的几何特征在于它的长度远大于截面的宽度和高度。杆件结构便是由若干杆件所组成。薄壁结构是厚度远小于其它两个尺度的结构。实体结构是指三个尺度为同量级的结构。这类结构，通常由砖、石、混凝土等材料砌筑而成，如：挡土墙、重力坝等。

结构力学与材料力学、弹性力学有着密切的联系，它们的主要任务，都是研究结构分析中的强度、刚度和稳定问题的理论和方法，但分工不同。其中，材料力学以单个杆件为主要研究对象；弹性力学以实体和薄壁结构为主要研究对象；而结构力学则是以杆件结构为研究对象。具体说来，结构力学包括以下几方面的任务：

(1) 计算由荷载（包括静力及动力荷载）、温度变化等因素在结构各部分所产生的内力，为结构的强度计算提供依据，以保证结构满足安全和经济的要求。

(2) 计算由上述各因素所引起的变形和位移，为结构的刚度计算提供依据，以保证结构在使用过程中不致发生不能允许的过大变形。

(3) 分析、确定结构丧失稳定性的最小临界荷载，使结构物所承受的最大荷载小于该临界荷载值，以保证结构能处于稳定的平衡状态而正常工作。

(4) 研究结构的组成规律，以保证在荷载作用下结构各部分不致发生相对运动。探讨结构的合理形式，以便能有效地利用材料，充分发挥其性能。

以上几个方面均将涉及内力和位移的计算问题。因此，研究杆件结构在各种外因作用下内力和位移的计算原理和方法便成为本课程的主要内容。本书对静定和超静定结构的分析方法作了比较深入的阐述，以便读者能深刻地理解基本概念，掌握计算方法。为了适应应用电子计算机进行结构分析的需要，本书写入了结构矩阵分析的内容，并在附录 I 中编入了连续梁和刚架的源程序。

§ 1-2 结构的计算简图

在结构设计中，如果严格地考虑结构物的全部细节来进行精确的力学分析，是非常复杂的，甚至是不可能的；而从工程实际要求说来，也是不必要的。因此，为了突出问题的本质，表现结构基本的、主要的特点，在对实际结构作力学分析时，要略去一些次要因素的影响，用一个经过简化的图形——结构的力学模型代替实际结构。此种简化后的模型，即称为

结构的计算简图。

计算简图的选择应遵循下列两条原则：

(1) 正确地反映实际结构的受力情况和主要性能。

(2) 略去次要因素，便于分析和计算。

将实际结构简化成计算简图，通常包括下列几项简化工作：

(1) 结构体系的简化

严格说来，工程中的实际结构都是空间结构，否则将不可能承受来自各个方向的荷载。但是在土建、水利等工程中，大量的空间杆件结构，在一定条件下，常可分解简化为平面结构进行计算。例如图1-1所示单层厂房结构，是一个复杂的空间杆件结构。在横向，柱子和屋架组成排架(图1-2)。各排架沿纵向相隔一定距离有规律地排列着，中间有纵向构件相联系。屋面荷载和吊车轮压等主要是通过屋面板和吊车梁等传递到一个个的横向排架上。此时若略去排架间纵向联系作用这一次要因素，排架所受荷载便可看作处于自身所在平面内。这种情况下，基础反力也可简化到此平面，于是各排架便可按平面结构来分析。在本书中，主要以平面杆件结构为研究对象。

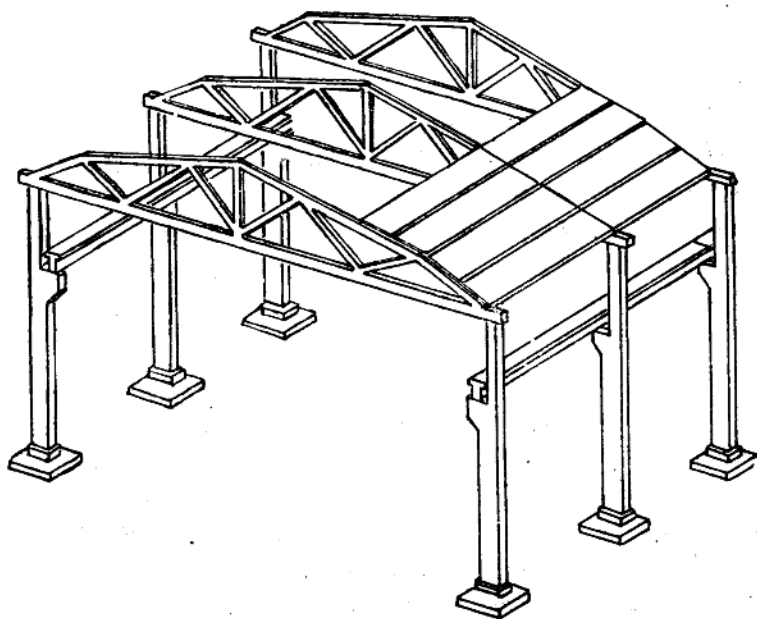


图 1-1

(2) 平面杆件结构内部的简化

杆件结构中，杆件的截面尺寸通常比杆件的长度小得多，可近似地采用平截面假定，因而截面上的应力可根据截面的内力来确定。由于内力是只沿杆长变化的一元函数，因此，在计算简图中，杆件可以用其纵轴线表示。对于由杆件相互联结而成的结构，杆件之间的联结区，用位于各杆轴线交点处的结点表示。由不同材料制做的平面杆件结构，在杆件的联结方式上各有不同做法，型式很多。根据它们的受力变形特点，在计算简图中常归纳为以下三种：

i) 刚结点

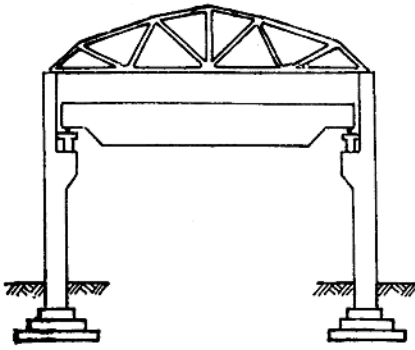


图 1-2

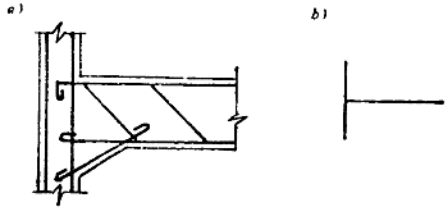


图 1-3

图1-3, a为钢筋混凝土框架中一结点的构造图, 上柱、下柱和梁用混凝土浇成一体, 钢筋的布置也使各杆端能抵抗弯矩。在计算中, 此类结点常按刚结点看待, 取如图1-3, b所示的计算简图。刚结点的特征是: 在结构变形时, 结点处各杆之间的夹角保持不变。

ii) 铰结点

铰结点的特征是各杆可以绕结点自由转动。理想的铰结点, 在实际结构中是很难实现的, 只有木屋架的结点比较接近。图1-4, a、b分别表示一个木屋架的结点和它的计算图。但当结构的几何构造及外部荷载符合一定条件时, 结点刚性对结构受力状态的影响属于次要因素, 这时为了简化和反映结构受力特点, 也将结构的结点看作铰结点。如图1-4, c表示钢桁架的一个结点, 虽然各杆件是用铆钉铆在联结板上牢固地连在一起, 但为了简化和反映结点荷载下桁架受力特点, 在计算图中也取做铰结点如图1-4, d所示。

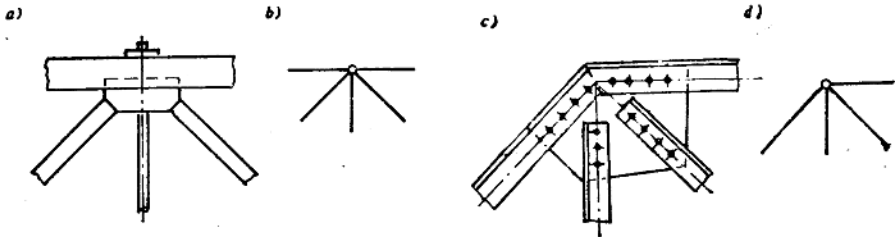


图 1-4

iii) 组合结点

若干杆件汇交于同一结点, 当内中某些杆件的联结应视为刚结, 而另一些杆件间简化为铰结符合实际时, 便形成了组合结点。图1-5为一加劲梁的计算简图, 梁两端放置于支座上(支座未画出)。当横向荷载作用于实际工程中的加劲梁时, A、B杆以受弯为主, 其它杆件主要承受轴力。为了表现这种受力特点, 结点C即取为一组合结点。

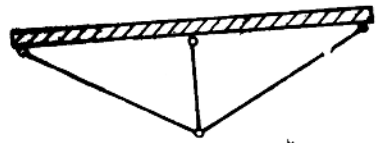


图1-5

(3) 平面杆件结构支座的简化

支座将结构与基础或其它支承物相联系, 用以固定结构位置。平面杆件结构的支座计算简图, 常用者有以下三种:

i) 铰支座

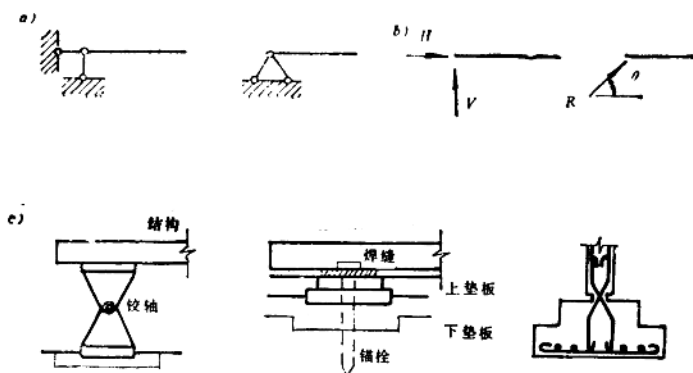


图 1-6

图1-6, c是这类支座构造的示意图, 它对结构本身有两个约束作用, 使结构只能绕铰轴转动而不能有竖向和水平向的移动。在计算简图中, 略去摩擦力的作用, 铰支座的反力便应通过铰轴的中心, 而其大小和方向均为未知。铰支座的计算简图以交于支点的两根链杆表示(图1-6, a), 此链杆称为支杆。铰支座的反力见图1-6, b, 或以反力的大小和方向(R , θ)为未知数, 或以水平及竖向两个反力分量(H , V)为未知数。在小跨度的结构中, 铰支座常采用图1-6, d所示的构造。图1-6, e表示一钢筋混凝土柱与基础连接的做法, 可认为这种构造型式只能约束移动, 不能约束转动而看作铰支座。

ii) 可动铰支座

这种支座的计算简图如图1-7, a所示, 它所代表的实际支座的构造型式示于图1-7, c, d, e中。图1-7, c中的滚轴支座是可动铰支座的典型代表, 结构可绕铰轴转动, 又可沿垫块的平面滑动。这种支座对结构只有一个约束, 即: 限制支点的竖向移动。相应地, 也就只有一个竖向分反力 R (图1-7, b)。在跨度较小的结构中, 可动铰支座多用图1-7, d, e所示构造型式。

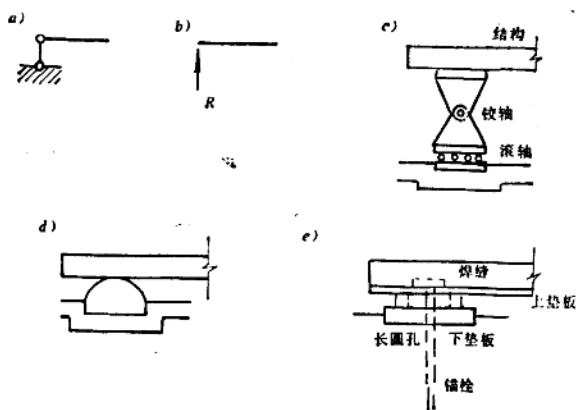


图 1-7

iii) 固定支座

图1-8, a b示固定支座的计算简图。这种支座不容许结构与它相联的截面发生转动和移动, 有三种约束作用; 相应地在支座处有三个反力分量(图1-8, c)。工程实际中, 不可

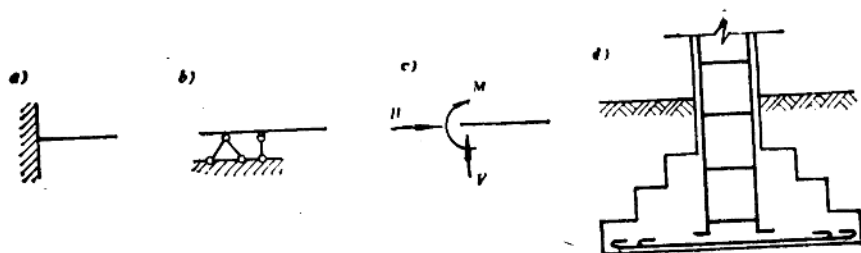


图 1-8

能有完全固定的支座；在计算中，常将某些支座构造近似地看作是固定的。如图1-8，d所示情况，当土质很硬，地基变形很小时，可以认为柱的下端为一固定端。

需要注意，上述各种支座都假定其本身变形可不予考虑，在计算简图中，支杆为刚性杆。因此，总称它们为刚性支座。如果作结构分析时，需要考虑支座（包括地基在内）本身的变形，这种支座称为弹性支座。在以后各章节中，除非特别说明，本书涉及的支座皆是刚性支座。

(4) 荷载的简化

作用于实际结构上的荷载，可分为分布于各杆件内部的体荷载（如自重）和分布于杆件表面某一范围内的面荷载（如：风压，雪重，设备重量等）两大类。在计算简图中，体荷载折算为作用于杆轴、沿杆轴方向分布的线荷载。面荷载也简化到杆轴上，并视作用范围的大小转化为集中荷载或线荷载。

下面举例说明结构计算简图的取法。

图1-9，a是在房屋建筑的楼面中经常见到的梁板结构。一单跨梁两端支承在砖墙上，梁上放预制板用以支持楼面荷载（人群、设备重量等）。荷载通过预制板传给梁，再由梁传至墙体。设计此梁时，可按上述对实际结构进行简化的各个方面来选取其计算简图。

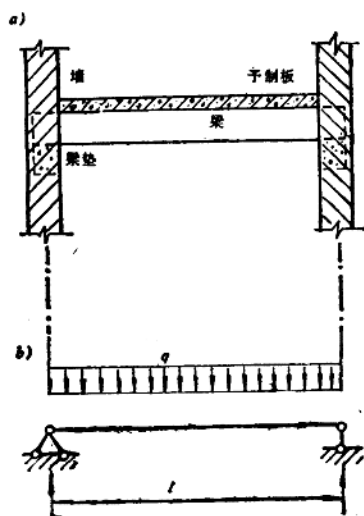


图 1-9

(1) 结构体系的简化：略去预制板对梁所起的约束作用，并将预制板传给梁的荷载和梁垫反力简化到梁轴所在的竖向平面内，各个梁即可化为平面杆件结构进行分析。

(2) 结构内部的简化：以梁的纵轴线代表实际的梁。梁与梁垫间接触面上的压力分布实际是不均匀的，当接触面的长度不大时，可取梁两端与梁垫接触面中心的间距作为梁的计算跨度 l ，图1-9，b。

(3) 支座的简化：梁的两端搁置在嵌固于墙内的梁垫上，梁既不能整体做上下或水平移动，也不能整体转动，即梁不会产生刚体运动。但梁承受荷载微弯时，梁的两端可以作微小的转动。忽略掉梁与梁垫间的摩阻力，在竖向楼面荷载作用下，梁端支承面上将只产生竖向反力。此梁两端的支承情况虽然相同，但为了反映上述支座约束作用的基本特点，可将梁的任意一端（譬如右端）简化为一可动铰支座，而另一端简化为铰支座如图1-9，b所示。

(4) 荷载的简化: 梁的自重可简化为沿梁纵轴分布的均布荷载。人群等楼面荷载一般按均布考虑, 将它与预制板、抹面等的重量合并在一起。也折算成沿梁轴分布的均布荷载。

现再以图1-1所示钢筋混凝土单层厂房结构为例。前已说明, 在屋面荷载、吊车轮压等作用下, 此空间体系可简化为一系列平面排架进行分析。以各杆轴线代表杆件, 并将屋架中各杆的联结点视为铰结点。至于屋架与柱顶的联结构造, 由于系采用预埋钢板, 在吊装就位以后再焊接在一起的方式, 屋架端部与柱顶便不能发生相对线位移, 但仍能发生微小的转动, 这样便可把柱与屋架的联结也看作铰结点。再将柱的下端简化为固定支座, 我们得到排架的计算简图如图1-10, a所示。

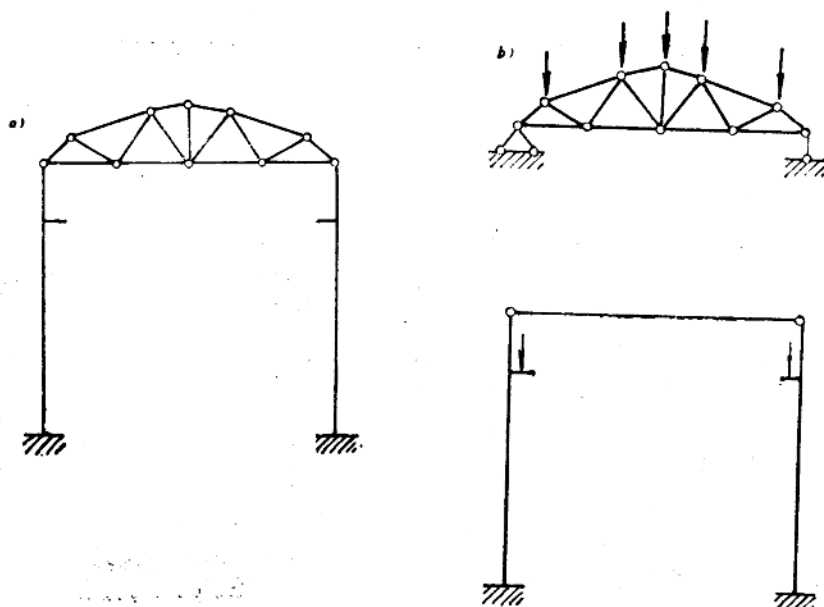


图 1-10

排架的屋顶桁架是否可单独取出计算, 取决于它与竖柱的联结构造方式和荷载情况。因屋架与柱端为铰链联结, 在竖向荷载作用下, 可认为柱端只给予屋架以竖向反力; 于是计算桁架内力时, 可单独取出, 其计算简图如图1-10, b所示, 此图中所示支座代替了柱的支承作用。当只有排架的竖柱承受荷载, 在分析竖柱内力时, 为方便计, 可以用实体杆 (常简化为不能变形的刚性杆) 代替屋顶桁架的约束作用, 得出计算简图如图1-10, c所示。

如何选取合适的计算简图, 是结构设计中十分重要而又复杂的问题, 涉及多方面的因素。有时, 对同一结构, 根据不同要求须采用不同的计算简图。在初步设计中为了估算截面, 计算简图可较简单粗略; 而在最后计算时, 则应采用较复杂、精细的计算简图。此外, 计算简图的选取尚与可供使用的计算工具有关。妥善地选取计算简图, 不仅要掌握选取的原则, 而且要有丰富的结构设计经验。要对结构构造、施工等各方面有全面的了解, 对结构各部分受力情况能正确地作出判断。所以, 除学习本课程外, 还有待于今后学习专业课和在工程实践中提高这方面的能力才能逐步解决这个问题。不过, 对于常用的结构型式, 前人已积累了许多宝贵的经验, 我们可以采用其合理性已经过实践检验的那些常用的计算简图。

§ 1-3 平面杆件结构的分类

前已说明, 结构力学研究的并不是实际的结构物, 而是代表实际结构的计算简图。在本书中, 今后即以“结构”一词, 作为“结构计算简图”的简称, 而不再加以说明。

按照不同的构造特征和受力特点, 平面杆件结构可分为下列几类:

(1) 梁: 梁是一种受弯构件, 其轴线通常为直线。它可以是单跨的 (图 1-11, a), 也可以是多跨连续的 (图 1-11, b)。

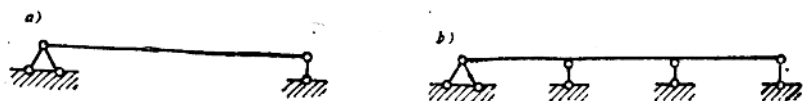


图 1-11

(2) 拱: 图 1-12 所示为拱型结构中的一种。拱的特征是: 轴线为曲线; 在竖向荷载作用下, 支座除产生竖向反力外, 还产生水平反力。就图 1-12 所示拱而言, 水平反力的存在将使其弯矩远小于与其跨度、荷载相同的图 1-11, a 中梁的弯矩。

(3) 桁架: 桁架是由若干杆件在两端用铰联结而成的结构, 图 1-13。各杆的轴线一般都是直线。在各杆轴线为直线的前提下, 当只受到作用于结点的荷载时, 各杆将只产生轴力。

(4) 刚架: 刚架是由梁和柱组成的, 其部分或全部结点为刚结点, 图 1-14。刚架中各杆件常同时承受弯矩、剪力及轴力, 但多以弯矩为主要内力。



图 1-12

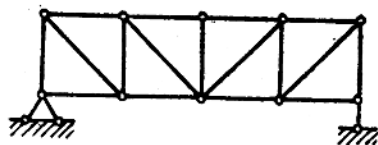


图 1-13

(5) 组合结构: 组合结构是部分由链杆, 部分由梁 (图 1-15) 或刚架组合而成的, 有些杆件只承受轴力, 而另一些杆件还同时承受弯矩和剪力。

按照所用计算方法的特点, 结构可分为静定结构和超静定结构。若一结构在承受任意荷载时, 所有支座反力和任一截面上的内力都可由静力平衡条件求出其确定值, 则此结构称为静定结构。反之, 若上述的反力和内力不能仅靠静力平衡条件来确定, 还必须考虑变形条件才能求得, 则此结构称为超静定结构。例如, 在图 1-11 中, 图 a 是静定梁, 而图 b 则是一超静定连续梁。

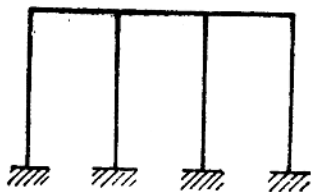


图 1-14



图 1-15

§ 1-4 荷载及其分类

荷载是作用在结构上的外力，例如，结构自重、水压力、土压力、风压力以及人群重量等等。此外，还有其它因素可以使结构产生内力和变形，如温度变化、基础沉降、材料收缩等。从广义上说，这些因素也可看做荷载。

合理地确定荷载，是结构设计中非常重要的工作。如果估计过大，所设计的结构尺寸将偏大，造成浪费；如将荷载估计过小，则所设计的结构不够安全。通常按国家颁布的有关规范来确定荷载；对于特殊的结构，必要时还要进行专门的实验和理论研究。

土建、水利等工程中的荷载，根据其不同的特征，主要有下列分类：

(1) 根据荷载分布的具体情况，荷载可分为集中荷载和分布荷载。

分布荷载是连续分布在结构上的荷载。在杆件结构中，分布荷载简化到所作用杆件的轴线处，用荷载的线分布集度（沿杆轴单位长度上的作用力）表示。当此集度为常数时，即成为均布荷载。

集中荷载是有一着力点的个别的力。事实上，绝对地集中于一几何点上的力是不存在的。当荷载的分布面积远小于结构的尺寸时，则可认为此荷载是一集中荷载。例如，吊车梁上的吊车轮压，可看作吊车梁上的集中荷载。

(2) 根据荷载作用时间的久暂，荷载可分为恒载和活载。

恒载是长期作用在结构上的不变荷载，如结构自重等。活载是建筑物在施工和使用期间可能存在的可变荷载，例如，楼面活载、吊车荷载、雪荷载及风荷载等。

活载又可分为选位活载和移动荷载。选位活载可根据计算目的决定其是否存在，并可视需要在结构上占有任意位置；但其位置一经选定，在完成该计算目的前便不再变化。例如，人群及风、雪荷载等都是选位活载。移动荷载是指荷载为一系列相互平行且间距保持不变，能在结构上移动的荷载，如，吊车梁上的吊车轮压，桥梁上的列车荷载等。

(3) 根据荷载作用的性质，荷载可分为静力荷载和动力荷载。

静力荷载是逐渐增加的荷载，其大小、方向和作用位置的变化，不致引起显著的结构振动，因而可以略去惯性力的影响。反之，若荷载的大小、方向或作用位置随时间迅速变化，由此引起的结构质量的惯性力不容忽视时，则称为动力荷载。例如，结构的自重为静力荷载；动力机械运转时产生的干扰力和地震时地震波对结构的作用等则属于动力荷载。

§ 1-5 结构力学的学习方法

结构力学是土建、水利等工程专业的一门技术基础课，有较强的理论性。通过学习结构力学，要为后继专业课打下良好的基础，为今后解决工程技术问题提供必要的基础知识和计算技能，并为进行科学研究、进一步钻研与结构力学有关的问题准备所需的理论基础。

学习结构力学：绝不能满足于知道了一些解题知识。只是记住了一些解题的方法、步骤，能照猫画虎地按例题作出习题，是远远不够的。学习时要把精力集中在培养分析问题和解决问题的能力上，要注意学会分析问题的方法。在本书中，讲述了各种的具体计算方法，要掌握它们的各自的解题思路；学习时要注意将有关各方面的问题加以对比，搞清这些方法的共性及解题思路上的特点，并注意它们各自的适用条件。只有见木见林，融会贯通，才能

灵活运用理论和方法来分析问题。

在学习中必须贯彻理论与实际相结合的原则。要注意结构力学的理论是怎样服务于工程实际的。要留心观察实际结构，了解它们的构造，分析它们的受力特点，并考虑怎样用所学的理论、方法解决其力学分析问题。只有联系实际学习理论，才能做到用所学知识去解决实际问题。

学习时要注意多练。作题练习，是学好结构力学的重要环节。要作足够数量的习题，才可能掌握其中的概念、原理和方法。但要注意以下两点：

(1) 作题前一定要看书复习，搞清概念及解题思路，抓住方法的本质、要点。按例题照搬照套，急于完成作业而不经自己的思考，不会有多少效果。

(2) 作业要条理清晰，整洁，严谨。要培养对所得计算结果进行合理校核的能力。发现错误，要及时总结，找出原因；这样才能吸取教训，逐步提高。

第二章 平面体系的几何组成分析

§ 2-1 概 述

从力学的观点看,结构的作用是承担荷载,并将荷载传给基础。结构承担荷载后,材料产生应变,因而结构发生变形,但这种变形一般是很小的。如果不考虑这种微小的变形,结构应能在荷载作用下保持自身的几何形状和位置。平面杆件结构是由杆件和杆件之间的联结装置所组成的。平面体系的几何组成分析就是要研究杆件间的联结装置应怎样布置,才能使它们组成可保持几何形状和位置的结构。图2-1, a 中的梁有一铰支座及一可动铰支座,(在计算图上共有三根链杆与基础相联),在任意荷载作用下,若不考虑梁的变形,梁上各点就不会有上下左右的移动,各截面也不会发生转动。在图2-1, b 中梁去掉了右端的可动铰支座(计算图上只有两根链杆与基础相联),因而梁可绕左端铰支座转动。在图2-1, c 中,梁与基础间有三个可动铰支座,尽管计算图上也是以三根链杆相联结,但这些链杆互相平行,因而梁在水平方向仍可发生移动。后两种情况说明体系如缺少联结装置,或联结装置布置得不合理就不能维持体系的原有位置,因而不能作为实际工程中的结构来承担荷载。



图 2-1

又如图2-2, a 所示的体系,由于缺少必要的联结装置,在任意荷载作用下,即使不考虑材料的应变,它的形状和位置也是可以改变的。如果加入一根链杆BD,如图2-2, b 所示则只要在荷载作用后材料不发生破坏,它的形状和位置是不会改变的。

总括以上分析,我们为平面杆件体系引入以下定义:

几何不变体系(如图2-1, a 和图2-2, b)——在不考虑材料的应变的假定下,能保持其几何形状和位置的体系。

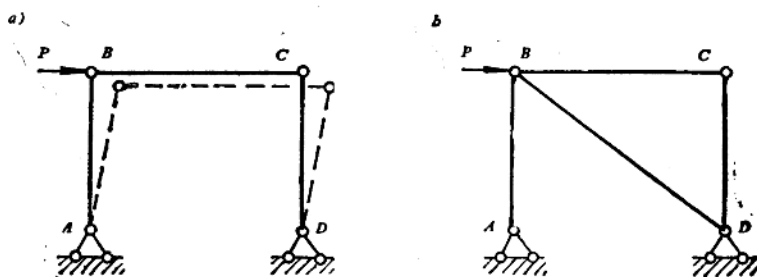


图 2-2

几何可变体系（图2-1, b、c及图2-2, a）——即使不考虑材料的应变，其形状和位置也是可以改变的体系。

几何组成分析的目的在于：

(1) 判断某一体系是否几何不变，从而确定它能否作为结构。

(2) 根据体系的几何组成，可以确定结构是静定的，还是超静定的，随之可选定相应的计算方法。

(3) 进行几何组成分析，可搞清结构各部分在几何组成上的相互关系，这常可提示我们应如何选择简便合理的计算顺序。

§ 2-2 自由度、刚片与约束

对体系进行几何组成分析时，判断一个体系是否几何不变涉及到体系运动的自由度。所谓一个体系的自由度，即是体系在所限制的许可条件下，能自由变动的、独立的运动方式。换句话说，也就是能决定体系几何位置的彼此独立的几何参变量的数目。例如，被限定在平面内运动的一个点，要确定它的位置，需要有 x 、 y 两个独立的坐标（图2-3, a），因此一个点在平面内有两个自由度。

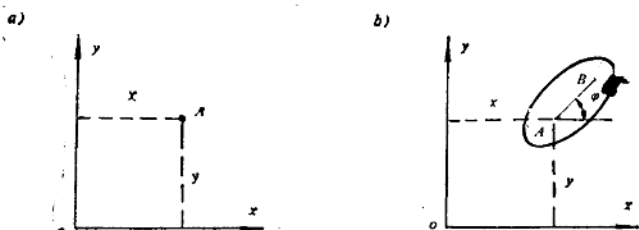


图 2-3

在几何组成分析中，由于不考虑杆件本身的变形，便可以把一根梁，或由若干杆件构成已知是几何不变的部分，看作是一个刚体。平面内的刚体称为刚片。

确定一个刚片在平面内的位置需要有三个独立的几何参变量。如图2-3, b所示，在刚片上先用 x 、 y 两个独立坐标确定 A 点的位置，然后再用倾角 φ 确定刚片上任一条线，如 AB 线的位置，这样刚片的位置便完全确定了。因此一个刚片在平面内有三个自由度。

前面提到的基础，当不考虑其本身的变形时，在平面问题中也可以看作是一个刚片。但这种刚片是不动刚片，它的自由度为零。

在刚片之间加入某些联结装置，它们的自由度将减少。减少自由度的装置称为约束。减少一个自由度的装置，称为一个约束。减少 n 个自由度的装置，称为 n 个约束。下面分析一下几种联结装置所起的约束作用。

链杆：图2-4, a 表示用一根链杆 BC 联结两个刚片 I 和 II。此种情况下，当刚片 I 的位置仍用三个独立的几何参变量予以确定后，由于链杆的作用，使刚片 II 只能沿以 B 为圆心，BC 为半径的圆弧移动和绕 C 点转动，再用两个独立的参变量 α 、 β 即可确定刚片 II 的位置。这样通过链杆的联结，总自由度由 6 减至 5，故一根链杆相当于一个约束。

单铰：图2-4, b 表示刚片 I 和刚片 II 用一个铰 B 联结。在未联结前，两个刚片在平面

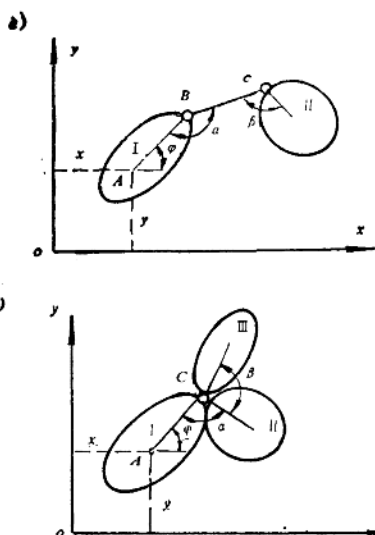


图 2-4

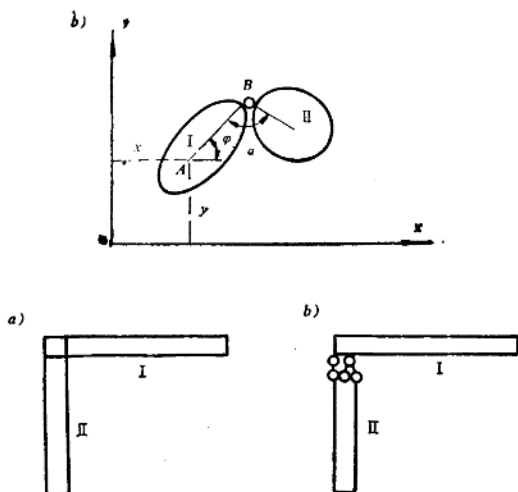


图 2-5

内共有六个自由度。用铰B联结之后，刚片I仍有三个自由度，而刚片II则只能绕铰B作相对转动。即再用一个独立的参变量 α 就可以确定刚片II的位置，所以减少了两个自由度。因此，两个刚片用一个铰联结后的自由度总数为 $6 - 2 = 4$ 。我们把联结两个刚片的铰称为单铰。它的作用相当于两个约束，或相当于两根链杆的作用。

复铰：图2-4，c表示I、II、III三个刚片用一个铰c联结。在未联结以前，三个刚片在平面内共有9个自由度。在用铰c联结之后，刚片I仍有3个自由度，而刚片II和刚片III都只能绕铰c作相对转动，即再用两个独立参变量（夹角 α 、 β ）就可确定它们的位置。因此联结三个刚片的铰c相当于 $9 - 5 = 4$ 个约束。我们把联结两个以上刚片的铰称为复铰。由上述可见，一个联结三个刚片的复铰相当于两个单铰的作用。一般情况下，如果n个刚片用一个复铰联结，则这个复铰相当于 $n-1$ 个单铰的作用。

刚性联结：所谓刚性联结如图2-5，a所示，它的作用是使两个刚片不能有相对的移动及转动，就象在两个刚片之间设置了一个链杆及一个单铰，如图2-5，b所示。因此，刚性联结相当于三个约束。

体系的计算自由度的公式：

前面已经研究了不同联结装置对体系自由度的影响。在刚片间加入约束组成体系后，此体系的计算自由度定义为：设约束不存在时各刚片自由度之和减去约束的总数所得的数值。设W为体系的计算自由度，m表示体系中的刚片数（基础不计入），n表示联结刚片的单铰数，c表示联结刚片的链杆数， c_0 表示体系与基础联结的支座链杆数，则

$$W = 3m - 2n - c - c_0 \quad (2-1)$$

前已说明可动铰支座相当于一根支座链杆，固定铰支座相当于两根支座链杆，而固定支座相当于三根支座链杆。

上述W的计算公式，是我们判断一个体系是否具有几何不变之可能性的工具。若 $W > 0$ ，即体系的约束总数小于各刚片自由时的全部自由度数；这说明，约束数量不足，不可能限制住刚片的所有运动方式，故体系必然是几何可变的。反之，对几何不变体系而言，按式

(2-1) 求计算自由度时, 必然有 $W \leq 0$ 。

例如, 图2-2, a所示体系中, 将 AB 、 BC 、 CD 三杆看作刚片, 则有: $m=3$, $n=2$, $c=0$, $c_0=4$, 故 $W=3 \times 3 - 2 \times 2 - 4 = 1$ 。与此相较, 在图2-2, b的体系中, 增加了链杆 BD , 便有 $m=3$, $n=2$, $c=1$, $c_0=4$, 故 $W=3 \times 3 - 2 \times 2 - 1 - 4 = 0$ 。

必须注意: $W \leq 0$ 只是体系为几何不变的必要条件并非充分条件, 因这只意味着, 对限制全部自由刚片的运动来说, 约束的数量恰好足够或有多余, 但约束布置不当, 体系便仍然是几何可变的, 如图2-1, c所示。为了保证体系的几何不变性, 除了用式(2-1)计算外, 尚须进行几何组成分析。

§ 2-3 几何不变体系的基本组成规则

体系的几何不变性是由体系的各刚片之间有足够的约束, 和这些约束有合理的布置来保证的。前者要求体系的计算自由度等于零或小于零, 后者要求体系的组成应符合本节所研究的基本规则。

在阐述几何不变体系的基本组成规则之前, 我们先分析一些容易作出判断的情况, 并给出几个定义。图2-6, a所示体系中 III 为一刚片, 从刚片上的 A 、 B 点出发, 用不共线的两根链杆 I 、 II 在结点 C 相联, 这样组成的体系是几何不变的。因为若设刚片 AB 不动, 考虑链杆 I 的约束作用, C 点应绕 A 点沿圆弧①运动; 考虑链杆 II 的作用, C 点又应绕 B 点沿圆弧②运动。当链杆 I 、 II 不共线时, 圆弧①、②在 C 点相交, 由于铰链的作用 C 点既不能沿圆弧①、也不能沿圆弧②运动, 也就是只能固定不动, 所以, 图2-6, a所示体系为一几何不变体系。

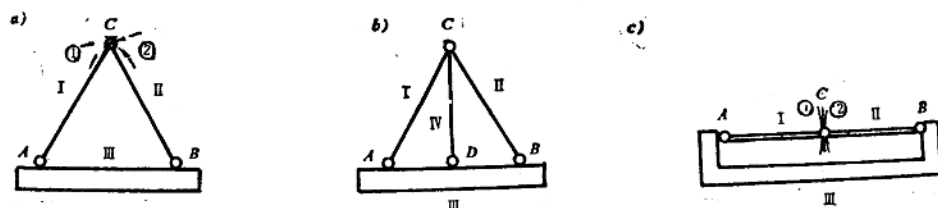


图 2-6

多余约束: 当在体系中增加一个约束并不能减少体系的自由度时, 此约束称为多余约束。图2-6, b中自同一刚片出发, 用互不共线的三根链杆 I 、 II 及 IV 联出一新结点 C , 这三根链杆中的任一根可视为多余约束。因为不论它是否存在, 并不使体系的自由度发生变化。

瞬变体系: 若图2-6, c中的链杆 I 、 II 彼此共线, ①、②两圆弧便不能相交, 而是在 C 点相切 (图2-6, c, 此时三铰 A 、 B 、 C 在一直线上)。在这种特殊情况下, 当设刚片 III 不动后, C 点可沿着公切线有无限小的运动。但这种微小的运动是瞬时的, 一旦发生微小的运动时, 三铰已不在一条直线上, 圆弧①、②不再有公切线, 故而 C 点不可能继续运动。我们把这种本来是几何可变的, 经微小的运动后成为几何不变的体系, 称为瞬变体系。

瞬变一般发生在体系的刚片间本有足够的约束, 但其布置不合理, 因而不能限制瞬时运动的情况。

下面介绍平面杆件体系的基本组成规则。这些规则分别描述一刚片与一结点之间, 两刚