高等学校试用教材

2 数学分析

北京大学数学系　沈燮昌编

高等教育出版社

高等学校试用教材

数学分析

第二册

北京大学数学系 沈燮昌编

高等教育出版社

本书是北京大学数学系同志合编《数学分析》一书的第二册(全书共三册，另有配套的习题集一册)．内容包括定积分及其应用，实数空间，广义积分，级数等共八章．本书在第一册极限论基础上，从有理数的分割法引入实数，证明实数域是一个实数空间，引入了连通性、紧性、完备性等重要概念．对于黎曼积分，给出了积分存在的另两个等价定理，和定积分的几种近似计算方法及其误差估计． 本书还介绍了多项式逼近定理的勒贝格证明．在讨论级数、广义积分的敛散性时，渗透了无穷小量阶的思想，本书例题丰富，有趣．

本书经欧阳光中副教授，董延闿教授审查，可作综合大学、师范院校数学系的试用教材或教学参考书．

高等学校试用教材

数 学 分 析

第 二 册

北京大学数学系 沈燮昌编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

上海商务印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 11.25 字数 268,000

1986年4月第1版 1986年4月第1次印刷

印数 00,001—12,400

书号 13010·01214 定价 1.90 元

序

本书是北京大学数学系沈燮昌教授，方企勤、廖可人、李正元副教授合编的“数学分析”一书中的第二册. 第一册由方企勤副教授执笔，第二册主要由沈燮昌教授执笔，第三册由廖可人、李正元副教授执笔. 全书三册由我统一看过一遍，并做了一些修改.

本册内容包括定积分，定积分的应用，实数空间，广义积分，数值级数，函数项级数，幂级数，富里埃级数共八章，其中实数空间这一章是由方企勤副教授执笔的.

正如第一册序言所说，为了使难点分散和便于理解，我们商定将极限分成两大部份来讲，在第一册中介绍了极限基础、这里，即第二册中进一步介绍实数空间；从直观的有理数的分割法开始引入实数，然后研究实数是一个有序域，进而证明它是一个实数空间. 此外还引入了连通性，紧性以及完备性等重要概念，并说明这些概念本质上用到些什么内容，这对于今后进一步学习一些抽象空间是有启发的.

对于黎曼积分，我们还是用通常直观的方法引入其定义，但是我们说明了，为了保证积分存在，就需要研究函数在每一个小的分割区间上的偏差性质. 从而引入了积分的大和、小和以及它们的下确界及上确界，而黎曼和正是位于这两者之间，因此自然地引入了上、下积分的概念. 这样一来，我们就能给出黎曼积分存在的另两个等价的定理，这给具体使用带来了较大的方便.

对于一些概念的引进，我们尽量给以直观的解释以利于读者理解这些概念. 例如在讲有理数分划能确定一个实数时，我们用形象“排队”的说法，如只要知道前面是什么人，而后面又是什么

人后就可以确定自身的位置. 对于阿贝尔变换，除了给出这个变换的分析表达式以外，还给出了对面积进行不同的分法而得到了同一个结果的解释.

在本册中还渗透了无穷小量阶的思想，这对研究级数及广义积分的收敛与发散性更能看清其本质，而且也易于判别.

此外，还给出定积分的几种近似计算方法并用简洁的方法给出了误差估计式. 考虑到目前是广泛地使用电子计算机的时代，初步了解一些计算方法以及知道误差估计的重要性，这对学生来说无疑是有好处的.

本册还给出了很多例题，由易到难，有些例子不仅是较有趣，而且也给出一些重要的结果. 这些例题可以使学生加深对理论的理解并且对如何灵活地运用所学到的理论会起重要的示范作用.

这里还介绍了两个逼近定理，过去在常见的教科书中，总是用伯恩斯坦多项式来实现多项式逼近，这个多项式对初学者来说是很难理解的. 这里介绍了多项式逼近定理的勒贝格证明，首先用折线来逼近连续函数，然后再用幂级数展开的方法来逼近折线函数. 这样的证明比较直观、易懂，且也是所学过的方法的灵活运用.

作者在书写本书过程中深深地感到，对于象这类基本内容都已经比较成熟的教科书，如何进行改革，一方面要使学生容易接受，能够通过学习掌握一些最基本的知识且在能力上有所提高，另一方面又能适当地现代化，这是一件很不容易做的事. 希望广大读者多多地提出宝贵意见.

作者感谢李正元副教授，他仔细地阅读了原稿，并提出了很多宝贵的意见. 作者也感谢欧阳光中副教授、董延闿教授仔细地审阅了原稿，并提出了很多改进意见.

沈燮昌

1985年3月于北京大学

目　录

第七章　定 积 分

在上一章中，我们讲了原函数与不定积分的概念及它们的计算方法．这是属于积分学中的第一基本问题．但是在很多实际问题中，如求一些平面图形的面积，求变速直线运动的路程，求变力所作的功，求侧压力，求质量中心，转动惯量等等．这些问题都是可以通过“和的极限”的运算来解决．人们由此概括出数学中的另一个重要概念——定积分的概念，这是积分学中的第二基本问题．初看起来，似乎这两个问题没有什么联系，一个是求原函数，另一个是求“和的极限”．历史上，开始时也确实是独立发展的，只是到了十七世纪，牛顿与莱布尼茨发现了微积分基本定理以后，才将这两个重要的概念紧密地联系在一起了．定积分的计算可以通过微积分基本定理转化为求不定积分的计算问题．反之，不定积分的存在性问题又可以通过定积分而得到解决．

这一章主要介绍定积分的概念、性质和它的计算方法，至于它在几何上及力学上的一些应用，将在下一章中再详细地加以讨论．

§1　定积分的概念

1.1　实际问题中的例

一、求曲边梯形所围成的面积

在很多实际问题中，经常需要计算平面图形的面积．如果这些图形是长方形，平行四边形，三角形，多角形等，则我们可以用初等方法来进行计算．但是，如果这个图形是以一般曲线为边界，如圆、椭圆或一般的曲边梯形等，则就不能用初等方法来解决了．

所谓"曲边梯形"是指它有三条边是直线(当然有的边也可以退化成为一个点), 其中两条边互相平行, 第三条边与前两条边垂直, 叫做底边, 第四条边是一段曲线弧, 叫做曲边, 它与任意一条垂直于底边的直线至多相交于一点(见图 7-1). 显然一般的图形可以分解为这些图形的组合. 因此我们先来计算"曲边梯形"的面积. 为了简单起见, 首先考虑一个在极限论中已出现过的简单的例.

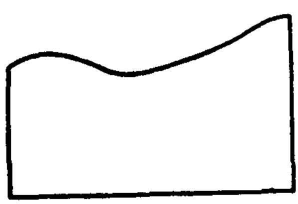

图 7-1

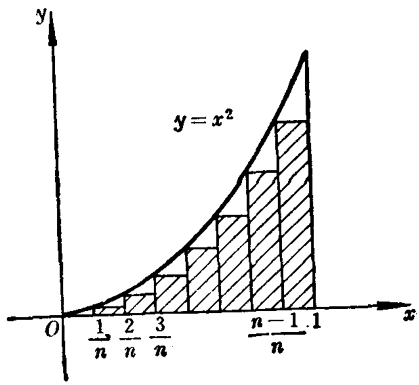

图 7-2

例 1 求由抛物线 $y=x^2$, x 轴及直线 $x=1$ 所围成的曲边三角形的面积(见图 7-2).

解 我们用分点

$$0<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\cdots\frac{n-1}{n}<1$$

将区间[0, 1]分成 n 个等长的小区间, 以每一个小区间为下底作矩形, 使矩形的左上角正好与此抛物线相交. 这样, 我们就得到 n 个矩形(见图 7-2 中阴影区域), 它们的底长都是 $\frac{1}{n}$, 而高分别是

$$0,\ \left(\frac{1}{n}\right)^2,\ \left(\frac{2}{n}\right)^2,\ \cdots,\ \left(\frac{n-1}{n}\right)^2.$$

令 S_n 表示这 n 个矩形的面积之和．另一方面，如果我们作出的矩形，其右上角正好与抛物线相交．这样，我们也得到 n 个矩形，它们的底长也都是 $\frac{1}{n}$，而高则分别是

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2,\ \left(\frac{2}{n}\right)^2,\ \cdots,\ \left(\frac{n-1}{n}\right)^2,\ 1^2.$$

令 S'_n 表示这 n 个矩形之和，如果以 S 记所作曲边三角形的面积，则显然有

$$S_n<S<S'_n.$$

在第二章§1中已知

$$\begin{aligned}S_n&=0\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n}\right)^2\frac{1}{n}+\left(\frac{2}{n}\right)^2\frac{1}{n}+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\frac{1}{n}\\&=\frac{2n^2-3n+1}{6n^2}\to\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

类似地有

$$\begin{aligned}S'_n&=\left(\frac{1}{n}\right)^2\frac{1}{n}+\left(\frac{2}{n}\right)^2\frac{1}{n}+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\frac{1}{n}+1^2\cdot\frac{1}{n}\\&=\frac{2n^2+3n+1}{6n^2}\to\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

由此可见，此曲边三角形的面积也应该是 $\frac{1}{3}$．这也可以从几何直观看出，当 n 无限增大时，n 个矩形的面积 S_n 将无限地接近曲边三角形的面积，同样 n 个矩形的面积 S'_n 也将无限地接近曲边三角形的面积．

在此求曲边三角形面积的过程中，我们看到，在每一个小区间 $\left[\frac{k-1}{n},\ \frac{k}{n}\right]$ $(1\leqslant k\leqslant n)$ 上，我们把小曲边梯形的面积，近似地看作小矩形面积（只是一个在曲边梯形的内部，一个包有曲边梯形在它本身的内部），即将每一小段曲线近似地看作直线，也就是说，在局部上，以“直”代“曲”，每一个代替所得到的面积是近似的，然后

把这些小矩形的面积加起来以后，当 $n\to+\infty$ 时，就得到了曲边三角形面积的精确值为 $\frac{1}{3}$.

下面我们讨论求一般曲边梯形面积的方法.

取一个直角坐标系，使得曲边梯形的底边与 x 轴重合，曲边梯形位于上半平面，并设曲边是连续函数 $y=f(x)$ 的图形(图 7-3). 现在用例 1 的方法求这个曲边梯形的面积.

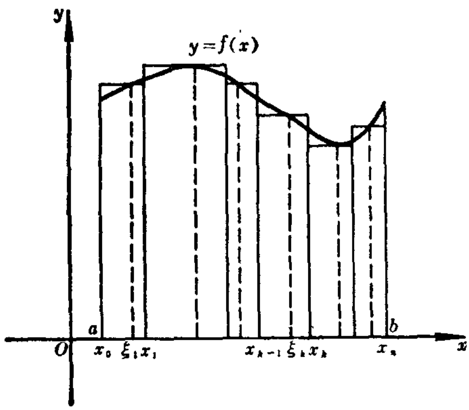

图 7-3

设曲边梯形的底边所在区间为 $[a, b]$，用分点

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

分它为 n 个小区间 $[x_{k-1}, x_k]$ $(k=1, 2, \cdots, n)$，区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 与它的长度都记作 Δx_k. 这里 Δx_k 的大小可以是任意的，一般说来，它们彼此不一定相等. 这些分点 x_k $(k=0, 1, 2, \cdots, n)$ 的全体称为区间 $[a, b]$ 的一个“分割”.

在每一个小区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 上任取一点 ξ_k $(x_{k-1}\leqslant\xi_k\leqslant x_k)$，以 $f(\xi_k)$ 为高、Δx_k 为底边的小矩形面积近似代替区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 上的小曲边梯形面积(局部上以“直”代“曲”，见图 7-3)，所有这些小矩形面积之和可以看作曲边梯形面积 A 的近似值，即

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

显然，和数 σ 依赖于区间 $[a, b]$ 的分割以及中间点 ξ_k $(k=1, 2, \cdots, n)$ 的取法. 但是，当我们把区间 $[a, b]$ 分得足够细时，不论中间点怎样取，直观地可以想象 σ 就能够任意地接近曲边梯形的

面积 A(整体上,"直"回到了"曲"). 这一事实可以用极限概念加以严格地描述. 令 λ 表一切小区间长度中最大者,即 $\lambda=\max\limits_{1<k<n}\Delta x_k$, 那末,"$\lambda\to 0$"就刻画了区间$[a, b]$无限细分的过程,而 σ 在此过程中的极限(如果存在且与区间分割及中间点 ξ_k 的取法无关的话)就叫做曲边梯形面积 A 的值,即

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k.$$

二、变力所作的功

一个物体在一个不变的力 f 是作用下作直线运动,设其位置改变为距离 s 且力的方向与位置改变的方向一致,则它作的功为

$$W=f\cdot s$$

如果物体所受的力 f 是变力,它随物体的不同位置 x 而变化,因此力是距离 x 的函数 $f(x)$. 设物体在此力作用下从点 a 到点 b 且位移方向也与力的方向一致,则如何求出其功呢?我们也可以用求曲边梯形面积的方法来解决.

用分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

将位移区间$[a, b]$分成 n 个小区间$[x_{k-1}, x_k]$, $1\leqslant k\leqslant n$, 区间$[x_{k-1}, x_k]$的长度记作 Δx_k. 可以认为力 $f(x)$是连续变化的,因此,如果 Δx_k 很小,则在这段小位移中,可以认为 $f(x)$变化不大,也就可以近似地看作不变的力. 在这段小位移$[x_{k-1}, x_k]$中,任取点 $x=\xi_k$, 我们就可以近似地认为这段位移中的力是常数 $f(\xi_k)$. 于是,物体从点 x_{k-1} 移到 x_k 时,在力 $f(x)$作用下所作的功 W_k 近似地可以看作 $f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$, 即 $W_k\approx f(\xi_k)\Delta x_k$. 这样,在力 $f(x)$作用下,从 a 到 b 所作的功 W 近似地有表示式

$$W=\sum_{k=1}^{n}W_k\approx\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k.$$

与上面一样，如果令 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\Delta x_k$，则“$\lambda\to0$”就刻画了位移区间 $[a, b]$ 无限细分的过程，在这个过程中，上式右边的极限（如果存在的话）就能够刻画从位置 a 到 b 的变化过程中，由力 $f(x)$ 所产生的功

$$W=\lim_{\lambda\to0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k.$$

1.2 定积分的概念及几何意义

上面我们讨论了两个不同的实际问题，一个是几何问题，另一个是力学问题，但是这两个问题都能用一个统一的方法来解决. 还有很多其他的实际问题，如物体在变速运动下所走的路程，物体的质量，转动惯量等问题也可以用这样的统一方法来解决. 因此，我们可以将这种方法抽象出来，就得到定积分的概念.

定义 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有定义，用分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

将区间 $[a, b]$ 分成 n 个小区间. 令 λ 表示一切小区间长度 $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}(1\leqslant k\leqslant n)$ 中的最大者，即 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\Delta x_k$. 在每一个小区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 上任取一点 ξ_k，$x_{k-1}\leqslant\xi_k\leqslant x_k$，并且作和

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k.$$

这个和数称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的**积分和**. 显然，它既依赖于区间 $[a, b]$ 的分割，又依赖于中间点 ξ_k 的取法.

如果当 $\lambda\to0$ 时，和数 σ 不管分割如何取法，也不管 ξ_k 如何取法，有共同的极限 I，即

$$\lim_{\lambda\to0}\sigma=\lim_{\lambda\to0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k=I,$$

则称极限值 I 为函数 $f(x)$ 从 a 到 b（或在区间 $[a, b]$ 上）的**定积分**，记作

$$I=\int_a^b f(x)dx,$$

其中 a 与 b 分别称为定积分的**下限**与**上限**，$f(x)$称为**被积函数**，x 称为**积分变量**.

用 ε-δ 语言来表达就是，任给 $\varepsilon>0$，存在数 $\delta>0$，不管分割如何取法，只要满足 $\lambda=\max\limits_{1\leq k\leq n}\Delta x_k<\delta$，也不管 $\xi_k\in[x_{k-1}, x_k]$如何取法，都有

$$|\sigma-I|<\varepsilon.$$

如果函数$f(x)$在区间$[a, b]$上有定积分，我们就说它在这个区间上**黎曼可积**，或简称**可积**. 显然，定积分的值与积分变量无关，它只由被积函数与积分区间决定，所以

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(y)dy\cdots.$$

这样一来，例 1 中曲边三角形的面积 S 就可以用定积分表示为

$$S=\int_0^1 x^2dx.$$

曲边梯形面积 S 也可以用定积分表示为

$$S=\int_a^b f(x)dx.$$

而变力$f(x)$在区间$[a, b]$上所作的功也可用上面的定积分来表示.

若考虑质点作直线运动，设在某段时间$[a, b]$内任意时刻 t 的速度是 $v=v(t)$，且它在区间$[a, b]$上连续，要求质点在这段时间内走过的路程 s. 我们也有

$$s=\int_a^b v(t)dt. \tag{1}$$

事实上，当质点是作等速运动时，我们有

路程＝速度×时间.

对于一般的变速运动，我们将区间$[a, b]$分成很多小区间$[t_{k-1}, t_k]$，

$1 \leqslant k \leqslant n$, 其中 $t_0 = a$, $t_n = b$, 区间$[t_{k-1}, t_k]$的长记作 Δt_k. 我们认为 Δt_k 很小, 则速度 $v = v(t)$在这个区间上变化不大, 可以近似地看成匀速, 所以就可以在小区间 $[t_{k-1}, t_k]$上任取一时刻 $t = \xi_k$ 时的速度 $v = v(\xi_k)$来近似代替质点在$[t_{k-1}, t_k]$上的速度. 于是质点从 $t = t_{k-1}$ 到 t_k 的路程的值 Δs_k 近似地为 $v(\xi_k)\Delta t_k$, 而全部路程 s 就近似地表为

$$s = \sigma = \sum_{k=1}^{n} v(\xi_k)\Delta t_k.$$

和上面一样, 设 $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta t_k$, 令 $\lambda \to 0$, 如果这个和的极限存在, 则从上式就得到了路程 s 的精确值. 从定积分的定义来看, 这个路程 s 就有表示式(1).

总结上述过程, 共分为四步: 分割, 代替, 求和, 取极限. 通过这四步就可以用已知的量来计算出求和的量.

我们指出, 从概念上来看, 写出定积分必须完成这四个步骤, 但是在具体求定积分值时, 并不是每次一定要计算这个和的极限. 我们将要研究定积分的性质, 发展一些方法, 使得利用这些方法可以比较容易地计算出定积分的值.

这里我们再介绍一下定积分的几何意义.

在上一段中, 我们知道由连续曲线 $y = f(x)$ ($f(x) \geqslant 0$)在区间$[a, b]$上形成的曲边梯形面积是和式的极限:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

这种和式的极限又叫做定积分:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

所以当 $f(x)$连续, 且 $f(x) \geqslant 0$ 时, 定积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 在几何上代表由曲线 $y = f(x)$、直线 $x = a$、$x = b$ 及 x 轴所围成曲边梯形的面积

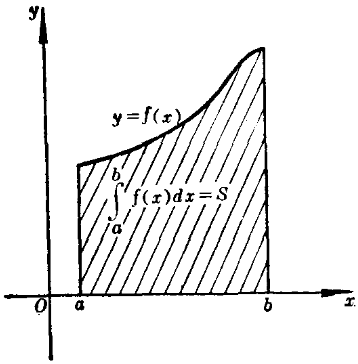

图 7-4

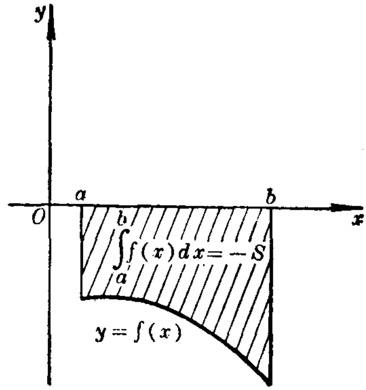

图 7-5

S(图 7-4).

当 $f(x)$ 连续, 且 $f(x)\leqslant 0$ 时, 我们有

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k=-\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}|f(\xi_k)|\Delta x_k,$$

而上式的右边代表曲线 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上曲边梯形面积的负值. 因此, 这时定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 在几何上代表曲边梯形面积 S 的负值(图 7-5).

对于一般的有正有负的连续函数 $y=f(x)$, 容易知道, 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 在几何上表示: 由曲线 $y=f(x)$, 直线 $x=a$、$x=b$ 及 x 轴所围成的几块曲边梯形中, 在 x 轴上方各图形面积之和, 减去在 x 轴下方各图形面积之和. 例如对于图 7-6 所表示的函数 $f(x)$, 就有

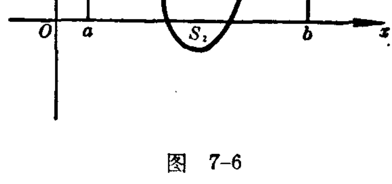

图 7-6

$$\int_a^b f(x)dx=S_1-S_2+S_3.$$

§2 牛顿-莱布尼茨公式

上面已经给出了定积分的定义．此外，我们也知道很多具体问题都可以化为定积分的问题来进行计算．现在的问题是如何具体算出定积分的值呢？到目前为止，我们只知道利用定积分的定义通过求和的极限来进行计算．显然用这样的方法来进行计算是很复杂的，甚至很困难的，因此还需要研究出一个统一有效的方法．下面介绍的牛顿-莱布尼茨公式就能提供出这样一种方法，不仅如此，它还把积分学中的两个基本问题统一起来了，因此，它不论在理论上，还是在实际上都有很大的意义．

为了说明这个重要的公式，我们首先从实际问题开始研究．已知物体作直线运动，其速度为 $v(t)$，设它在区间 $[a, b]$ 上连续，则它从时间 a 到时间 b 所走过的路程为

$$s=\int_a^b v(t)dt.$$

另一方面，设物体从某个时刻算起到时间 t 所走过的路程记作 $s(t)$，已知 $s'(t)=v(t)$．若已知 $v(t)$，要求 $s(t)$，我们知道这可以用不定积分表示为

$$s(t)=\int v(t)dt+C.$$

若已知 $s(t)$，则显然有

$$\int_a^b v(t)dt=s(b)-s(a).$$

因此求定积分的值就归结到求一个函数 $v(t)$ 的原函数（或不定积分）$s(t)$ 的问题．这就是牛顿-莱布尼茨公式的主要思想，它首先是被牛顿和莱布尼茨所发现的．

定理 1 设 $f(x)\in C[a, b]$，又设 $F(x)\in C[a, b]$，并且在 (a, b) 上 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，即