SX

九年义务教育

XINBIAN CHUZHONG SHUXUE
ZHONGNANDIAN SHOUCE

新编初中数学
重难点手册

供初三年级用

汪江松 主编

教育部直属师范大学
华中师范大学出版社

九年义务教育

新编初中数学重难点手册

供初三年级用

汪江松 主编

汪江松 汪运生
高慧明 周以宏 编著

教育部直属师范大学
华中师范大学出版社

1998年·武汉

（鄂）新登字 11 号

图书在版编目（CIP）数据

新编初中数学重难点手册/汪江松主编．—3 版．
—武汉：华中师范大学出版社，1998．9．
供初三年级用
ISBN 7-5622-1871-4/G·890

Ⅰ．新…　Ⅱ．汪…　Ⅲ．数学课—初中—教学参考资料
Ⅳ．G633．604

中国版本图书馆 CIP 数据核字（98）第 08886 号

九年义务教育
新编初中数学重难点手册
（供初三年级用）
© 汪江松　主编

华中师范大学出版社出版发行
（武昌桂子山　邮编：430079　电话：027-87876240）
新华书店湖北发行所经销　　武汉市新华印刷厂印刷

责任编辑：刘元利　严定友　　封面设计：甘　英　罗明波
责任校对：罗少琳　　督　　印：朱　虹

开本：850 mm×1168 mm　1/32　　印张：7．75　字数：237 千字
版次：1998 年 7 月第 3 版　　1998 年 9 月第 3 次印刷
印数：40 201—60 300　　定价：7．70 元

新编初中数学重难点手册

供初一年级用
供初二年级用
供初三年级用

新编初中物理重难点手册

供初二年级用
供初三年级用

新编初中化学重难点手册

供初三年级用

新编初中语文重难点手册

供初一年级用
供初二年级用
供初三年级用

新编初中英语重难点手册

供初一年级用
供初二年级用
供初三年级用

前　言

本书自出版以来，深受读者的欢迎，认为本书对中学生在学习过程中明确各章节的学习目标，理解和攻克重点、难点和疑点，掌握各类题型的解题方法和技能技巧，提高数学思维能力和解决问题的能力，都很有帮助。这次重新编写除保留原版的特色外，又增辟了“释疑解难”这一专栏，以帮助读者理解和突破教材中的难点。同时更换了大部分例题、习题，特意从近几年全国各地的中考题中筛选了不少有代表性和典型性的试题作为习题，使本书更体现其新颖性、针对性和可读性。

本书按现行九年义务教育三年制初中数学教材系统编写，符合最新教学大纲要求，贯彻了教育部关于“教、学、考”的最新文件精神。各章分别按“学习目标”、“重点、难点与关键”、“释疑解难”、“技能技巧”、“例题剖析”、“反馈练习”、“单元反馈练习”等框架进行编写。其中“技能技巧”、“例题剖析”围绕本章节的重难点进行展开，指出其重要的解题方法和技能技巧。通过对典型例题的解答和剖析，揭示思维过程，点明所具规律，以期启迪读者的思维，提高他们分析问题和解决问题的能力。

考虑到各种层次读者不同的需要，节末的“反馈练习”和章末的“单元反馈练习”分别配备有 A、B 两组。A 组题主要立足于夯实基础，其标高一般不超过中考题中的中档题。B 组题虽多选择于各类竞赛试题，但难度也不太大，配置于此，旨在开阔视野，训练思维，培养能力。

全书的选择题均有四个选择项，其中只有一个正确，行文中不

再另作说明。

本书由汪江松、汪运生、高慧明、周以宏老师完成，全书由汪江松策划和定稿。本书难免存在不足和疏漏之处，恳请读者和同行指正。

汪江松

1998年6月于武昌

目　　录

代　　数

几　何

代 数

第十二章 一元二次方程

本章的主要内容是一元二次方程的解法，一元二次方程的根的判别式、根与系数的关系，以及与可化为一元二次方程的方程（无理方程、分式方程）的解法，简单的二元二次方程组的解法，列方程或方程组解应用题.

本章是中学数学的主要内容之一，在初中代数中占有很重要的地位.通过本章的学习，对以前学过的知识（实数与代数式的运算、一元一次方程和一元一次方程组）能得到进一步的巩固，也是以后学习其他内容（不等式、二次函数及高中数学的有关内容等）的基础.

12.1 一元二次方程及其解法

学习目标

理解一元二次方程的概念，能正确判别一元二次方程一般表达式的二次项系数、一次项系数、常数项；能熟练掌握用直接开平方法、配方法、求根公式法、因式分解法解一元二次方程.

重点、难点与关键

重点：一元二次方程的解法，特别是公式法.

难点：用配方法解一元二次方程.

关键：掌握一元二次方程的求根公式.

释疑解难

注意一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的隐含条件：$a\neq0$. 必要时应注意进行分类讨论.

当指出 $ax^2+bx+c=0$ 为一元二次方程(或有两实数根)时，就隐含有前提条件 $a\neq0$，这在解题时应特别注意.

例 若关于 x 的方程 $(m^2-1)x^2+2(m+1)x+1=0$ 有两个不相等的实数根，求 m 的取值范围.

解 因为方程有两个不相等的实数根，则

$$\Delta=4(m+1)^2-4(m^2-1)=4\cdot2(m+1)>0,$$

得 $m>-1$.

又 $m^2-1\neq0$，$\therefore$ $m\neq\pm1$.

故 m 的取值范围是 $m>-1$ 且 $m\neq1$.

技能技巧

如何选择一元二次方程的最优解法呢？解一元二次方程有直接开平方法、配方法、求根公式法和因式分解法四种，它们各有特色，选择哪种解法最简便要依据具体的情况来决定. 其思维程序一般为：

首先整理一元二次方程为一般形式，然后根据其系数特点，决定其解法：

(1) 能够迅速分解因式的用因式分解法(特别是十字相乘法较简便)，否则应用求根公式法为宜，而配方法解题过程较繁.

(2) 若有下列情况，可按如下方法求解：

① 对缺一次项的一元二次方程如 $ax^2=k$[包括 $a(x+p)^2=k$]

型、若 a、k 同号,应直接用开平方法求解;若 a、k 异号,可直接判定其无解.

② 若 $ax^2+bx+c=0$ 中 $a=1$ 及 b 为偶数,且 b,c 中有较大数字者,不便因式分解,可用配方法化为 $(x+p)^2=k$ 的形式,用配方法解.

例 解方程 $x^2+4x-221=0$.

解 原方程变形为 $x^2+4x=221$,

配方得 $(x+2)^2=225$,

解得 $x+2=\pm 15$,

$\therefore\ x_1=13,\quad x_2=-17$.

例题剖析

例 1 用适当的方法解下列一元二次方程

(1) $(2x-3)^2=5$; (2) $3x^2+7=0$;

(3) $4(x+2)^2=0$; (4) $3x^2-2x=0$;

(5) $x^2+2x-99=0$; (6) $x^2+x-3=0$.

解 (1) $2x-3=\pm\sqrt{5}$, $x=\dfrac{3}{2}\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$,

$\therefore\ x_1=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{2}, x_2=\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

(2) 移项得 $3x^2=-7$,

$\therefore$ 方程无实数根.

(3) $(x+2)^2=0, x+2=0$.

$\therefore\ x=-2$,即 $x_1=x_2=-2$.

(4) 将原方程左边分解因式,得 $x(3x-2)=0$. (理解什么叫因式分解)

$\therefore\ x_1=0,\quad x_2=\dfrac{2}{3}$.

(5) 移项得 $x^2+2x=99$. $(x+1)^2=100$,

$\therefore\ x=-1\pm 10$.

$\therefore\ x_1=9,\quad x_2=-11$.

(6) 直接用公式法得 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+12}}{2}$.

$\therefore \quad x_1=\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}, \quad x_2=-\dfrac{\sqrt{13}+1}{2}$.

剖析 虽然任何一元二次方程均可用公式法求解,但根据方程的具体特征,选择适当的方法求解,常能提高解题速度.

例 2 解方程

$$(x+5)^2+(2x-1)^2=(x+5)(2x-1)+67.$$

解 先将原方程化简

$$x^2+10x+25+4x^2-4x+1=2x^2+9x-5+67.$$

整理得 $x^2-x-12=0$.

用因式分解法,得 $(x-4)(x+3)=0$.

$\therefore \quad x_1=4, \quad x_2=-3$.

剖析 先将所给方程整理成一元二次方程的一般形式,然后视其系数特点选择适当的解法.

例 3 解方程 $(x-2)^2+13(x-2)-68=0$.

解 视 $(x-2)$ 为一未知数,将方程左边分解因式,得

$$(x-2+17)(x-2-4)=0,(x+15)(x-6)=0.$$

$\therefore \quad x_1=-15, \quad x_2=6$.

剖析 某些形式较复杂且结构特殊的方程可用换元法解,常可化繁为简.

例 4 已知 a 是方程 $x^2-3x+1=0$ 的根,试求 $\dfrac{a^3-2a^2-5a+1}{a^2+1}$ 的值.

解 $\because$ a 是方程 $x^2-3x+1=0$ 的根,

$\therefore$ $a^2-3a+1=0$, 即有 $a^2+1=3a$.

由多项式的除法知

$$a^3-2a^2-5a+1=(a+1)(a^2-3a+1)-3a$$
$$=(a+1)\cdot 0-(a^2+1).$$

$\therefore$ $\dfrac{a^3-2a^2-5a+1}{a^2+1}=\dfrac{-(a^2+1)}{a^2+1}=-1$.

a+1

a^2-3a+1 $\overline{)a^3-2a^2-5a+1}$

-3a

剖析　这里运用了根的定义解题. 由定义可知，若 x_0 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根，则 $ax_0^2+bx_0+c=0$，并且注意这一结果的各种变化形式，如 $ax_0^2=-(bx_0+c)$、$ax_0^2+bx_0=-c$、$ax_0^2+c=-bx_0$ 等.

反馈练习 12.1

A　组

1. 判断题(对的打"√"，错的打"×").

(1) 一元二次方程 $3x^2=5x+2$ 的二次项系数为 3，一次项系数为 5. (×)

(2) 方程 $ax^2+bx+c=0$ 是关于 x 的一元二次方程. (×)

(3) 若一元二次方程的常数项为零，则 0 必为它的一个根. (×)

(4) 当一次项系数为零时，一元二次方程总有非零解. (×)

(5) 方程 $x^2-4x-3=0$ 经配方可变形为 $(x-2)^2=7$. (√)

(6) 方程 $(2x+1)(|x|+1)=0$ 的实数根是 $x=-\frac{1}{2}$. (√)

(7) 方程 $px^2-2x+4=0$ 的求根公式是 $x=\frac{1\pm\sqrt{1-4p}}{p}$. (×)

(8) 解方程 $(3y+2)^2=4(y-3)^2$ 时，只要将两边开平方，方程就变形为 $3y+2=2(y-3)$，从而可得 $y=-8$. (×)

$x=\frac{2\pm\sqrt{4-4p\cdot4}}{2p}$

2. 填空题.

(1) 若代数式 $x(x+6)$ 的值为零，则 x 的值是 $x=-6$ 或 $x=0$. (天津市中考题)

(2) 当 $a=$ $-\frac{16}{25}$ 时，方程 $ax^2-3x+1=0$ 有一个根为 -5.

(3) 如果方程 $x^2+(k-1)x-3=0$ 的一个根是 1，那么 k 的值是 4. (河南省中考题)

$1+(k-1)-3=0$　$k=3$

(4) 当 m ≤ 0 时，方程 $(x-p)^2+m=0$ 有解，其解为 $x=$ $p\pm\sqrt{-m}$.

(5) 当 $a=$ $\pm\sqrt{5}$ 时，x^2+4x+a^2-1 是一个完全平方式.

(6) 若关于 x 的方程 $2x^2-mx+m-1=0$ 有一个根是零，则另一根为 $x=\frac{1}{2}$. (山西省中考题)

(7) x^2+px+ $\frac{p^2}{4}$ $=(x+$ $\frac{p}{2}$ $)^2$.

$\cancel{x=0\ x=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}}$

(8) 方程 $x^2+(\sqrt{5}-\sqrt{3})x-\sqrt{15}=0$ 用因式分解法求解可得其根为 $(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{3})$

$x=-\sqrt{5}$

(9) 方程 $4x^2+4ax+a^2-b^2=0$ 的实根为 $-\frac{a}{2}$.

$\frac{-a\pm b}{2}$

(4) $x^2-2px+p^2+m=0$.　5　$x=\sqrt{3}$

(10) 若$(u^2+v^2)(1-u^2-v^2)+6=0$,则 $u^2+v^2=$ 3 .

3. 选择题.

(1) 下列方程:$xy+x=1$, $\sqrt{x^2-1}=2$, $\frac{1}{t}+t^2=1$, $x^2-x+2=0$. 其中是一元二次方程的共有(~~D~~ B).

(A) 0 个 (B) 1 个 (C) 2 个 (D) 3 个

(2) 若关于 x 的方程 $x^2-mx+2=0$ 与 $x^2-(m+1)x+m=0$ 有一个相同的实根,则 m 的值为( ). (山东省中考题)

(A) 3 (B) 2 (C) 4 (D) -3

(3) 如果方程 $x^2+px+q=0$ 中有一根是零,另一根非零,则 p、q 的值是( ).

(A) $p=0,q=0$ (B) $p=0,q\neq0$ (C) $p\neq0,q=0$ (D) $pq=0$

(4) 用配方法解方程 $x^2-\frac{2}{3}x+1=0$,正确的解法是( ).

(A) $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}, x=\frac{1}{3}\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$ $x^2-2\cdot\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}+\frac{8}{9}=0$

(B) $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2=-\frac{8}{9}$,原方程无实数根 $(x-\frac{1}{3})^2=-\frac{8}{9}$

(C) $\left(x-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}, x=\frac{2\pm\sqrt{5}}{3}$

(D) $\left(x-\frac{2}{3}\right)^2=-\frac{5}{9}$,原方程无实数根

(5) 下列四个方程

① $x^2-5=0$; 开平方 ② $3x^2-12+8x=0$; 因式分解 ~~十字相乘法~~

③ $12x^2+12=25x$; ④ $2(5x-1)^2=3(5x-1)$.

较适当的解法依次是( ).

(A) 开平方法、配方法、公式法、因式分解法

(B) 开平方法、因式分解法、公式法、配方法

(C) 开平方法、公式法、配方法、因式分解法

(D) 开平方法、公式法、因式分解法、因式分解法

(6) 方程 $x^2-3|x|+1=0$ 的实数根的个数为( ).

(A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个

4. 用配方法解下列方程.

(1) $y^2-6y=6$; $y_1=3+\sqrt{15}$, $y_2=3-\sqrt{15}$ (2) $x^2-0.5x-0.06=0$; $x_1=\frac{3}{5}$, $x_2=-\frac{1}{10}$

(3) $t^2+\frac{1}{6}t-\frac{1}{3}=0$; $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{2}{3}$ (4) $2x^2=3-7x$. $x_1=\frac{\sqrt{73}-7}{4}$, $x_2=-\frac{\sqrt{73}+7}{4}$

5. 用因式分解法解下列方程：

(1) $(1-\sqrt{3})y^2=(1+\sqrt{3})y$； (2) $(x-1)(x+3)=12$；

(3) $x^2+6x-7=0$； (4) $(x-1)(x+3)-2(x+3)^2+3(x-3)(x+3)=0$.

6. 用公式法解下列方程：

(1) $x(x+8)=16$； (2) $4y=1-\frac{3}{2}y^2$；

(3) $x^2+x=1$； (4) $x^2-(1+2\sqrt{3})x+\sqrt{3}-3=0$.

7. 用适当的方法解下列方程：

(1) $x^2-2\sqrt{2}x-3=0$； (2) $x^2+4x-12=0$；

(3) $2x^2-3x+\frac{1}{8}=0$； (4) $(x+1)^2=(x-1)^2$；

(5) $(3x-4)^2=(4x-3)^2$； (6) $2x^2+2(\sqrt{5}-\sqrt{3})x=4+\sqrt{15}$.

8. 解下列关于 x 的方程：

(1) $m(x^2-1)=x(m^2-1)$ $(m\neq 0)$；

(2) $(x-p)^2=q(x^2-p^2)$ $(q\neq 1)$；

(3) $(m^2-n^2)(x^2-1)=4mnx$ $(|m|\neq|n|)$；

(4) $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$ $(b\neq c)$.

B 组

1. 填空题.

(1) 当 $x=$______时，分式$\frac{2x^2-5x+3}{4x^2-16x+15}$的值为0.

(2) 已知 $x^2-4x+m=0$ 的一个根的相反数是方程 $x^2+4x-m=0$ 的一个根，则 $x^2+mx-4=0$ 的根为______.

(3) 已知方程 $5x^2+mx-6=0$ 的一根是 $-\frac{3}{5}$，则另一根是______，$m=$______. （常州市中考题）

(4) 关于 x 的方程 $(m-3)x^{m^2-7}-x+3=0$ 是一元二次方程，那么 $m=$______.

(5) 若一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一根为 1，且满足等式 $b=\sqrt{a-2}+\sqrt{2-a}+3$，则 $c=$______.

(6) 方程 $|x|^2-10|x|+21=0$ 的根是______.

2. 选择题.

(1) 已知一元二次方程 $x^2-2x-m=0$，用配方法解该方程，配方后的方程

是(　　). (新疆维吾尔自治区中考题)

(A) $(x-1)^2=m^2+1$　　(B) $(x-1)^2=m-1$

(C) $(x-1)^2=1-m$　　(D) $(x-1)^2=m+1$

(2) 若一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 中的二次项系数与常数项之和等于一次项系数,那么方程必有一根是(　　).

(A) 0　(B) -1　(C) 1　(D) ±1

(3) 若 $q(q\neq0)$是方程 $x^2+px+q=0$ 的根,那么 $p+q$ 的值等于(　　).

(A) -1　(B) 1　(C) -2　(D) 2

(4) 方程 $x^2-3|x|-2=0$ 的最小一个根的负倒数是(　　).

(A) -1　(B) $\frac{1}{2}$　(C) $\frac{1}{2}(3-\sqrt{17})$　(D) $\frac{1}{4}(\sqrt{17}-3)$

(5) 若关于 x 的方程$(k^2-15)x^2=k(2x^2+1)-5$ 有无穷多个解,则(　　).

(A) $k\neq-3$ 且 $k\neq5$　(B) $k=-3$ 或 $k=5$　(C) $k=5$　(D) k 为任意数

(6) 设方程$(1996x)^2-1995\times1997x-1=0$ 和 $x^2+1995x-1996=0$ 的较小根分别为 M 和 N,则 MN 的值是(　　). (武汉市初中数学竞赛题)

(A) $-\frac{1}{1996}$　(B) $\frac{1}{1996}$　(C) 1996　(D) -1996

3. 解下列方程:

(1) $2\sqrt{3}x-\sqrt{2}(x^2+1)=0$;　(2) $x^3-1=(x-1)^3$;

(3) $x^2-2(1-\sqrt{3})x+4-2\sqrt{3}=0$;(4) $(a^2-b^2)(x^2+1)+2(a^2+b^2)x=0$.

4. 解下列关于 x 的方程:

(1) $ax^2+2(a-2)x+(a-3)=0$;　(2) $(m+1)x^2+2mx+(m-3)=0$.

5. (1) x 为实数,且有 $|x^2-2x-8|+\sqrt{2x^2-3x-20}=0$. 求$\frac{\sqrt{x}}{1-x}\cdot\sqrt{x^2-1}$的值.

(2) 已知 $\sqrt{a-1}$ 是方程 $x^2-\sqrt{3}x=3x-1$ 的一个根,求$\left(\frac{a^2+6}{a^2-1}-\frac{a+1}{a-1}+1\right)\div\frac{a^3+8}{a^4+3a^3+2a^2}$的值.

12.2　一元二次方程根的判别式及根与系数的关系

学习目标

掌握一元二次方程的根的判别式,会根据根的判别式判断一

元二次方程的根的情况;掌握一元二次方程根与系数的关系,并会运用它来解决有关问题.

重点、难点与关键

重点:一元二次方程根的判别式及根与系数的关系.

难点:判别式及根与系数的关系的综合运用.

关键:联系求根公式,掌握判别式及根与系数的关系.

释疑解难

一元二次方程的根与系数的关系成立的前提条件是方程有根,故 $\Delta=b^2-4ac\geqslant0$ 的条件应倍加注意.

例 已知关于 x 的方程 $x^2-(k+1)x+k+2=0$ 的两个实根的平方和等于6,求 k 的值.

解 设方程的两实根为 x_1,x_2,则

$$x_1+x_2=k+1,\quad x_1x_2=k+2.$$

$\because\ x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=6,$

$\therefore\ (k+1)^2-2(k+2)=6,$

解之得 $k=\pm3$.

但,当 $k=3$ 时,$\Delta=(k+1)^2-4(k+2)=4^2-4\times5<0$,

$\therefore\ k=3$ 不适合,舍去.

当 $k=-3$ 时 $\Delta=(-3+1)^2-4(-3+2)=8>0$,

$\therefore\ k=-3$ 为所求.

这里 $k=3$ 使方程无解,故必须注意使用判别式对结果进行检验.

技能技巧

1. 对判别式的正用和逆用.

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$ 中:

$b^2-4ac>0\Longleftrightarrow ax^2+bx+c=0$ 有两相异实根;

$b^2-4ac=0\Longleftrightarrow ax^2+bx+c=0$ 有两相等实根;