经济管理类专业教学参考书

管理数学

上 册

顾士俊 编

经济管理类专业教学参考书

管理数学

上 册

顾士俊 编

前　　言

管理数学是研究现代管理的基础，它以数学方法来解决生产与经营管理中的理论和实际问题，从而取得较好的经济效果。目前，国内外管理科学中所接触到的数学方法很多，范围极为广泛。本书仅包括管理中常用的一些数学方法，如线性规划的应用，工件加工顺序的安排，对策论基础，图论基本知识，网络技术的应用，预测方法，决策技术，排队论，动态规划与马尔柯夫过程的基本概念等。

本书在1982年版的基础上进行了修改和补充，各章列举了大量例题并附有一定数量的习题，在叙述和阐明各种数量方法在管理中的具体应用过程时，均力求有系统、做到层次分明、通俗易懂、深入浅出，使具有一定数学基础的各类管理人员和技术人员能顺利自学，也可作为干部学习班和管理工程专业类教材以及供有关教师参考。由于编者水平有限，书中缺点错误在所难免，敬请广大读者批评指正。

本书在编写过程中承蒙有关同志提出补充和修改意见，并由祝平安同志承担本书的全部审校工作，武汉电工理论学会、武汉工学院电子工程系及管理工程系的同志在此书的发行过程中，给予了大力的支持，在此一并表示感谢。

编者　1984.10

目　　录

第一章　数学预备知识简介

这一章主要介绍在以后章节中常用到的一些数学概念，掌握这些基本概念，对了解以后章节的原理和求解是有益处的。

§1—1　矩阵的概念

一、矩阵的定义：

矩阵可定义为：有m　n个数a_{ij}（$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$）排成m行n列的表。

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

叫做$m\times n$矩阵，或者简单地叫矩阵。并有时简记为（a_{ij}）。a_{ij}中的第一个下标表示行数，第二个下标表示列数，则a_{ij}叫做A中第i行第j列的数或元。矩阵相等的意思是它们相对应元素相等。

当只有一行或一列的矩阵，称做向量。

由$m\times n$矩阵中某行的n个元组成的n维向量叫做A的行向量，由A中某列的m个元组成的m维向量叫做A的列向量。因此，矩阵A有m个行向量，n个列向量。

一般行向量横写，列向量竖写。

A的第i个行向量写成：

$$(a_{i1} \quad a_{i2} \cdots\cdots a_{in})$$

A的第j个列向量写成：

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

二、平方矩阵

矩阵A中的行数m，列数n不必相等。如果矩阵A中的行数m与列数n相等，即$m=n$时，称$n\times n$矩阵，亦称n阶矩阵。

三、对角矩阵

主对角线上的元素为a_{ii}，（$i=1, 2, \cdots\cdots n$）。其他位置上的元素全为0的n阶矩阵，并写为：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ & & \ddots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

四、单位矩阵（或恒等矩阵）

主对角线上的元素为单位1，他其位置的元素为0的平方矩阵叫单位（或者恒等）矩阵。

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

单位矩阵是由对所有的某阶方阵A由关系式$EA=AE=A$所给定的。就是说E在n阶矩阵乘法运算中的作用与数1在数的乘法中的作用类似。因此称E为n阶单位矩阵，或简称单位矩阵。

五、矩阵的转置

一个$m\times n$矩阵A的行和列互换，就导致一个$n\times m$的矩阵A^T，称A的转置。

如果A是给出为：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

那么，A^T给出为：

$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21}\cdots a_{m1} \\ a_{12} & a_{22}\cdots a_{m2} \\ \vdots & \vdots \quad\ \ \vdots \\ a_{1n} & a_{2n}\cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

显然有

$$(A^T)^T=A$$

§2—2 矩阵的运算法则

一、矩阵的和

两个$m\times n$矩阵A，B的和是一矩阵，它的每一元是A，B两矩阵相应元的和。

$$A=\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} \end{Bmatrix} \qquad B=\begin{Bmatrix} b_{11} & b_{12}\cdots b_{2n} \\ b_{21} & b_{22}\cdots b_{2n} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} \quad b_{mn} \end{Bmatrix}$$

即

$$A+B=\begin{Bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12}\cdots a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22}\cdots a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2}\cdots a_{mn}+b_{mn} \end{Bmatrix}$$

二、矩阵的差

两个$m\times n$矩阵A，B的差是一矩阵，它的每一元是A，B两矩阵相应元的差。

$$A=\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} \end{Bmatrix} \qquad B=\begin{Bmatrix} b_{11} & b_{12}\cdots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22}\cdots b_{2n} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ b_{m1} & b_{m2}\cdots b_{mn} \end{Bmatrix}$$

即

$$A-B=\begin{Bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12}\cdots a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22}\cdots a_{2n}-b_{2n} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2}\cdots a_{mn}-b_{mn} \end{Bmatrix}$$

矩阵的差仅对A，B的行列数m，n相等时才能定义。

三、矩阵与纯量的积

一矩阵A同纯量K的积是一矩阵，其中每一元乘以纯量K，即

$$KA = AK = \begin{pmatrix} Ka_{11} & Ka_{12}\cdots Ka_{1n} \\ Ka_{21} & Ka_{22}\cdots Ka_{2n} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ Ka_{m1} & Ka_{m2}\cdots Ka_{mn} \end{pmatrix}$$

四、矩阵与矩阵的积

一个矩阵乘另一个矩阵的积，在二矩阵中的第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时是可能的。在相反的情况下，乘积则不能定义。

A，B 两矩阵的积 AB 是一矩阵，它是这样定义的。它的第i行，第j列上的元素是A的第i行上各元素分别与 B 的第j列上各对应元素的乘积的和。

如

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},\quad B = (b_1 \quad b_2\cdots b_n)$$

即

$$AB = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot (b_1 \quad b_2\cdots b_n) = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2\cdots a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2\cdots a_2b_n \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2\cdots a_nb_n \end{pmatrix}$$

$$BA = (b_1b_2\cdots b_n)\cdot\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (b_1a_1 + b_2a_2 + \cdots + b_na_n$$

如

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

即

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}b_1+\cdots+a_{1n}b_n \\ a_{21}b_1+\cdots+a_{2n}b_n \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}b_1+\cdots+a_{mn}b_n \end{pmatrix}$$

如

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} \end{pmatrix},\quad B=(b_1 \quad b_2\cdots b_m)$$

即

$$BA=(b_1 \quad b_2\cdots b_m)\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$=(b_1a_{11}+\cdots+b_ma_{m1}\cdots b_1a_{1n}+\cdots b_ma_{mn})$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

一般两个矩阵A，B的乘积用式子表示：

定义两个矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1L} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2L} \\ \vdots & \vdots \quad\ \vdots \\ a_{L1} & a_{m2}\cdots a_{mL} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\cdots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22}\cdots b_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad\ \vdots \\ b_{L1} & b_{L2}\cdots b_{Ln} \end{pmatrix}$$

的乘积

$$AB=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12}\cdots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}\cdots c_{2n} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ c_{m1} & c_{m2}\cdots c_{mn} \end{pmatrix}$$

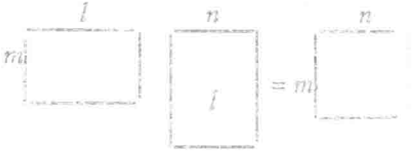
其中：$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+\cdots+a_{jL}b_{Lj}=\sum\limits_{t=1}^{L}a_{it}b_{tj}$

$$\begin{array}{c} \\ i \end{array}\begin{pmatrix} \\ a_{i1}\cdots a_{iL} \\ \\ \end{pmatrix}\begin{array}{c} j \\ \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{Lj} \end{pmatrix} \end{array}=\begin{array}{c} j \\ \begin{pmatrix} \vdots \\ \cdots c_{ij}\cdots \\ \vdots \end{pmatrix} \end{array} i$$

两个矩阵的乘积的行数，列数间的关系是

$$(m,\ l)\cdot(l,\ n)=(m,\ n)$$

用图式表示就是



五、矩阵的初等变换

矩阵的初等变换非常重要，应用也十分广泛，应用它可以用来简化矩阵的计算。一般对一个矩阵除可以进行行的初等变换外，同时还可以进行列的初等变换，把行初等变换及列初等变换统称为矩阵的初等变换。

矩阵的初等变换是指：

（1）互换矩阵 A 的两行或两列；

（2）用一个不为零的数乘 A 的一行或一列；

（3）用一个数乘一行加到另一行上或乘一列加到另一列上。

矩阵行（列）初等变换的一个重要性质：

假如矩阵A经过若干个行、列初等变换，变换为矩阵B，那么矩阵A，B，秩相等，也就是说A与B等价（同解的意思），用$A\cong B$表示。

六、矩阵的秩

矩阵秩的定义：矩阵A中不为零的子式的最高阶数如果是r，那么就说A的秩是r。n阶矩阵如果它的秩是n，叫做满秩矩阵，否则就叫做降秩矩阵。

矩阵A中的子式，是指在$m\times n$矩阵中取某k个行，k个列（$k\leqslant m$，n），由这些行、列相交处的元构成的k阶行列式，叫做A的k阶子式。特别n阶矩阵只有一个n阶子式，这子式又常常叫做矩阵的行列式。矩阵A的行列式用$|A|$表示。

例如矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 5 \\ 1 & 10 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

在矩阵A中，1阶子式是其中一个元构成的，因此共有12个1阶子式。

矩阵A中，2阶子式是由其中四个元构成的，共有18个2阶子式，它们是：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}\quad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}\quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}\quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}\quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 10 \end{vmatrix}\quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\quad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 1 \end{vmatrix}\quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 10 & 2 \end{vmatrix}\quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

任取一个 2 阶子式D_2

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4 \neq 0$$

矩阵A中，3 阶子式是由其中九个元构成，共有 4 个 3 阶子式，它们是：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 10 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & 10 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \\ 10 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

但包含 2 阶子式D_2的只有二个。

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & 10 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

所以矩阵A的秩是 2 。

七、逆矩阵

假设A为一n阶方阵，且$|A| \neq O$，则A的逆方阵A^{-1}定义为

$$A^{-1} = \frac{1}{|1|} A^*$$

式中A^*是矩阵A的伴随矩阵，其公式为

$$A^* = \begin{Bmatrix} A_{11} & A_{21} \cdots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \cdots A_{n2} \\ \vdots & \\ A_{1n} & A_{2n} \cdots A_{nn} \end{Bmatrix}$$

这里A_{ij}是$|A|$中元素a_{ij}的代数余子式。所谓代数余子式是指在行列式A中，划去a_{ij}所在行和列元素，余下的元素构成的行列式叫做元素a_{ij}的余子式，记作M_{ij}。把$(-1)^{i+j}M_{ij}$叫做a_{ij}的代数余子式，记作A_{ij}。

例如有三行三列行列式为

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

元素a_{11}的代数余子式为

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

元素a_{12}的代数余子式为

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

元素a_{13}的代数余子式为

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

元素a_{21}的代数余子式为

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

用类的方法可求得其他元素a_{ij}的代数余子式A_{ij}。

求下列矩阵A的逆矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

解 先求矩阵A的伴随矩阵A^*，为此需求元素a_{ij}（$i=1$，2，3；$j=1$，2，3，）的代数余子式。其余子式为

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3\times1-1\times0=3$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-(1\times1-2\times0)=-1$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1\times1-2\times3=-5$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-(1\times1-1\times0)=-1$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=2\times1-2\times0=2$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-(2\times1-2\times1)=0$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & 0\end{vmatrix}=1\times0-3\times0=0$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-(2\times0-1\times0)=0$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=2\times3-1\times1=5$$

于是求得矩阵A的伴随矩阵为

$$A^*=\begin{Bmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}3 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ -5 & 0 & 5\end{Bmatrix}$$